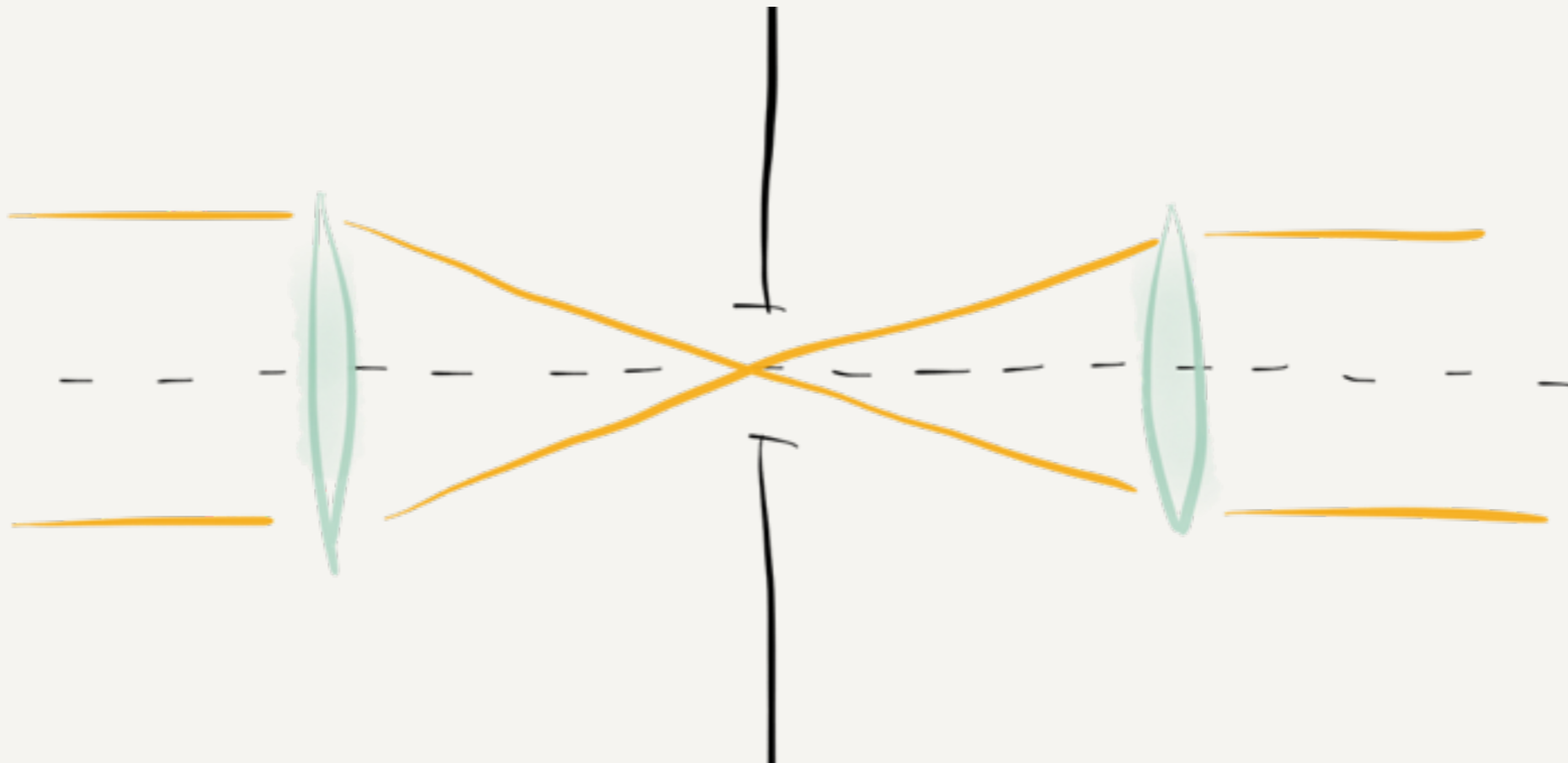


Fortgeschrittene Photonik

Technische Nutzung von Licht

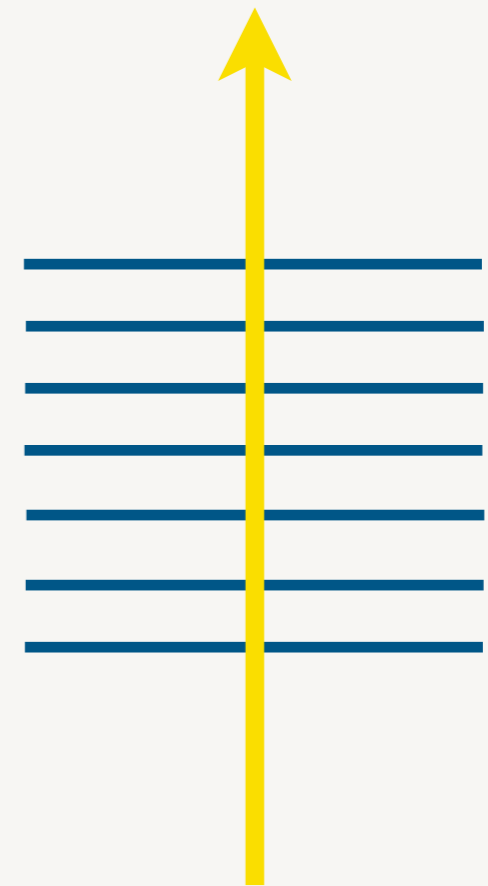


Geometrische Optik

Lichtstrahlen

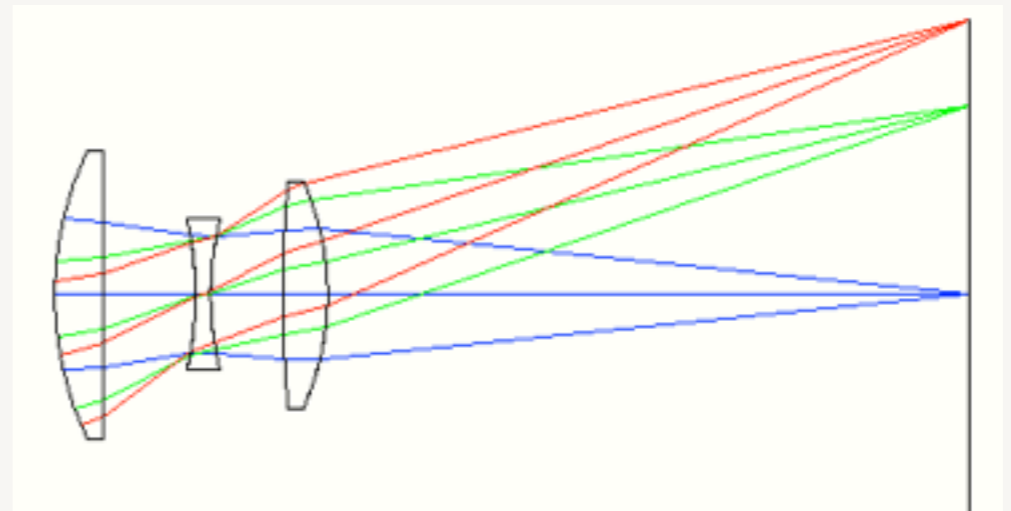
Lichtstrahlen

- Es gibt keine Lichtstrahlen!
- Lichtstrahlen sind ein sehr praktisches Hilfskonstrukt zur Veranschaulichung.
- Sie stellen den physikalisch wichtigen Grenzfall der ebenen Welle dar.
- Lichtstrahlen können gebraucht werden, wenn alle relevanten Maße des optischen Systems groß im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts sind.



Lichtstrahlen

Quelle: Zemax Corp.



- Sichtbares Licht hat eine Wellenlänge von 400nm bis fast 800nm.
- Beispiel für Lichtstrahlen: Kameraobjektiv
- Gegenbeispiel: CD in Reflexion betrachtet. Die Bits sind 1 bis 2 μm groß.



Fermat'sches Prinzip und Snelliussches Brechungsgesetz

Fermat'sches Prinzip

- Welchen Weg nehmen die Lichtstrahlen?
- Schon bei den alten Griechen bekannt: Licht nimmt bei Reflexion die kürzeste Strecke
- Das inspirierte *Pierre de Fermat* im 17. Jahrhundert zu der Formulierung des Prinzips:



Licht nimmt immer den Weg, der am wenigsten Zeit benötigt.

Reflexionsgesetz

Herleitung nach Fermat

- Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \beta$$

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$$t = t_1 + t_2$$

$$= \frac{s_1}{c} + \frac{s_2}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{s_1}{c} + \frac{s_2}{c} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Phytagoras

$$0 = \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx} \left[\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (L - x)^2} \right]$$

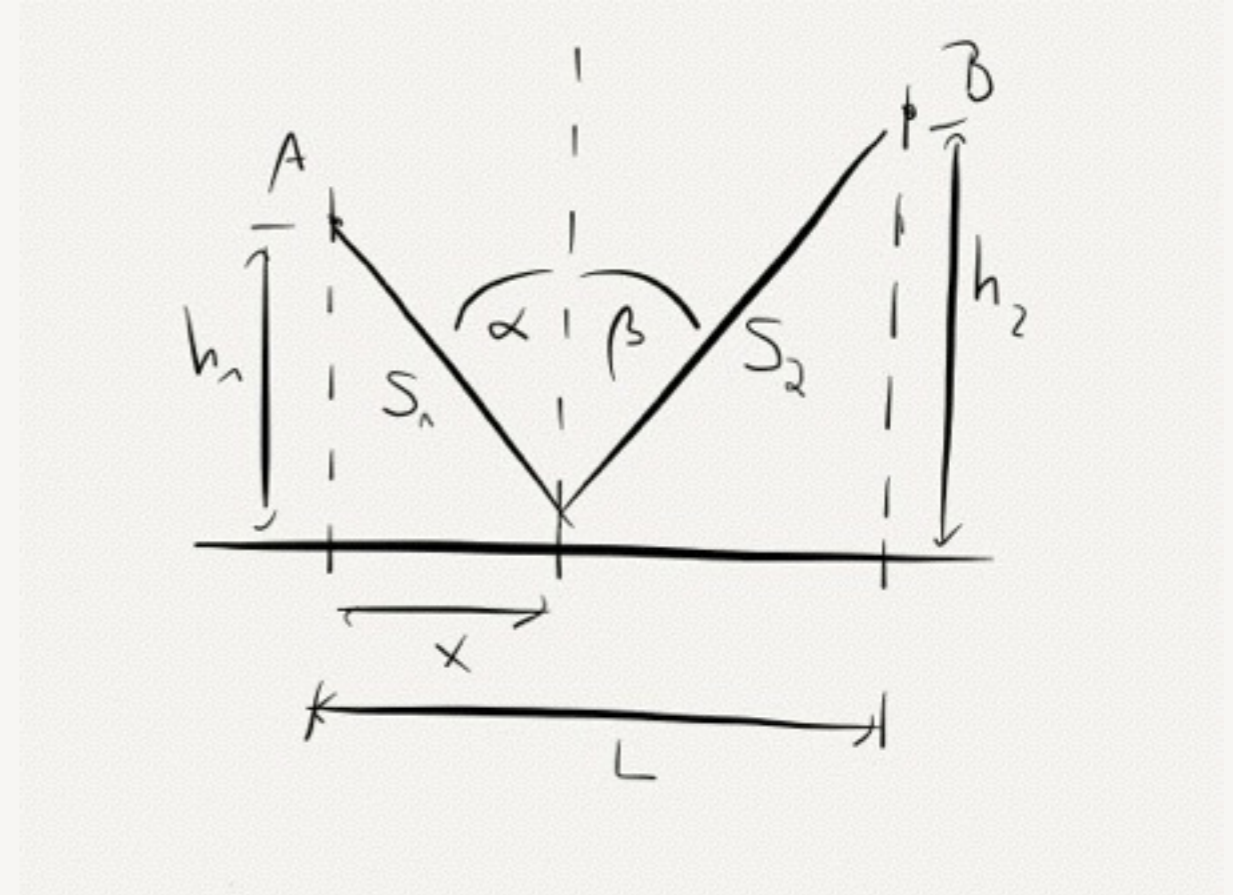
$$= \frac{1}{c} \left[\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{h_2^2 + (L - x)^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left[\frac{x}{s_1} - \frac{L - x}{s_2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{s_1} = \frac{L - x}{s_2}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$



Lichtgeschwindigkeit in Medien

- In unterschiedlichen Materialien (Glas, Wasser) ändert sich die Lichtgeschwindigkeit:

$$c_0 = n \cdot c_M$$

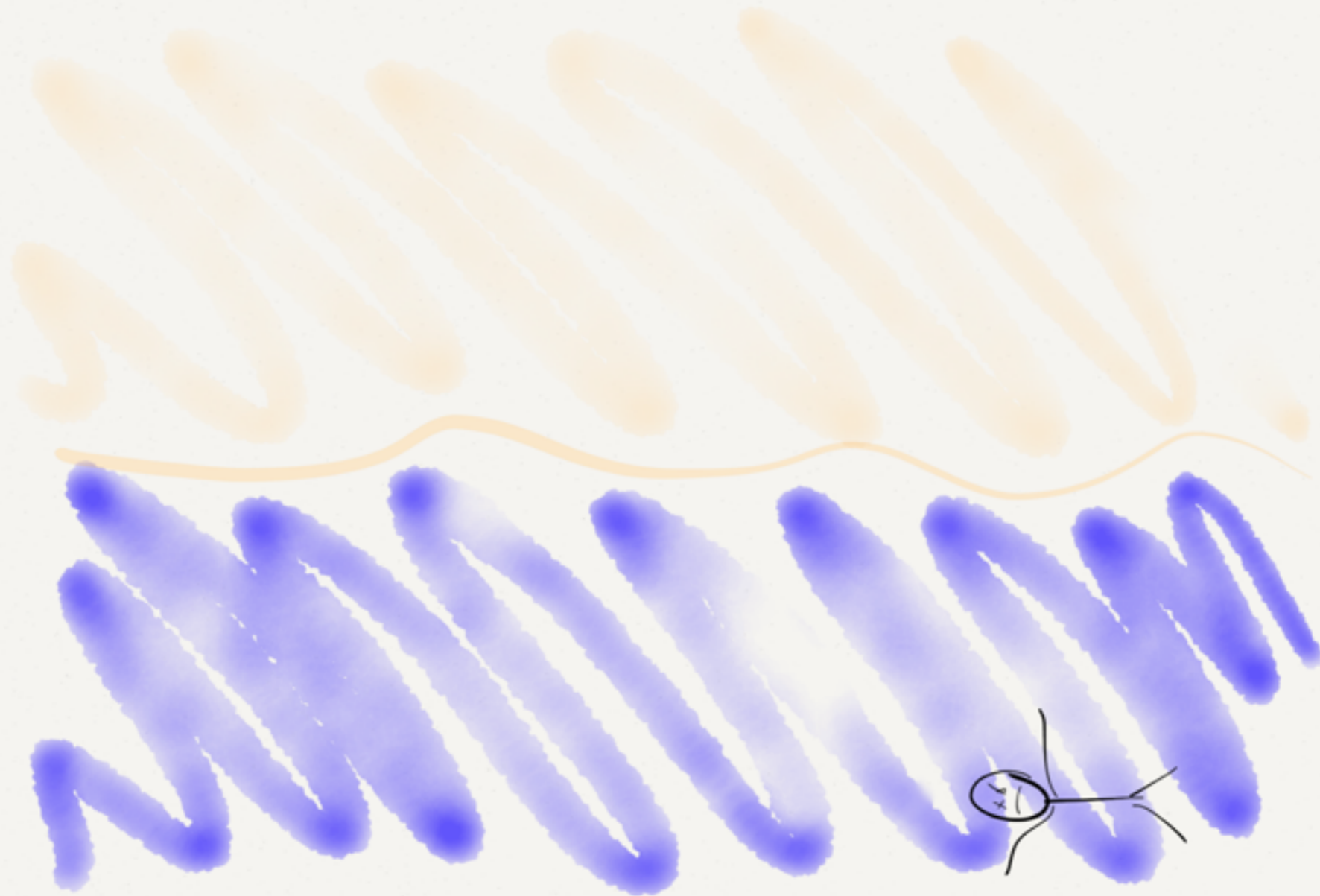
- Die Proportionalitätskonstante n nennt man „Brechungsindex“

Material	Brechungsindex
Luft	1.00
Wasser	1.33
Glas	1.52
Diamant	2.42

Medien mit hohem Brechungsindex nennt man ***optisch dicht.***

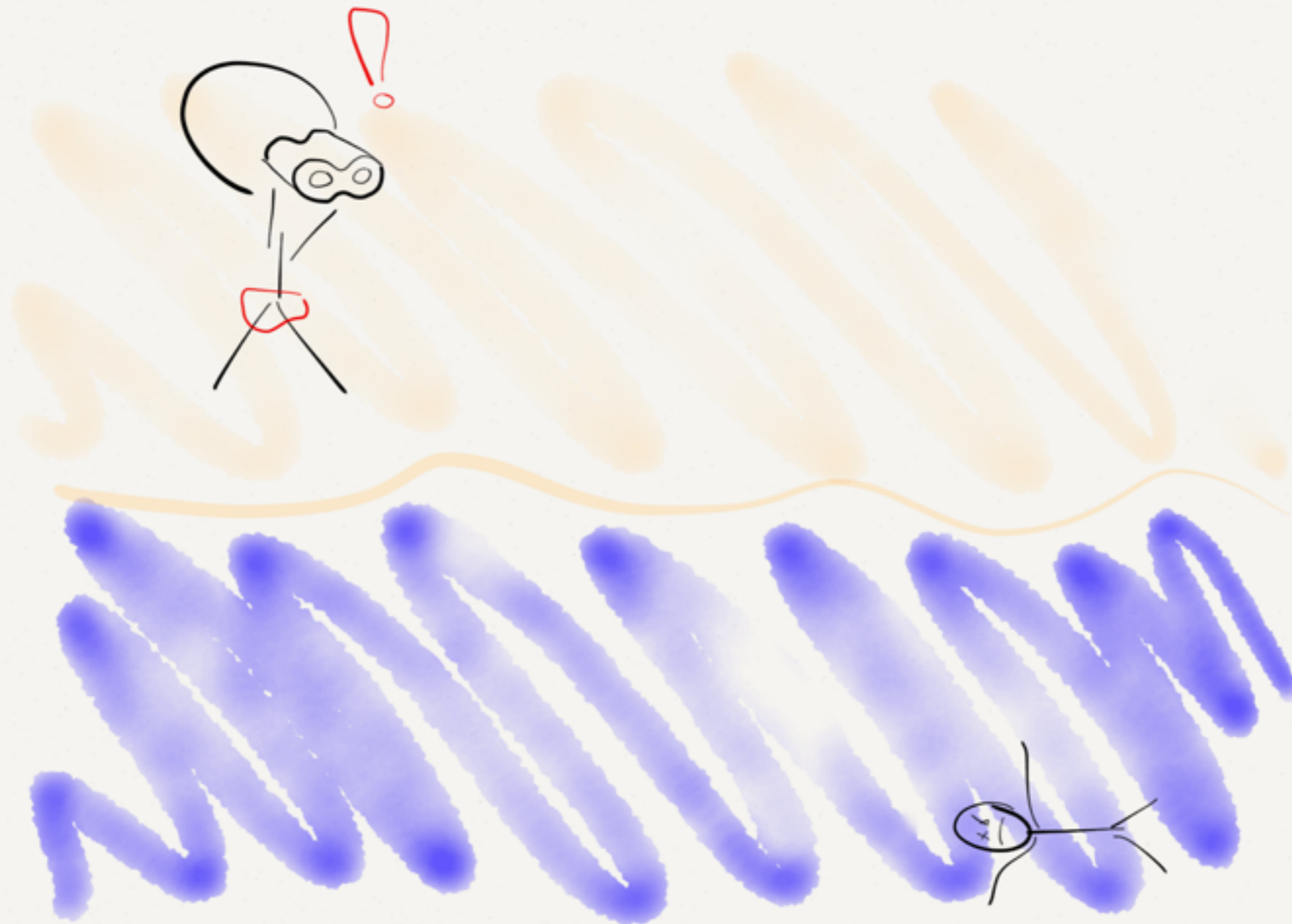
Snellius'sches Brechungsgesetz

Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



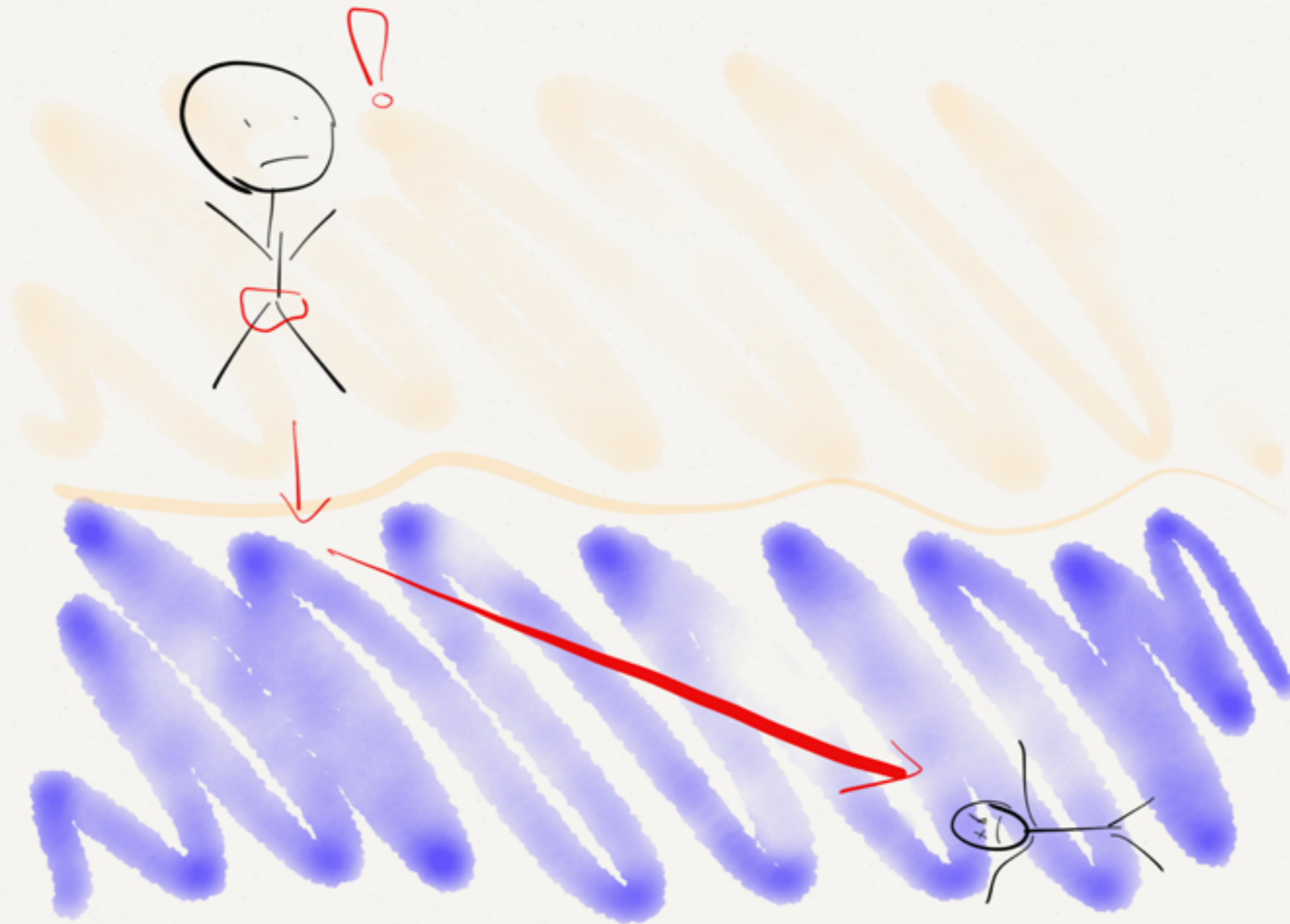
Snellius'sches Brechungsgesetz

Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



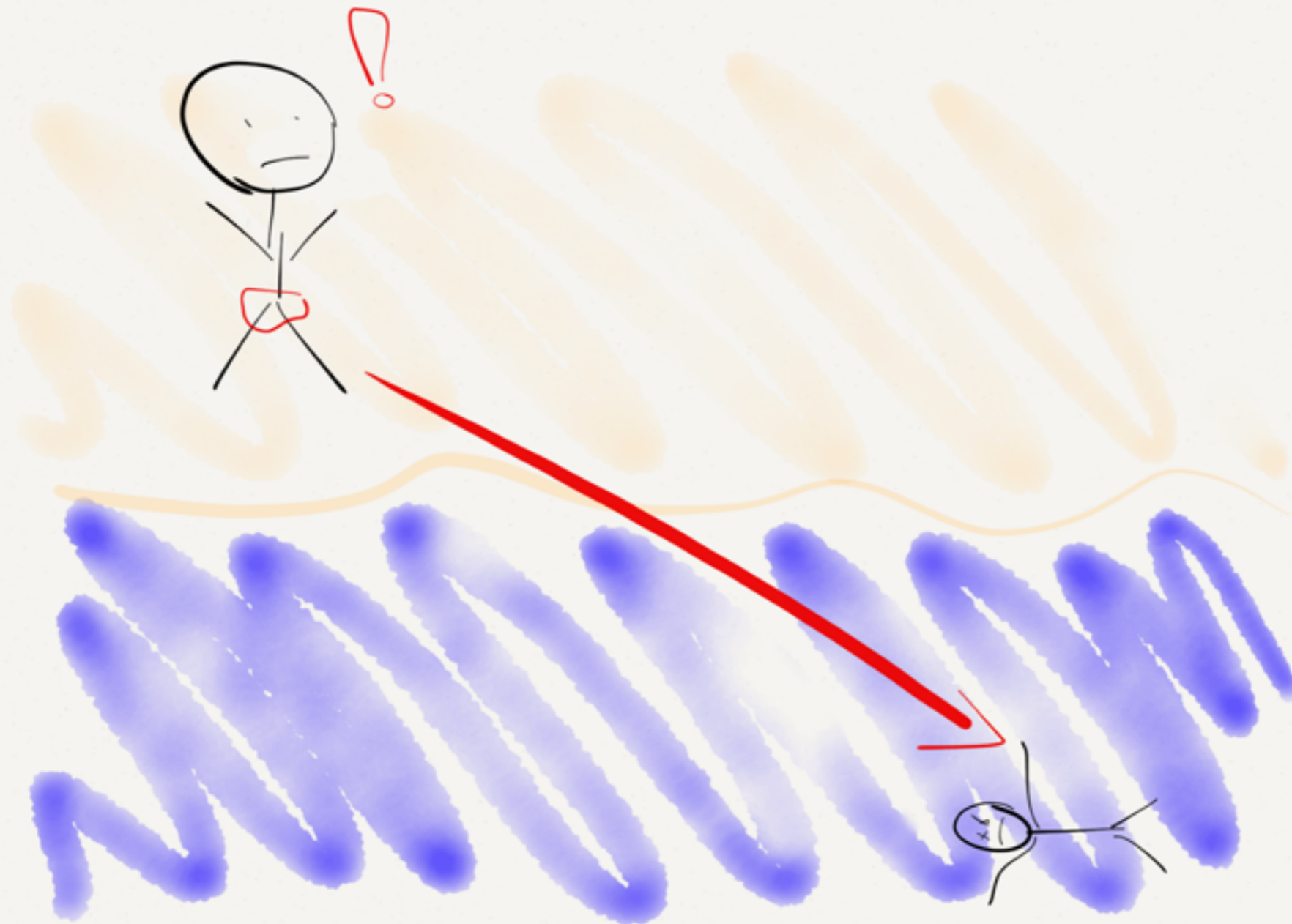
Snellius'sches Brechungsgesetz

Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



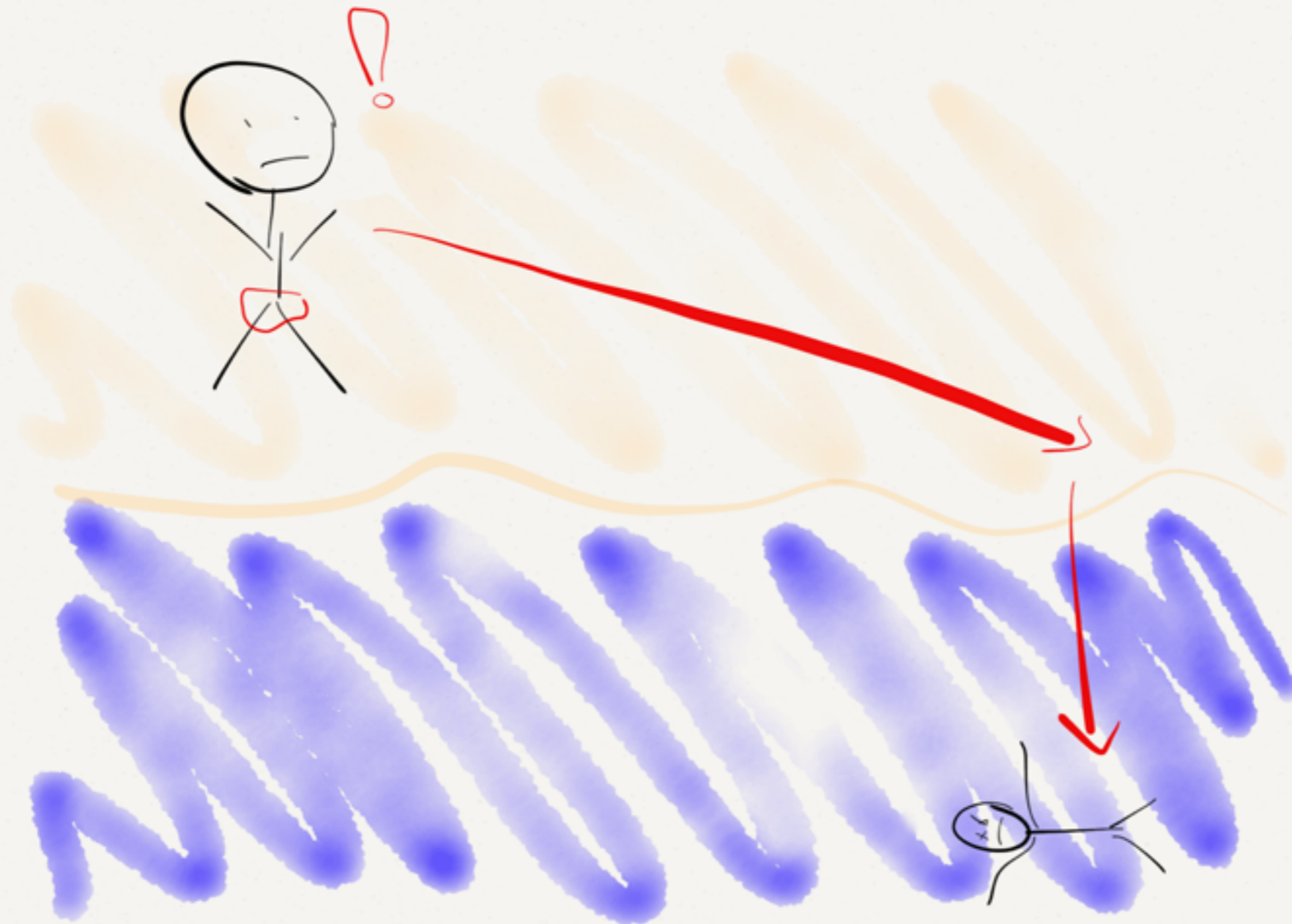
Snellius'sches Brechungsgesetz

Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



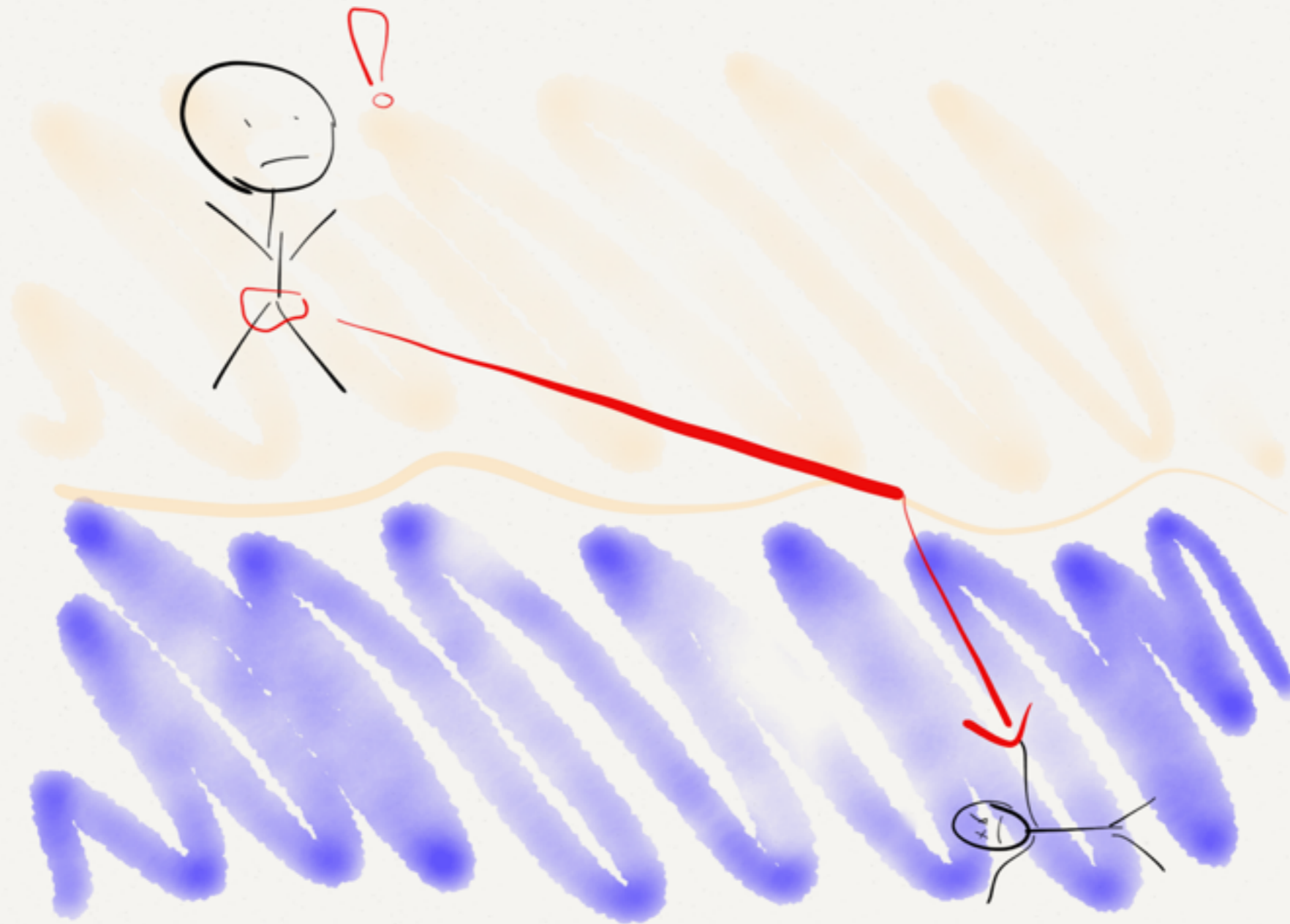
Snellius'sches Brechungsgesetz

Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



Snellius'sches Brechungsgesetz

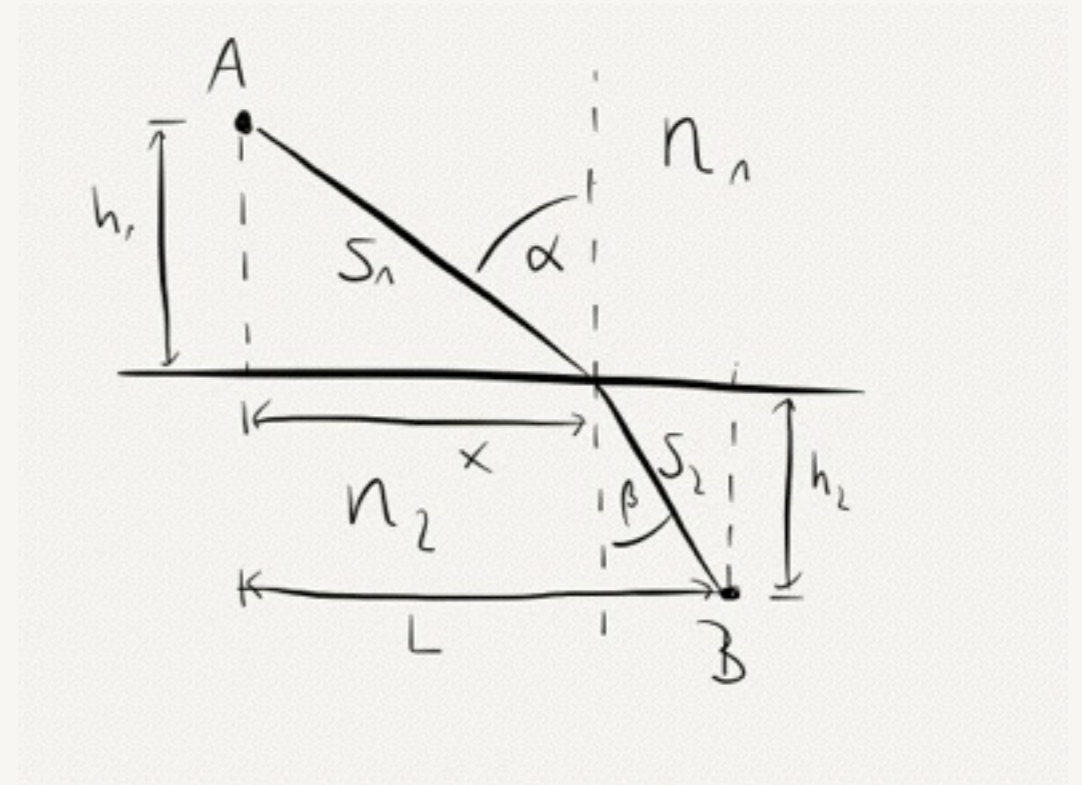
Veranschaulichung des Fermat'schen Prinzips



Snellius'sches Brechungsgesetz

Herleitung nach Fermat

- Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist langsamer als im Vakuum
- Darum ist die schnellste Strecke nicht mehr eine Gerade
- Merkbeispiel: Rettungsschwimmer rettet ertrinkenden Schwimmer. Am Strand schneller als im Wasser.



$$t = \frac{s_1}{c/n_1} + \frac{s_2}{c/n_2} = \frac{n_1 \cdot s_1}{c} + \frac{n_2 \cdot s_2}{c}$$

$$\frac{d}{dx} t = \frac{n_1}{c} \cdot \frac{x}{s_1} - \frac{n_2}{c} \cdot \frac{L-x}{s_2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Folgerungen

- Umkehrbarkeit des Weges: wenn der Weg von A nach B bereits derjenige mit der kürzesten Zeit ist muss dies auch für die Gegenrichtung gelten. Licht geht immer in beide Richtungen!
- Als optische Pfadlänge wird das Produkt aus geometrischer Länge und Brechungsindex des jeweiligen Mediums bezeichnet.
- Bei einem variablen Brechungsindex ist es das Integral des Produkts:

$$OPL = \int_C n(x) dx$$

- In der refraktiven Optik wird zum Vergleich zweier Pfade auch von der optischen Pfad-Differenz (*Optical Path Difference*, OPD) gesprochen.

Brechungsgesetz I

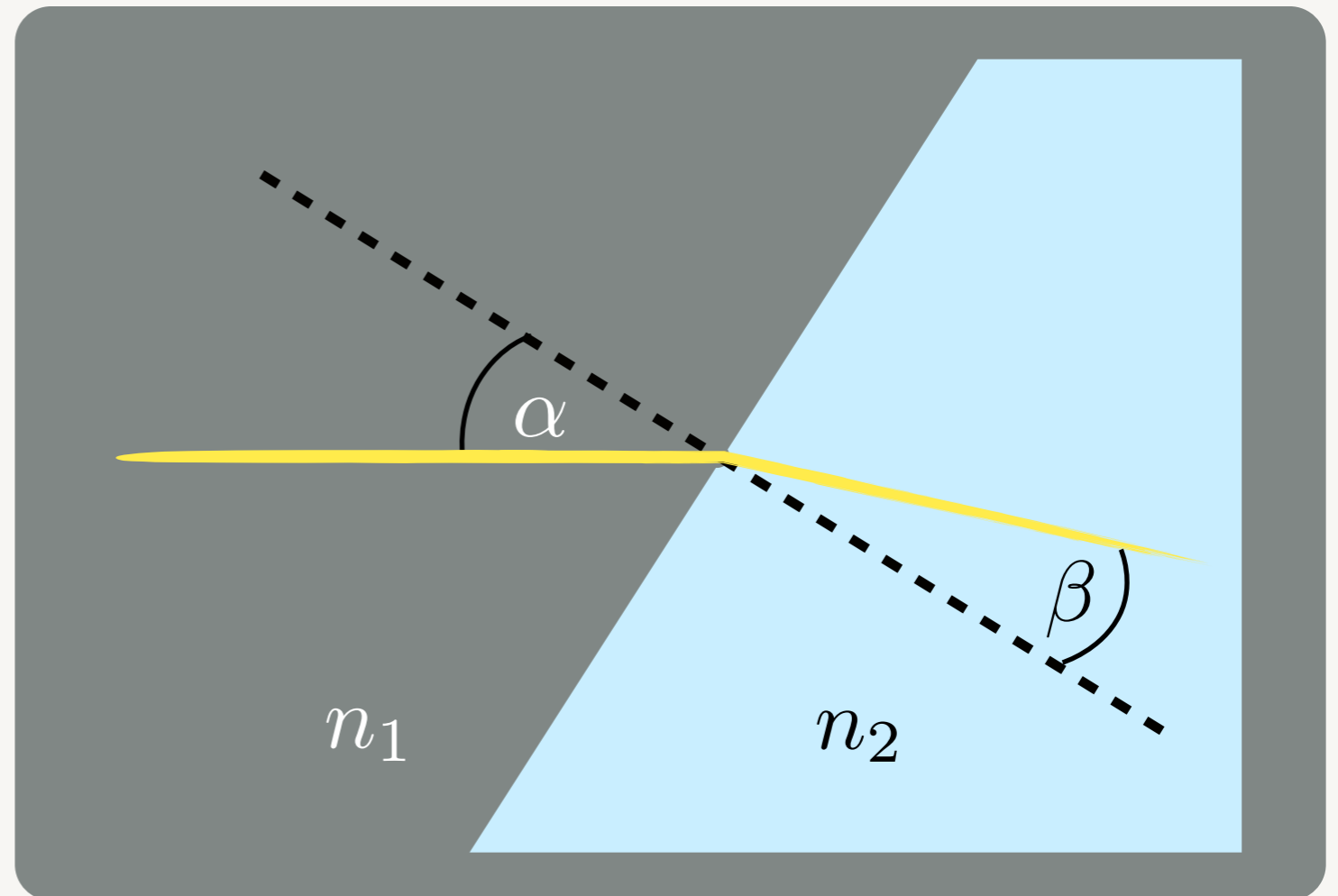
Vom dünnen ins dichte Medium

Snellius'sches
Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Vom optisch dünnen
ins optisch dichte
Medium wird **zum**
Lot **hin** gebrochen.

Von dünn nach dicht
zum Lot sich bricht.



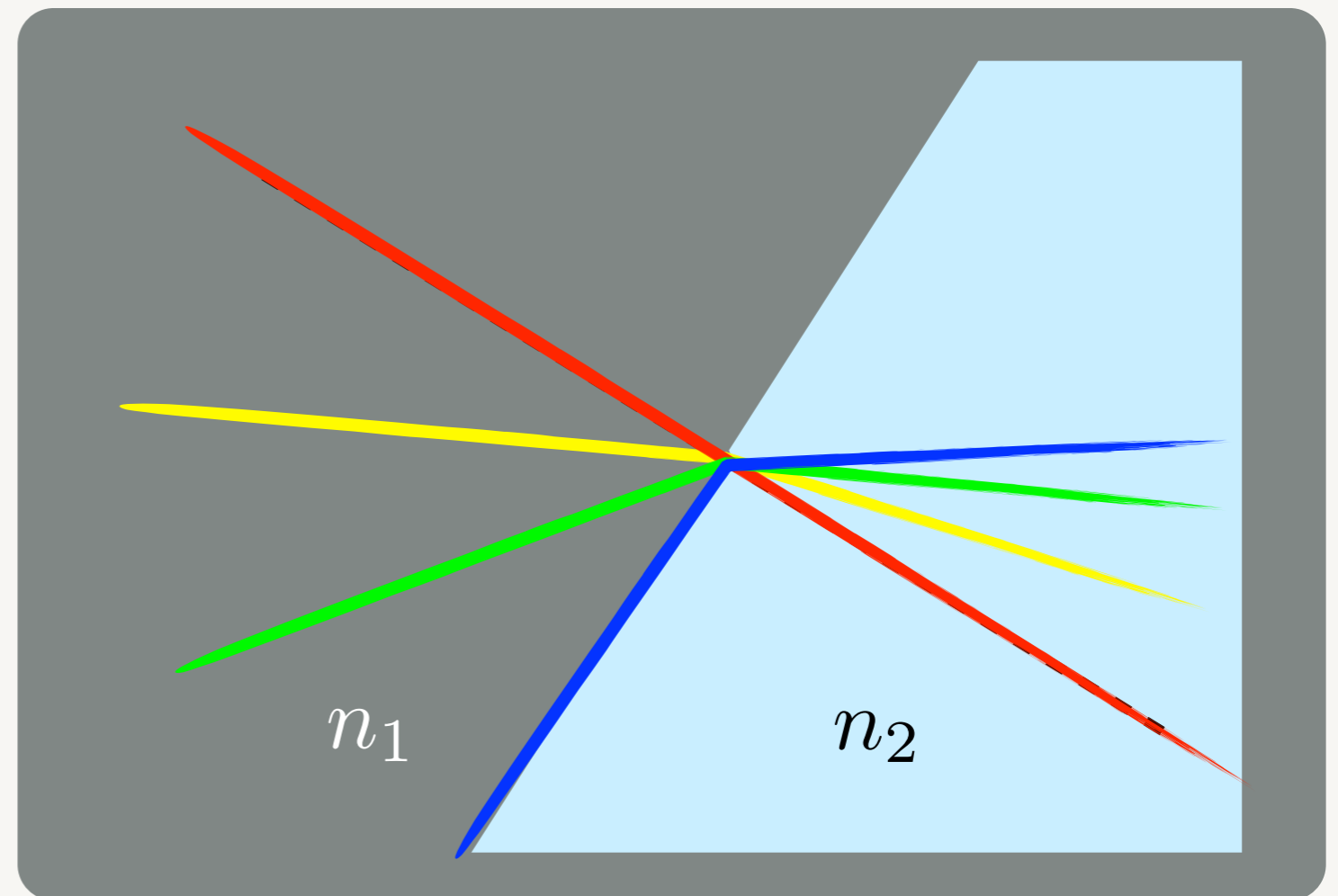
$$n_1 < n_2$$

Brechungsgesetz I

Vom dünnen ins dichte Medium

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Luft	Glas
α	β
0°	0°
30°	19.2°
60°	34.7°
89.9°	41.1°



$$n_1 < n_2$$

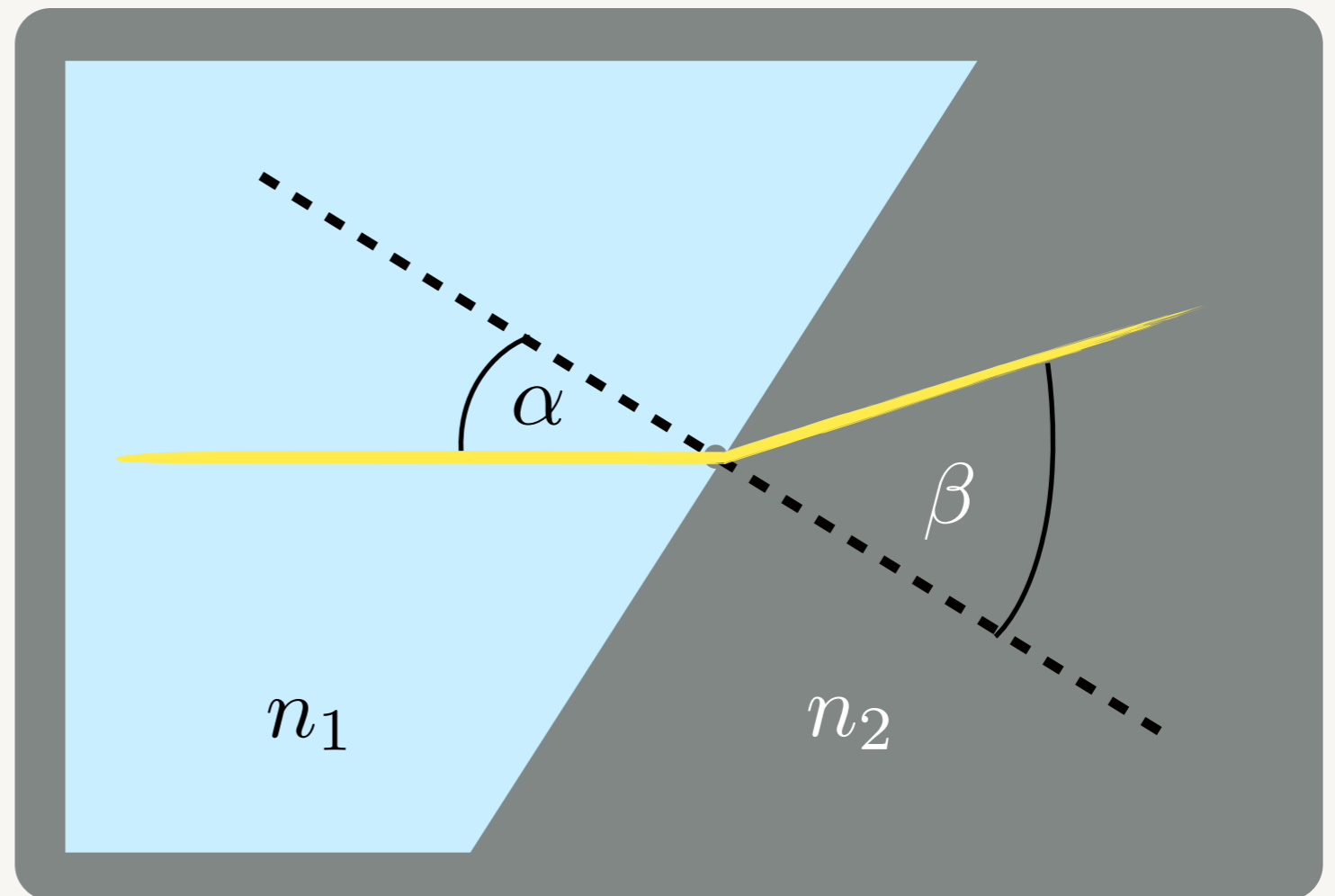
Brechungsgesetz II

Vom dichten ins dünne Medium

Snellius'sches
Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Vom optisch dichten
ins optisch dünne
Medium wird **vom**
Lot **weg** gebrochen.



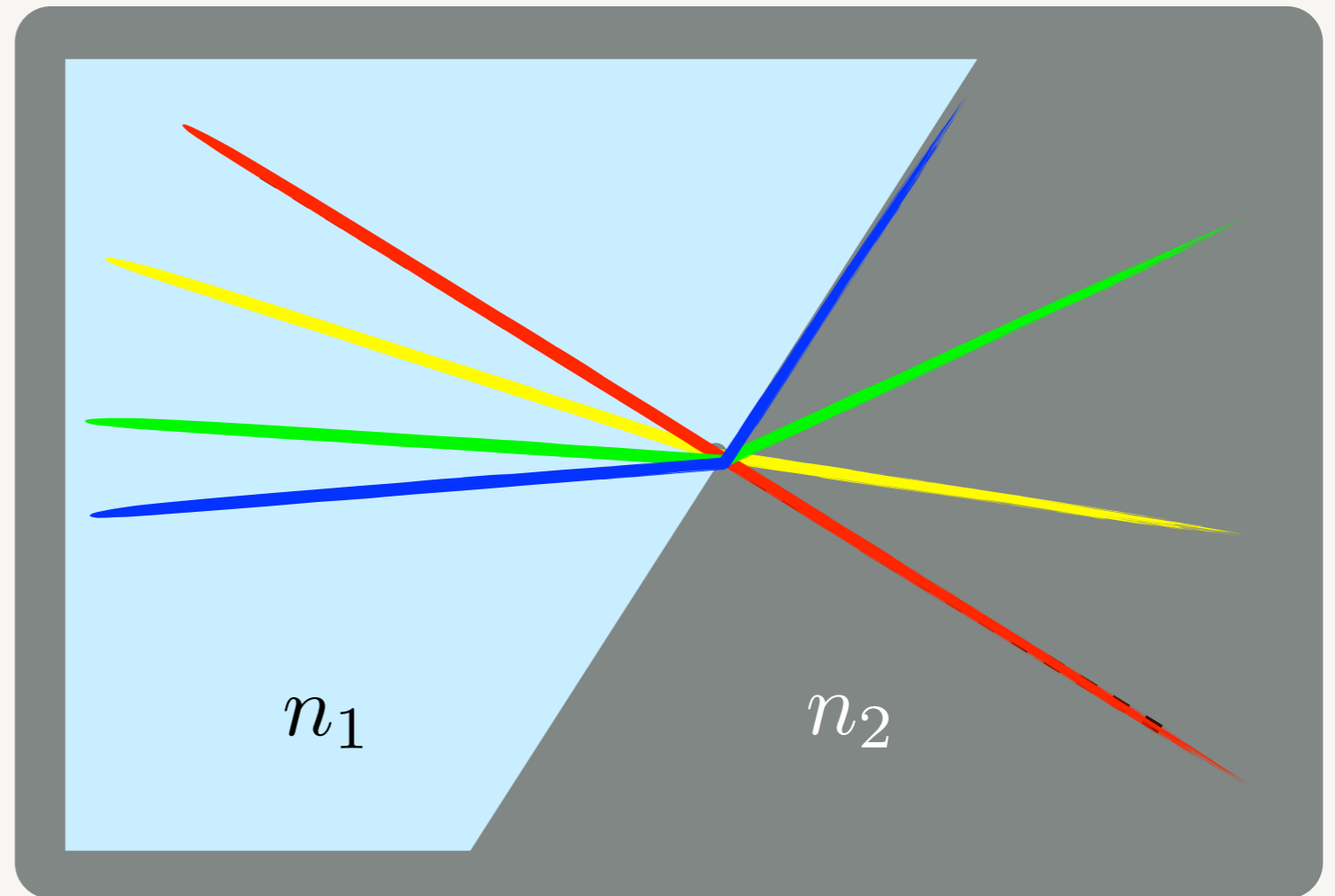
$$n_1 > n_2$$

Brechungsgesetz II

Vom dichten ins dünne Medium

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

Glas	Luft
α	β
0°	0°
19.2°	30°
34.7°	60°
41.1°	89.9°



$$n_1 > n_2$$

Der Lichtweg ist immer umkehrbar!

Totalreflexion

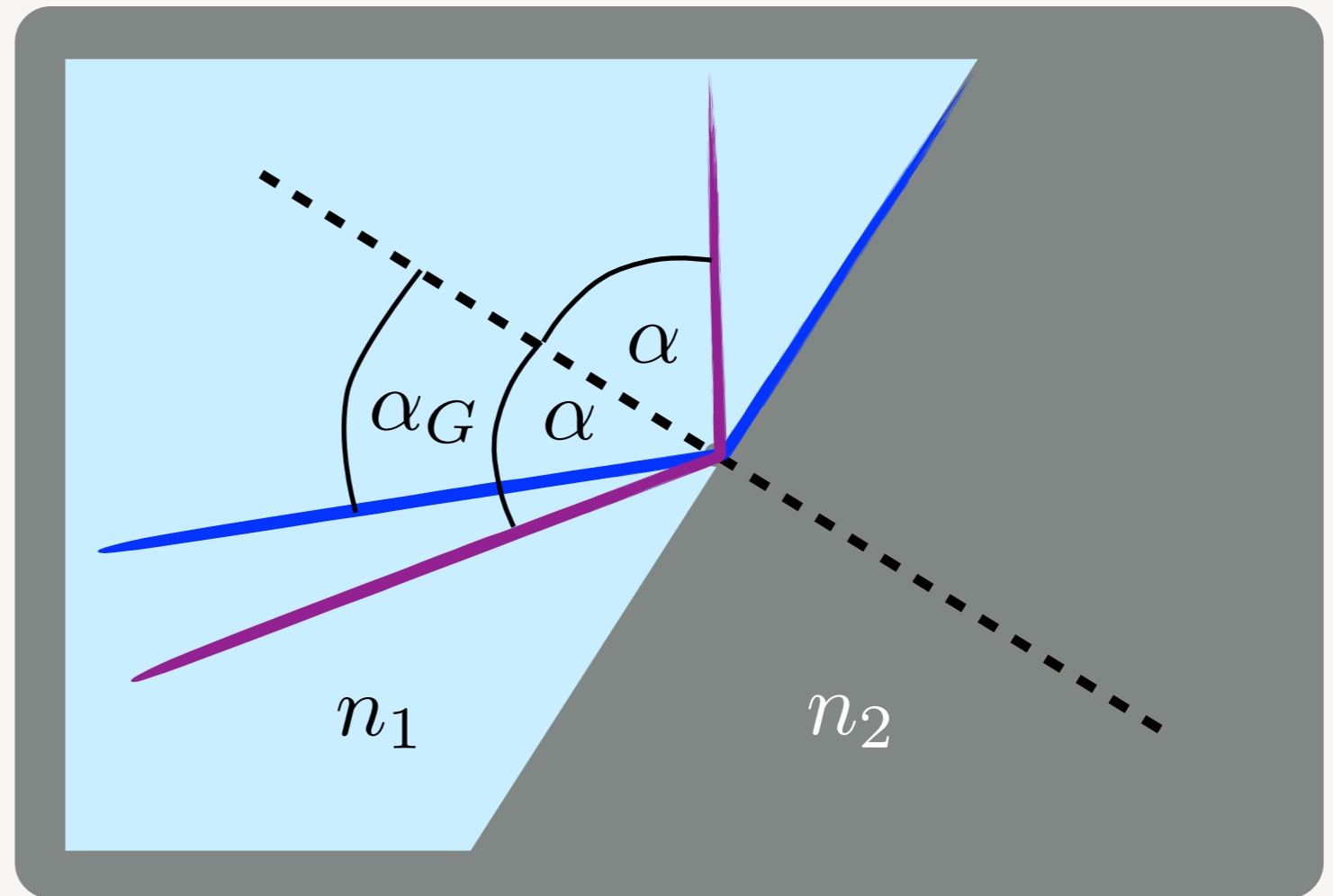
Ab einem Grenzwinkel kann der Lichtstrahl nicht nach außen brechen.

$$n_1 \cdot \sin \alpha_G = n_2 \cdot \sin 90^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha_G = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Alle Lichtstrahlen mit

$$\alpha > \alpha_G$$

werden vollständig reflektiert.



$$n_1 > n_2$$

Totalreflexion

Ab einem Grenzwinkel kann der Lichtstrahl nicht nach außen brechen.

$$n_1 \cdot \sin \alpha_G = n_2 \cdot \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_G = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Alle Lichtstrahlen mit

$$\alpha > \alpha_G$$

werden vollständig reflektiert.

Von	Nach	α_G
Glas $n = 1.52$	Luft $n = 1.00$	41.1°
Wasser $n = 1.33$	Luft $n = 1.00$	48.8°
Glas $n = 1.52$	Wasser $n = 1.33$	61.0°

Zusammenfassung Lichtstrahlen

- Fermat'sches Prinzip: kürzeste Zeit
- Lichtweg ist umkehrbar
- Reflexionsgesetz: $\alpha = \beta$
- Brechungsgesetz: $n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$
- Totalreflexion: $\alpha_G = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$

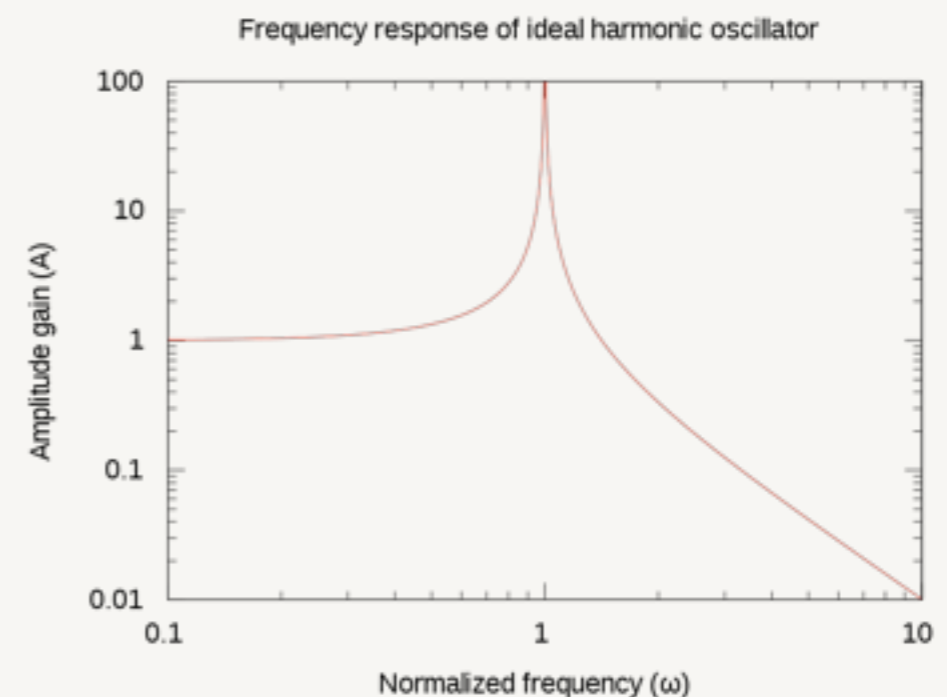
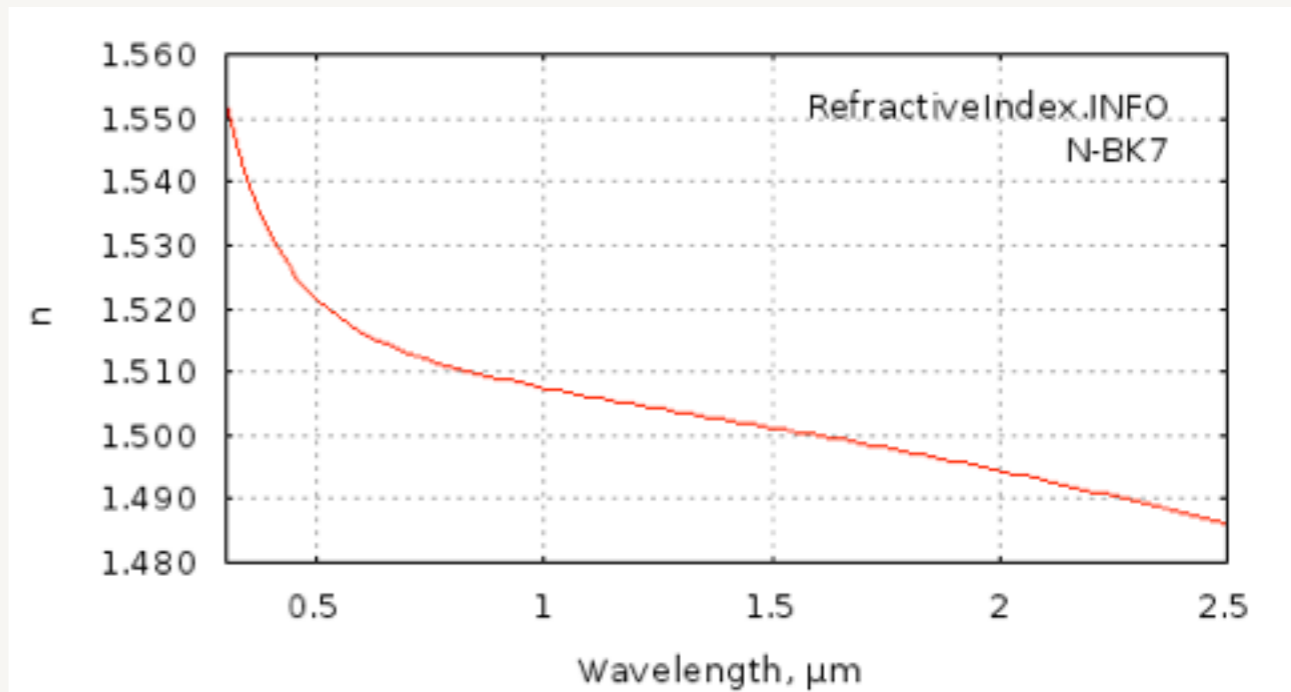
Eigenschaften optischer Medien

- **Dispersion:** Brechungsindex des Materials hängt von der Frequenz des Lichtes ab.
- **Absorption:** Licht wird im Material absorbiert und i.A. in Wärme (d.h. Bewegungsenergie der Atome) umgewandelt.

Dispersion

Dispersion

- Lichtgeschwindigkeit im Medium hängt von der Wellenlänge des Lichts ab
- Analogie: Resonanz eines getriebenen harmonischen Oszillators (z.B. LC-Schwingkreis)
- Ursache: Schwingendes System Elektron - Kern mit Coulomb-Anziehung als Federkraft.



Dispersion

- Charakterisierung von technischen Gläsern mit Brechungsindex und Dispersion

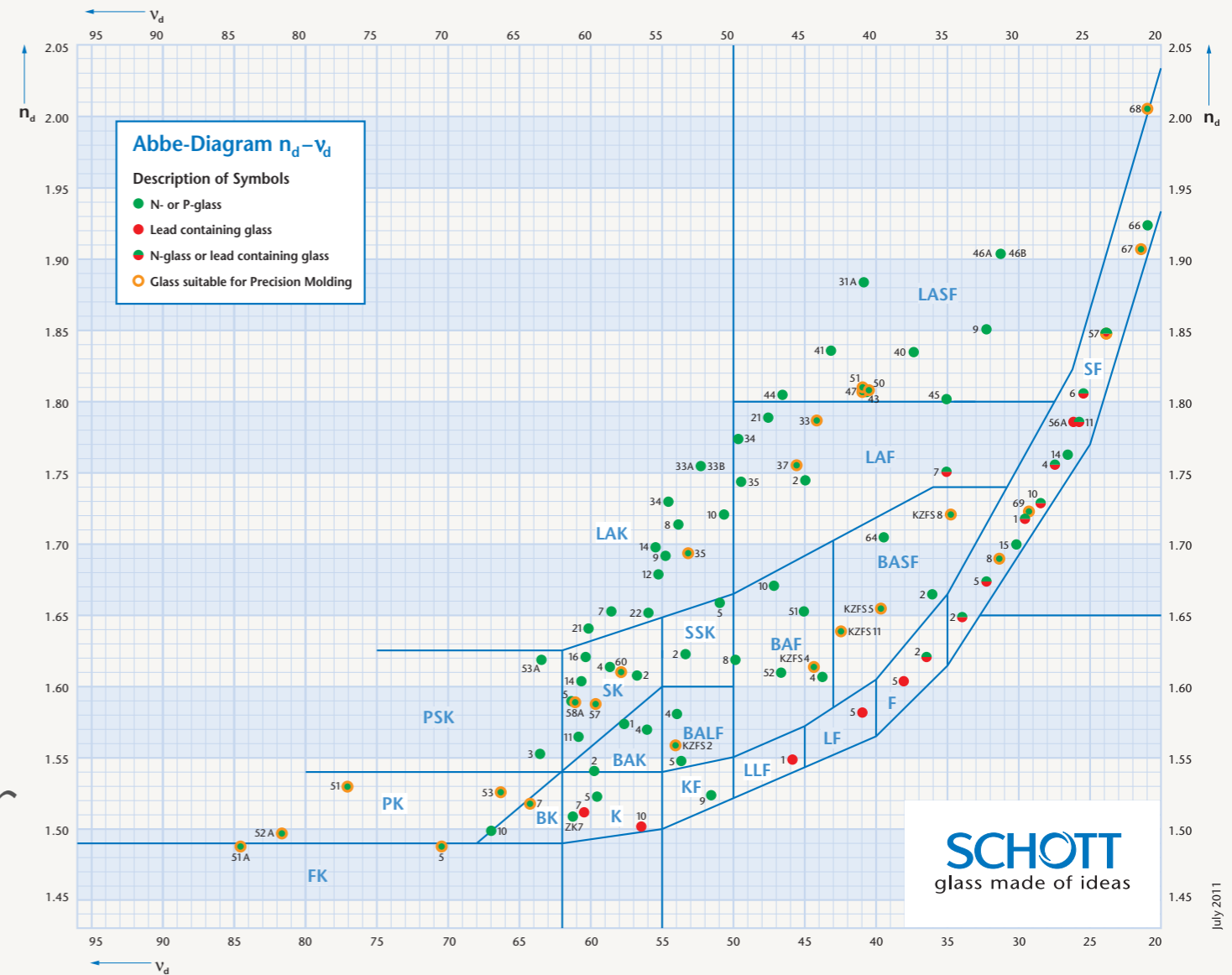
- Brechungsindex n_d

- Dispersion: Abbe-Zahl

$$v_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

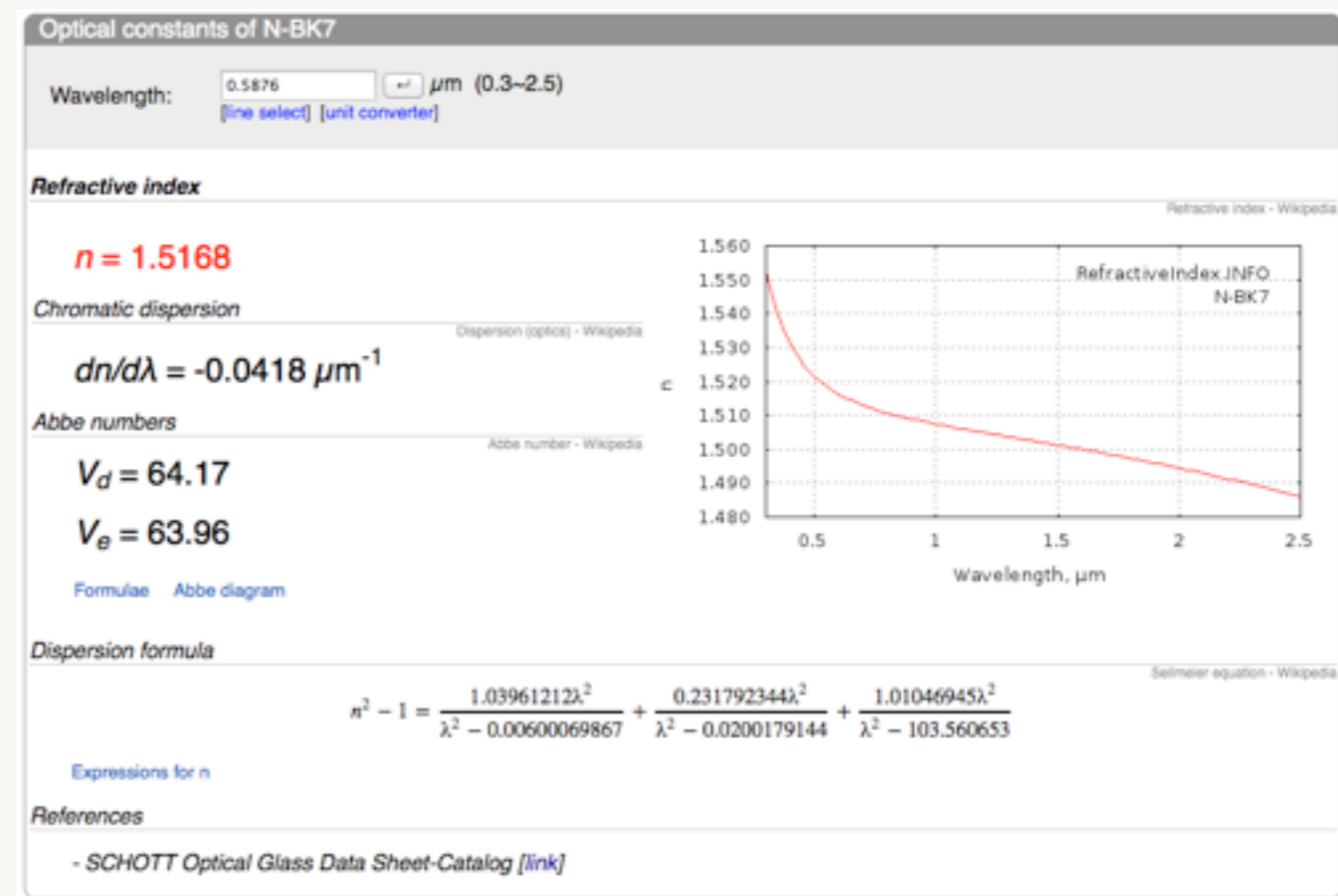
- Ein Maß wie stark sich der Brechungsindex ändert

- d , F und C beziehen sich auf die Fraunhofer-Linien



Dispersion

- Abbe-Zahl nur eine Näherung
- Genauere Darstellung mit funktionalem Zusammenhang: Schott- oder Sellmeier-Formel
- Insbesondere für Raytracing notwendig



Quelle: refractiveindex.info

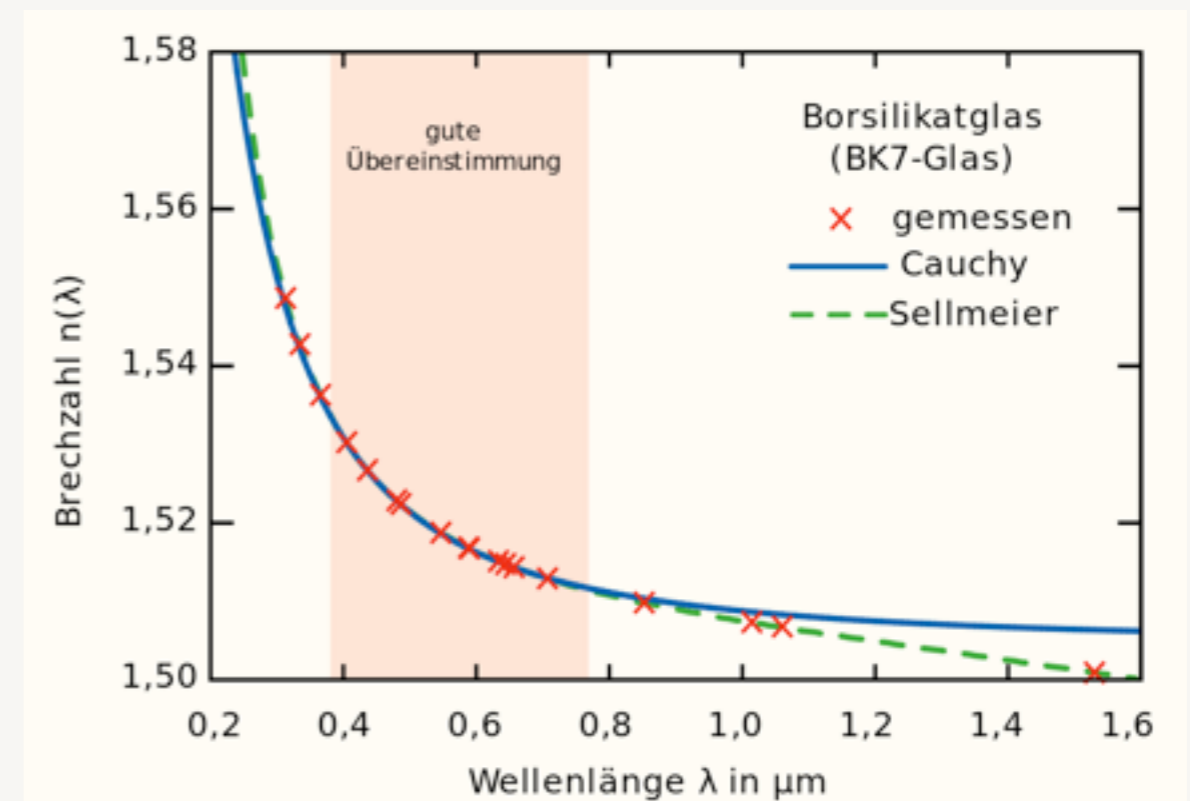
Sellmeier-Formel

N-BK7

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

Konstanten der Dispersionsformel	
B₁	1,03961212
B₂	0,231792344
B₃	1,01046945
C₁	0,00600069867
C₂	0,0200179144
C₃	103,560653

- Eine empirisch gefundene Formel zur Beschreibung des Brechungsindex über das sichtbare Spektrum
- 6 Konstanten als Parameter



Schott-Formel

$$n^2 = A_0 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda^{-2} + A_3 \lambda^{-4} + A_4 \lambda^{-6} + A_5 \lambda^{-8}$$

H-F4 von CDGM

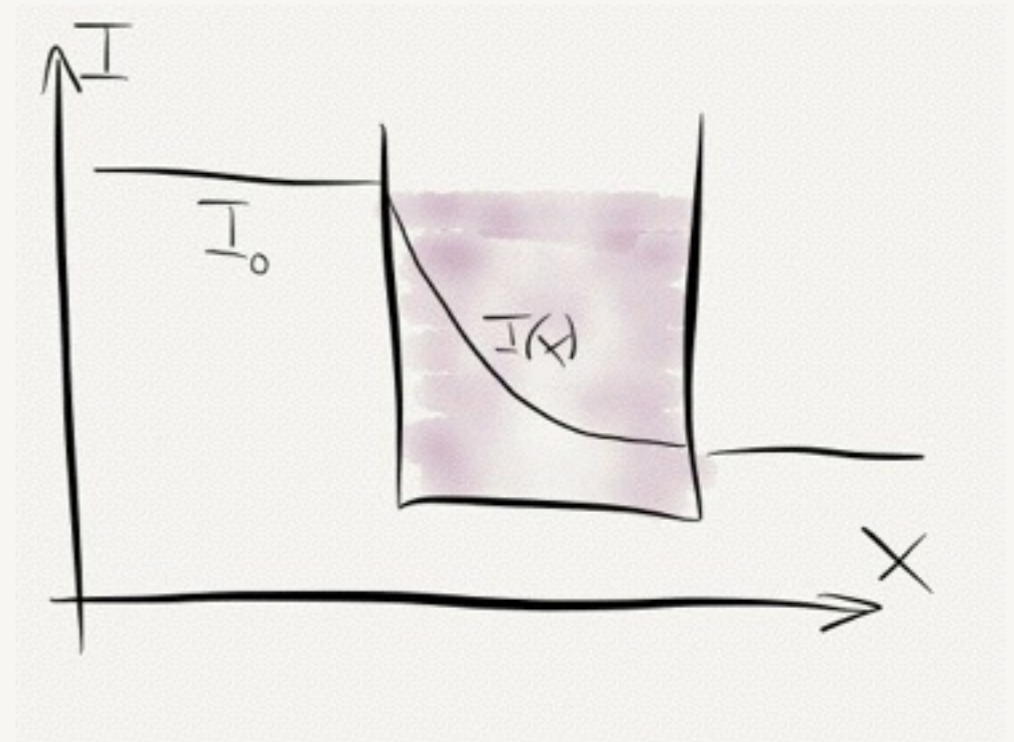
色散公式的系数 Constants of Dispersion Formula	
A_0	2.56216381
A_1	$-1.30775362 \times 10^{-2}$
A_2	$1.81084716 \times 10^{-2}$
A_3	$2.31573055 \times 10^{-3}$
A_4	$-2.64961402 \times 10^{-4}$
A_5	$2.07458046 \times 10^{-5}$

- Empirischer polynominaler Zusammenhang
- 6 Konstanten als Parameter

Transmission und Absorption

Transmission und Absorption

- Absorption eines Photons und Umwandlung der Energie in Wärme
- Lambert-Beer'sches Gesetz
- Genau wie der Brechungsindex abhängig von der Wellenlänge
- Gilt für alle Materialien (später: komplexer Brechungsindex)



$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha x}$$

Lambert-Beer'sches Gesetz

[Herleitung bei Chemgapedia](#)

Transmission und Absorption

- Transmission gibt an, wie viel Prozent der Strahlung durchgelassen wird.
- Absorption ist grad der Teil, der nicht transmittiert wurde.
 - Im allgemeinen ist der Absorptionskoeffizient abhängig von der Wellenlänge

Lambert-Beer $I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha x}$

Transmission $T = \frac{I}{I_0} = e^{-\alpha x}$

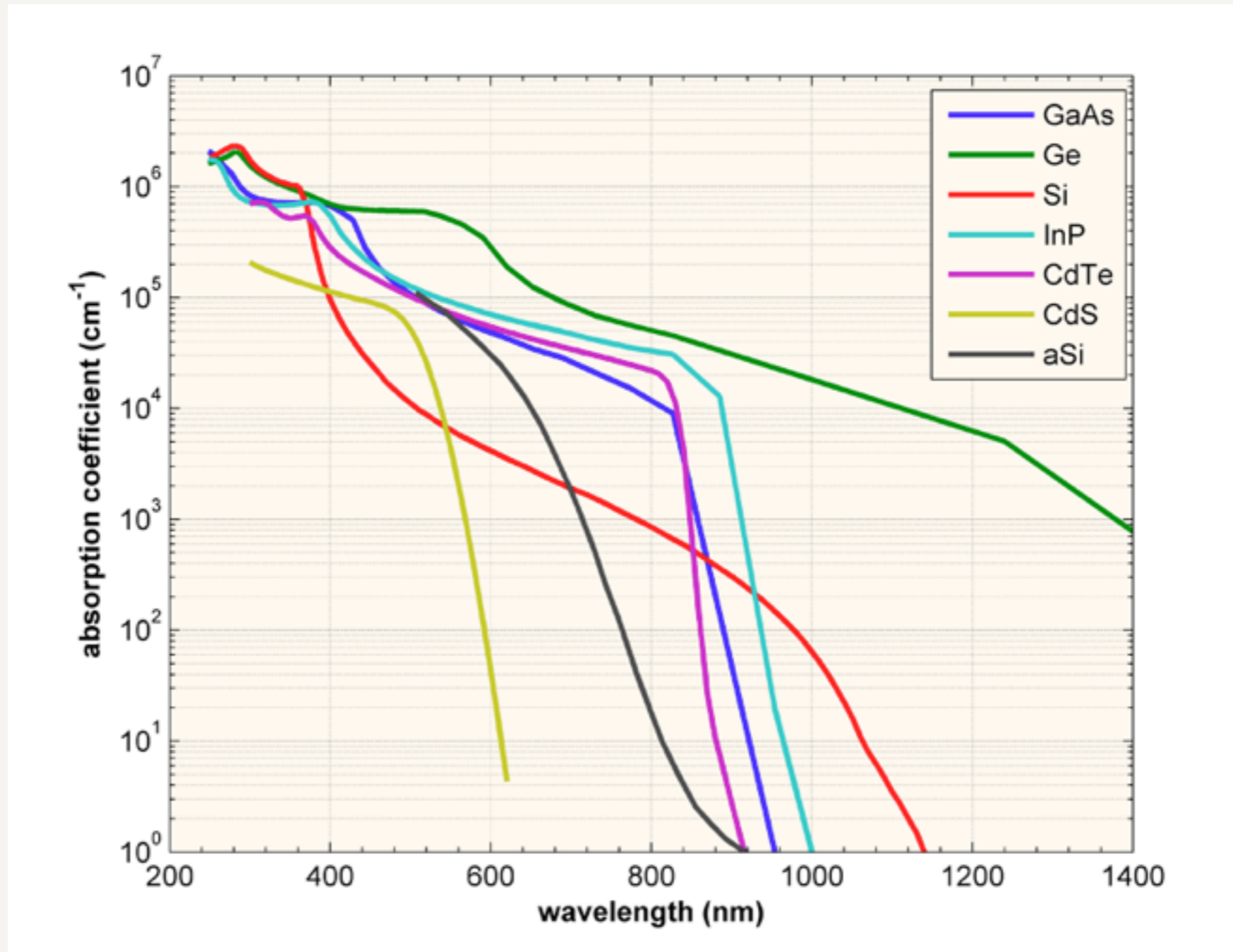
Absorption $A = 1 - T$

l.a. $\alpha = \alpha(\lambda)$

$$\Rightarrow I(x, \lambda) = I_0 \cdot e^{-\alpha(\lambda)x}$$

$$T(\lambda) = e^{-\alpha(\lambda)x}$$

Transmission und Absorption



<http://pveducation.org/pvcdrom/pn-junction/absorption-coefficient>

Transmission und Absorption

Kristallines Silizium (c-Si)

Wellenlänge (nm)	α (cm ⁻¹)	Mittlere Eindringtiefe (μm)
500	10000	1
750	2000	5
1000	60	166

Transmission und Absorption

Amorphes Silizium (a-Si)

Wellenlänge (nm)	α (cm ⁻¹)	Mittlere Eindringtiefe (μm)
500	1 000 000	0,1
750	2000	5
1000	N/A	„Unendlich“

HSD Zusammenfassung: Eigenschaften optischer Medien

- **Dispersion:** Brechungsindex hängt von der Wellenlänge des Materials ab.
- I. Beschreibung: Abbe-Zahl
- Genauer: Polynomiale Darstellung nach Sellmeyer oder Schott
- **Absorption:** Licht wird im Material absorbiert und i.A. in Wärme (d.h. Bewegungsenergie der Atome) umgewandelt.
- Lambert-Beer'sches Gesetz: exponentieller Abfall der Intensität

Abbildung

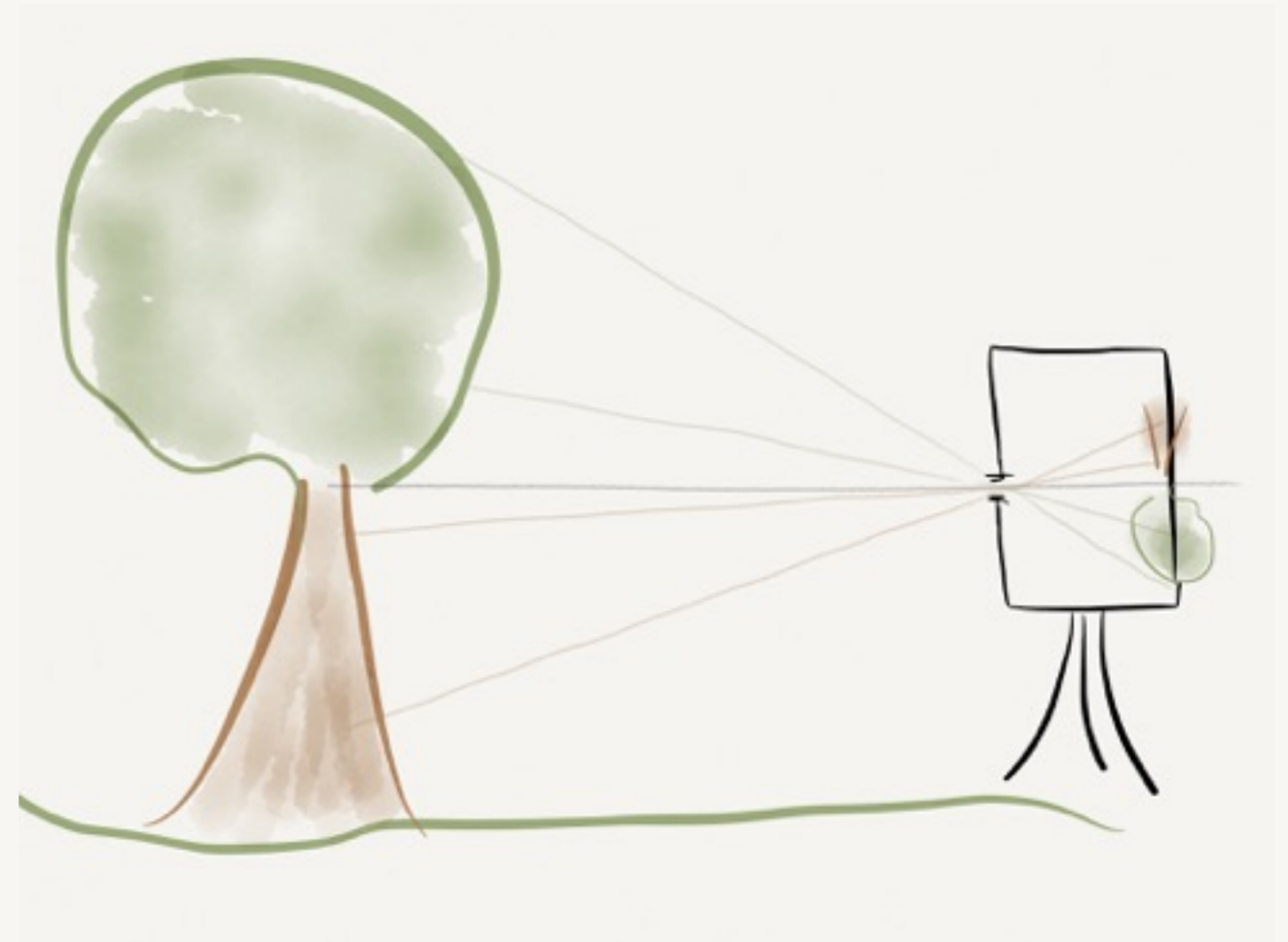


- Ein zweidimensionales Bild der Welt erzeugen
- Räumliche Relation aller Objekte zueinander erhalten
- Auf eine Ebene abbilden

Camera Obscura

„Dunkle Kammer“

- Bild ist punktgespiegelt
- Sehr lichtschwach
- Prinzip bereits bei den alten Griechen bekannt
- Mit Schirm als Zeichenhilfe im 17. Jahrhundert beliebt



Mühlheim: Camera Obscura im Wasserturm

Abbildung Grundbegriffe

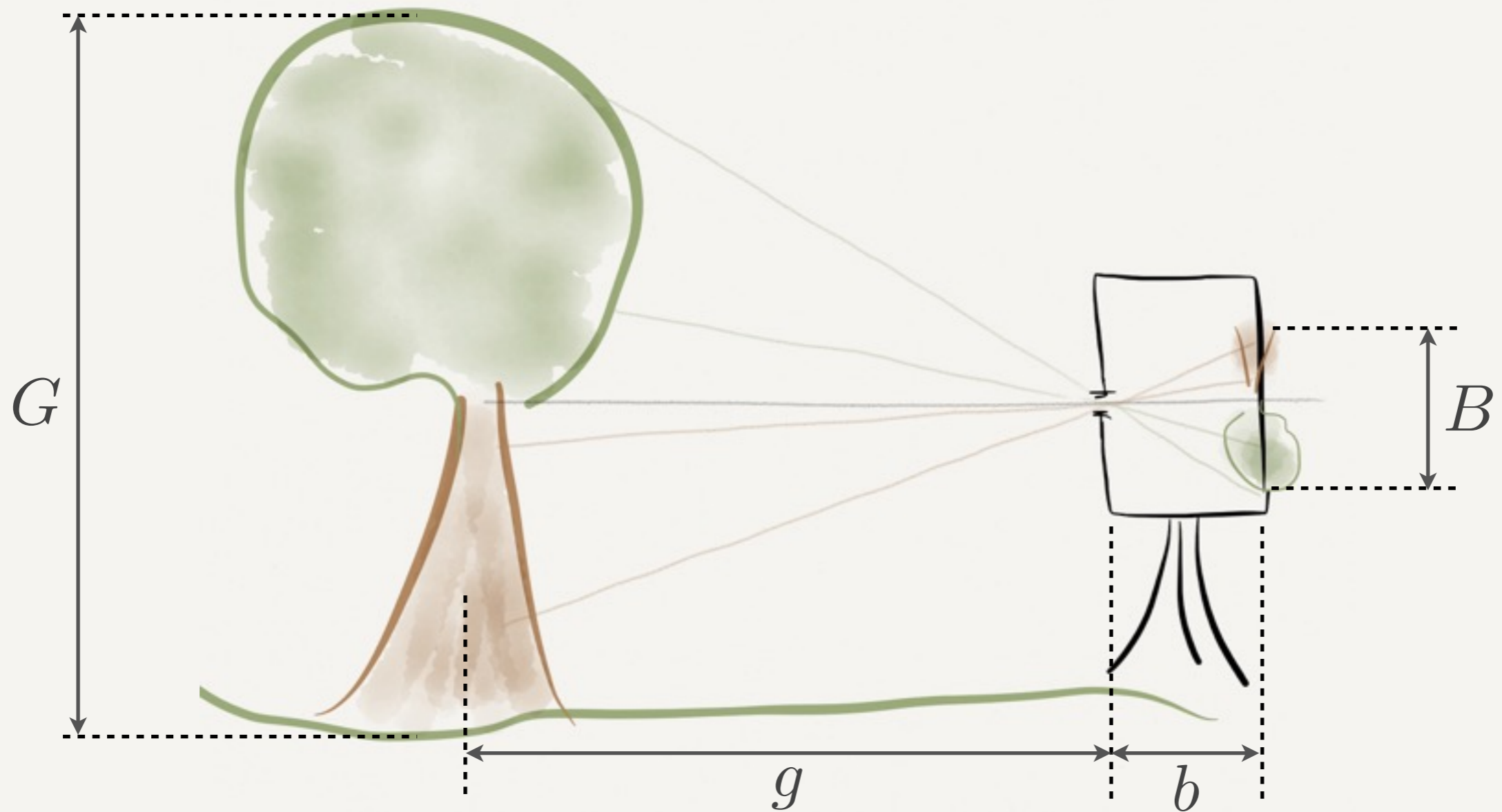
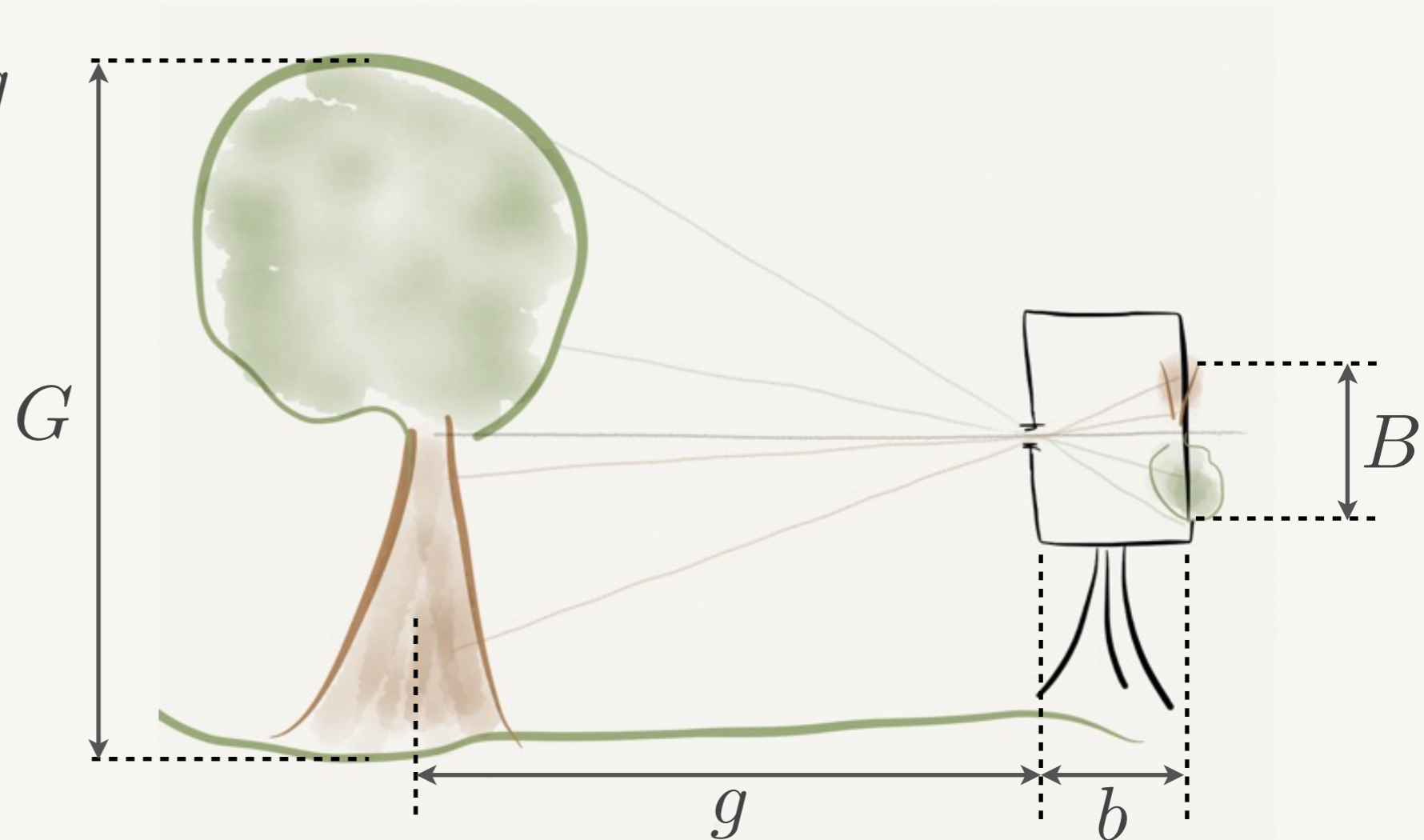


Abbildung Grundbegriffe

- Gegenstandsgröße G
- Gegenstandsweite g
- Bildgröße B
- Bildweite b
- Es gelten die Strahlensätze der Geometrie
- Abbildungsmaßstab:

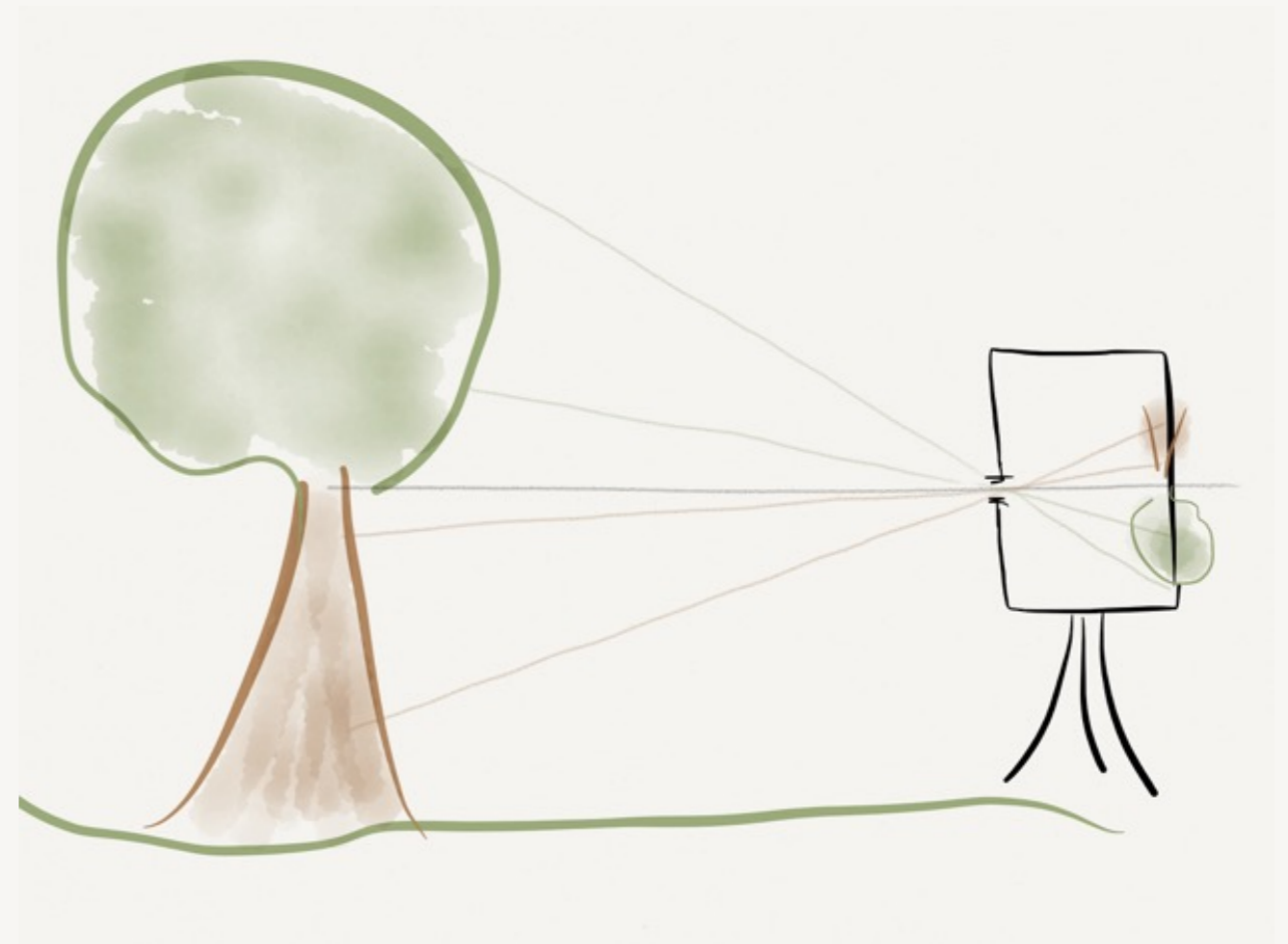
$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$



Camera Obscura

Eigenschaften

- Bild ist punktgespiegelt
- Sehr lichtschwach
- Ohne geometrische Verzerrungen

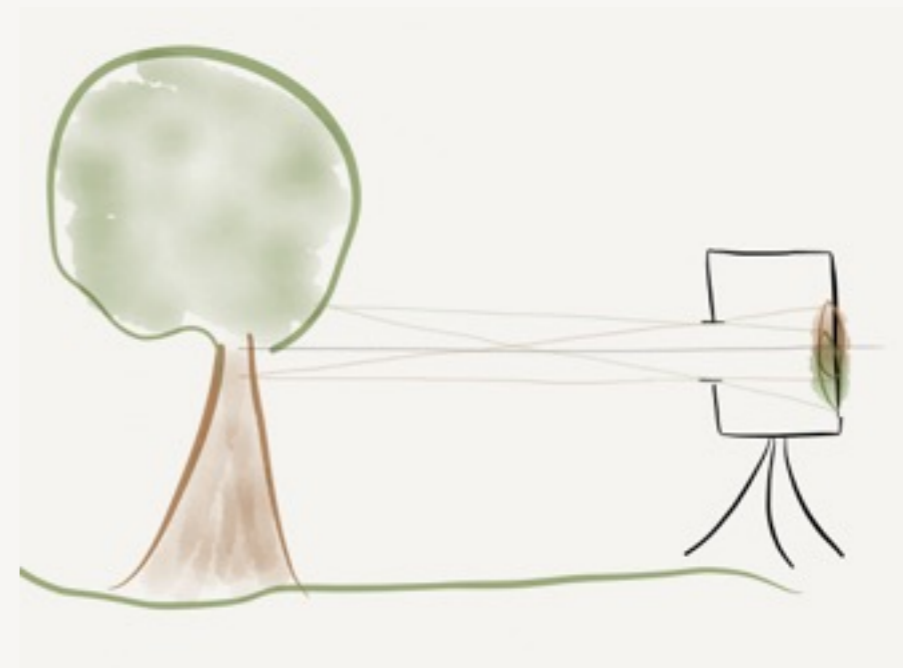
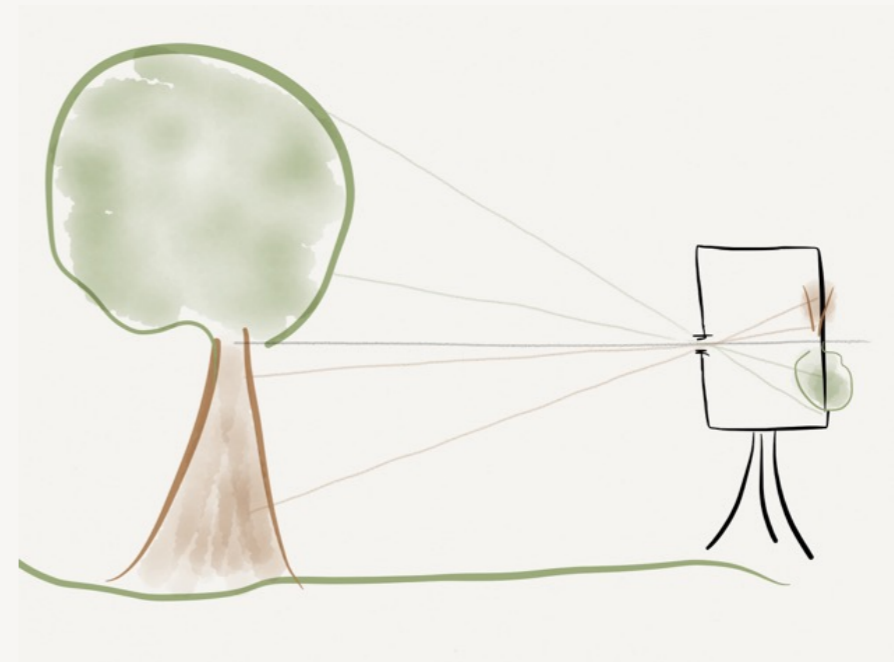


Mühlheim: Camera Obscura im Wasserturm

Kamera

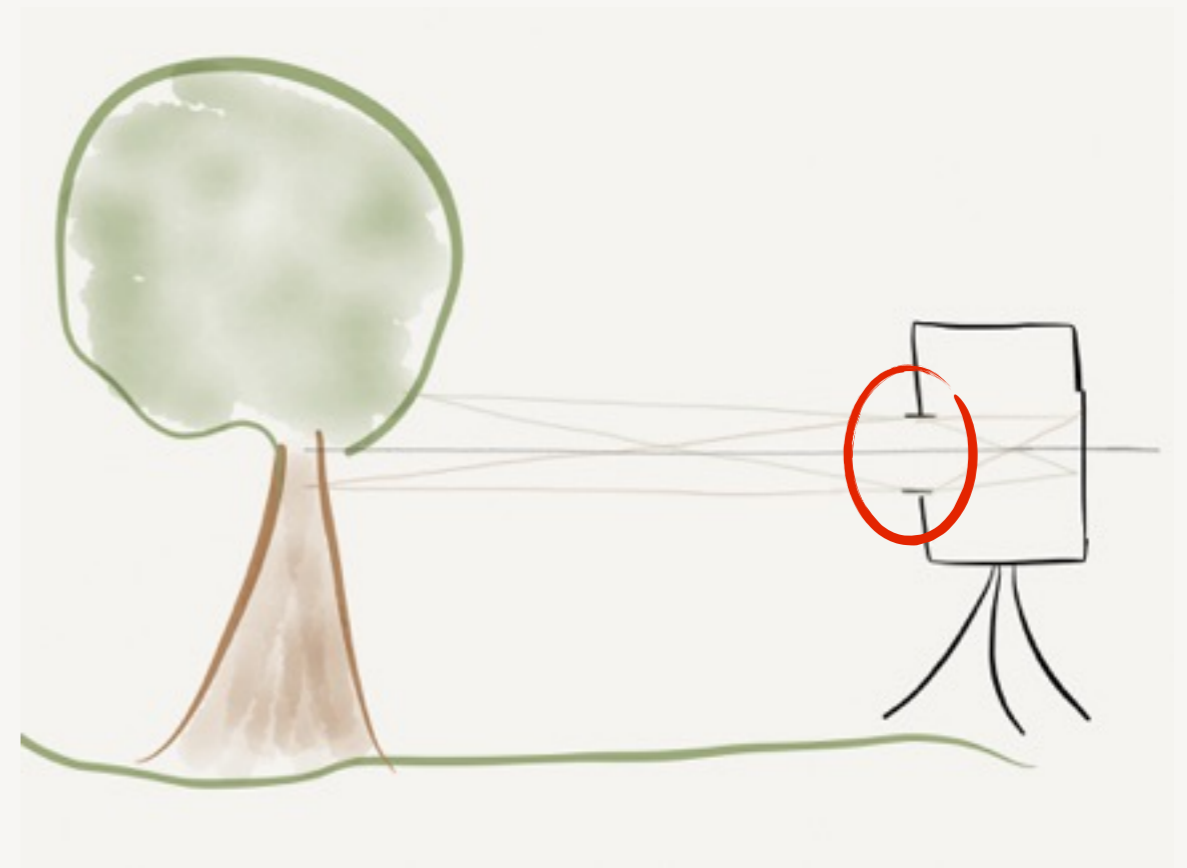
Ohne „Obscura“

- Erhöhung der Lichtstärke durch Vergrößerung der Öffnung
- Bildschärfe durch Öffnungsdurchmesser bestimmt
- Unscharfes Bild ist die Folge



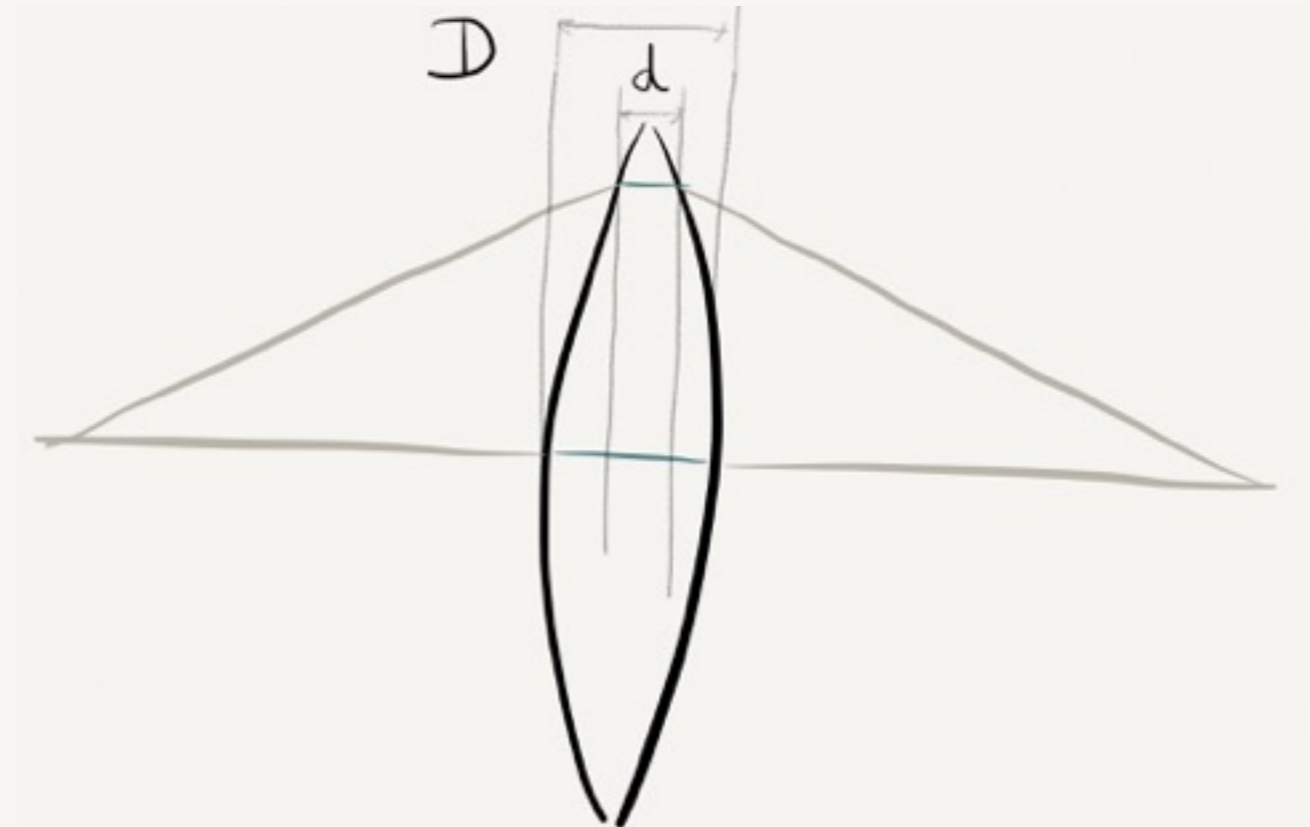
Optisches Element

- Benötigt: optisches Element, dass die Strahlen eines Objektpunktes wieder auf einen Bildpunkt zusammenführen.
- Fermat'sches Prinzip
- Alle Strahlen des selben Objektpunktes müssen die gleiche Zeit benötigen.



Linse

- Lichtwellen können nur verlangsamt werden, nicht beschleunigt
- Die kürzeste Strecke in der Mitte benötigt die größte Verlangsamung
- Zum Rand hin immer weniger Verlangsamung notwendig
- Alle Strecken müssen die gleiche optische Pfadlänge haben

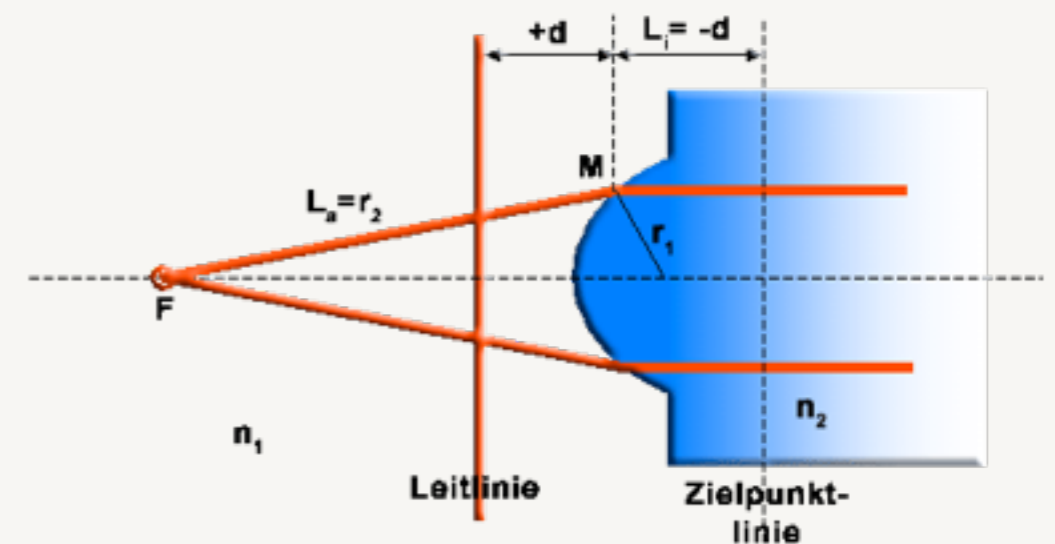
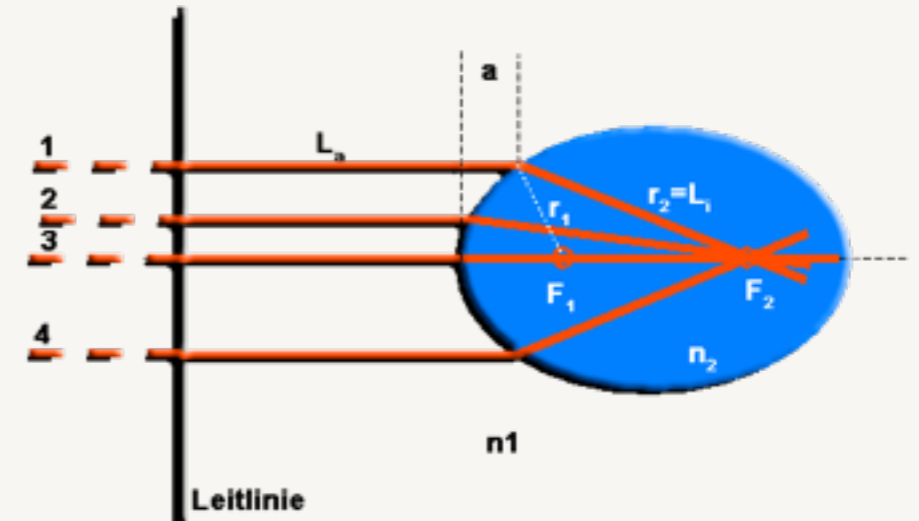


Fokussierung

Linseform

Asphärisch und sphärisch

- Nach Fermat'schen Prinzip:
 1. Parallele Strahlen, Linse: Ellipse
 2. Divergente Strahlen, Linse: Hyperbel
 3. Parallele Strahlen, Spiegel: Parabel
- Diese Flächenformen werden unter **asphärisch** zusammengefasst
- Es gibt keine Form, die gleichzeitig für alle Situationen perfekt funktioniert!
- In der Praxis werden (fast) immer Kugelflächen genommen, also **sphärische** Formen
- Sphärische Formen führen zu Abbildungsfehler

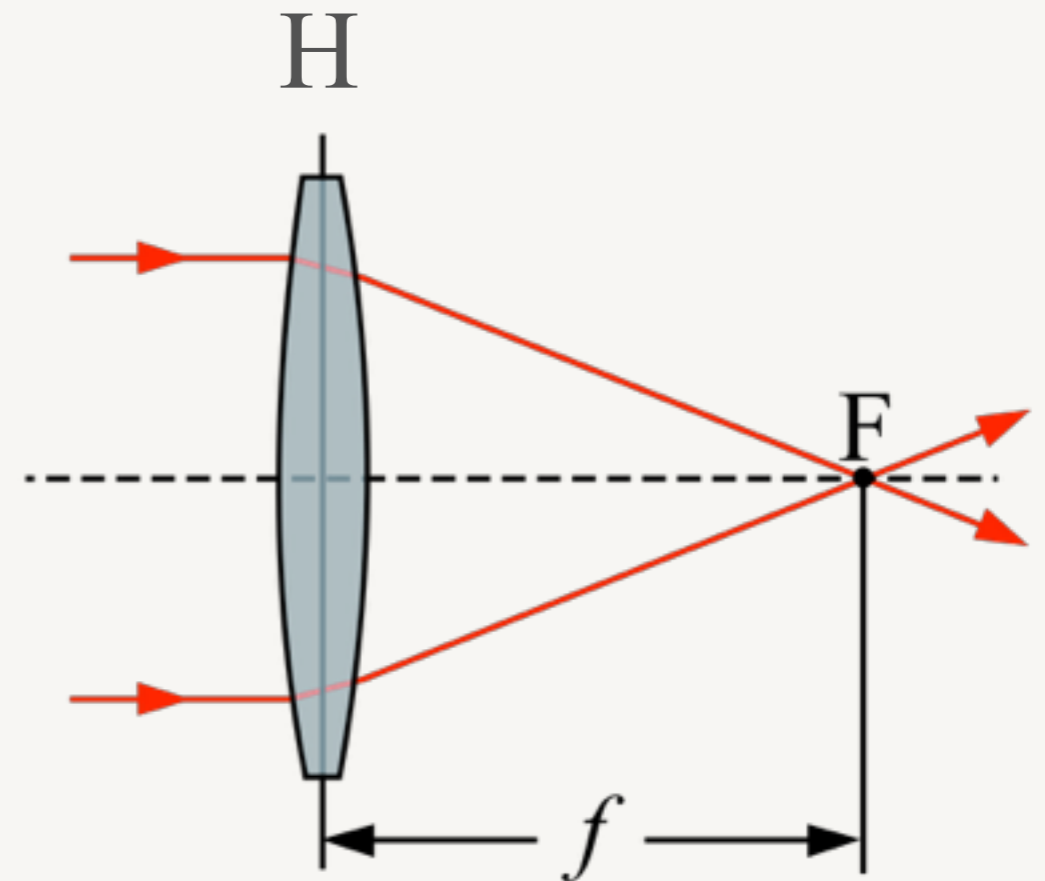


Bilder mit freundlicher Genehmigung von
R. Rodloff, geometrische-optik.de:
Linseform

Dünne Linse

Brennweite

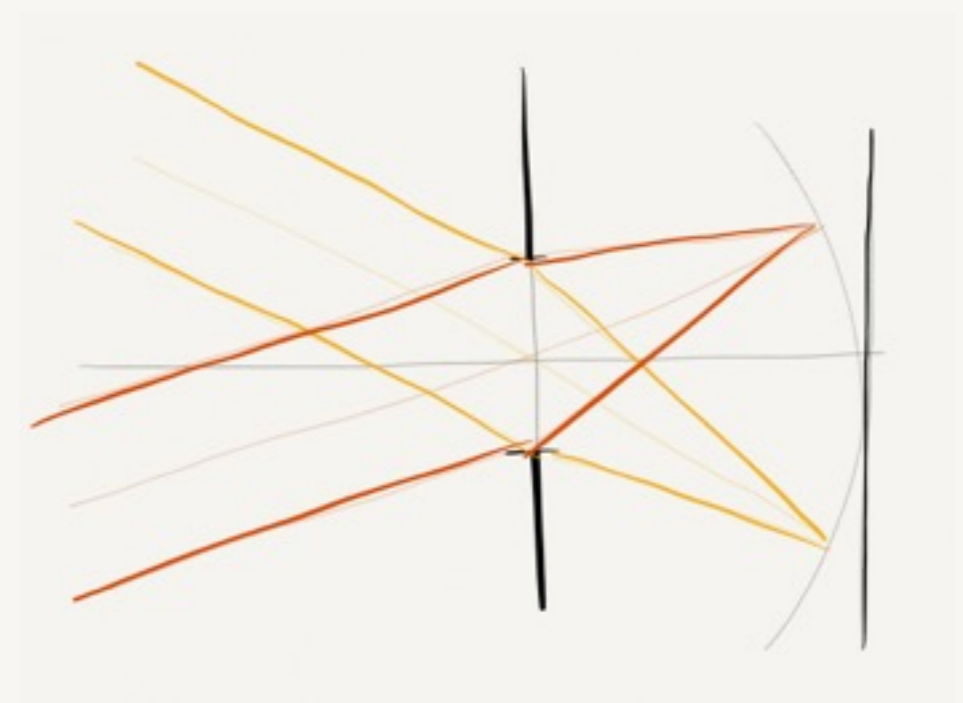
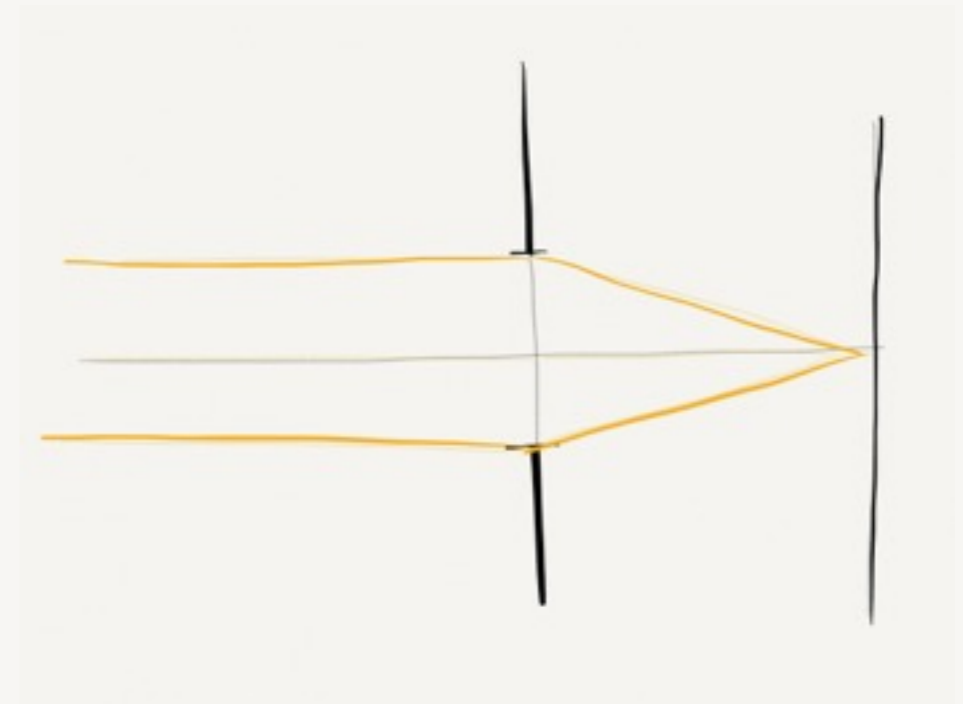
- Die Brechung an zwei Flächen wird auf eine einzige Brechung an der **Hauptebene** (engl. *principal plane*) reduziert.
- Es gibt immer zwei Hauptebenen, dazu später mehr
- Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse werden auf einen **Brennpunkt F** Punkt abgebildet (engl. *focal point*)
- Der Abstand zwischen der Hauptebene und dem Brennpunkt nennt man **Brennweite** (engl. *focal length*).



Dünne Linse

Parallele Strahlen und Bildfeldwölbung

- Parallel Strahlen werden immer auf einen Punkt abgebildet.
- Unterschiedliche Einfallswinkel werden an unterschiedlichen Orten abgebildet.
- Im Allgemeinen liegen alle Abbildungspunkte auf einer gekrümmten Fläche.
- Diese Fläche bzw. die Abweichung der Fläche von einer Ebene nennt man **Bildfeldwölbung** (engl *field curvature*).



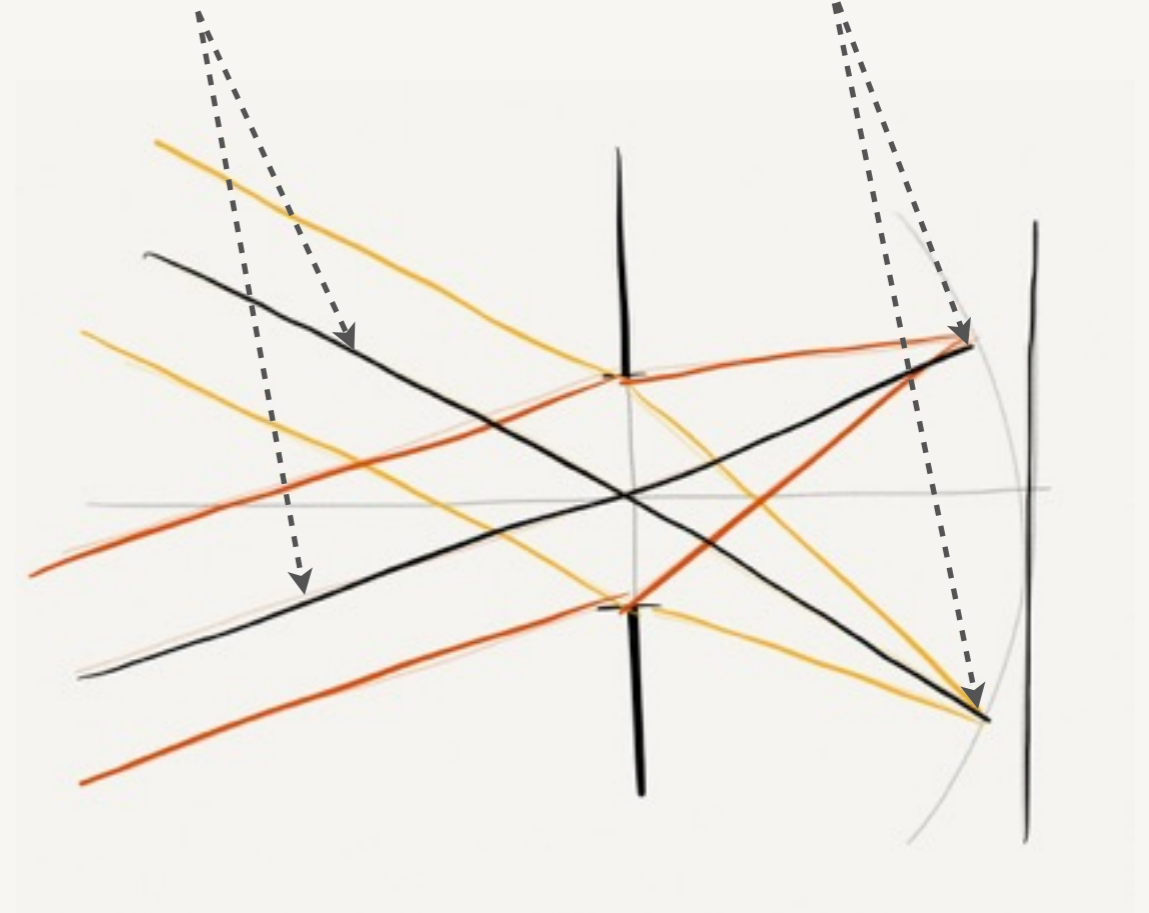
Dünne Linse

Parallele Strahlen und Bildfeldwölbung

- Parallel Strahlen werden immer auf einen Punkt abgebildet.
- Die Richtung der Abbildung ist wie bei der Camera Obscura, d.h. der Strahl durch die Mitte der Apertur gibt die Richtung vor.
- Der Schnittpunkt mit den Randstrahlen bestimmt den Ort auf der Bildfeldwölbung.

Richtung / Winkel

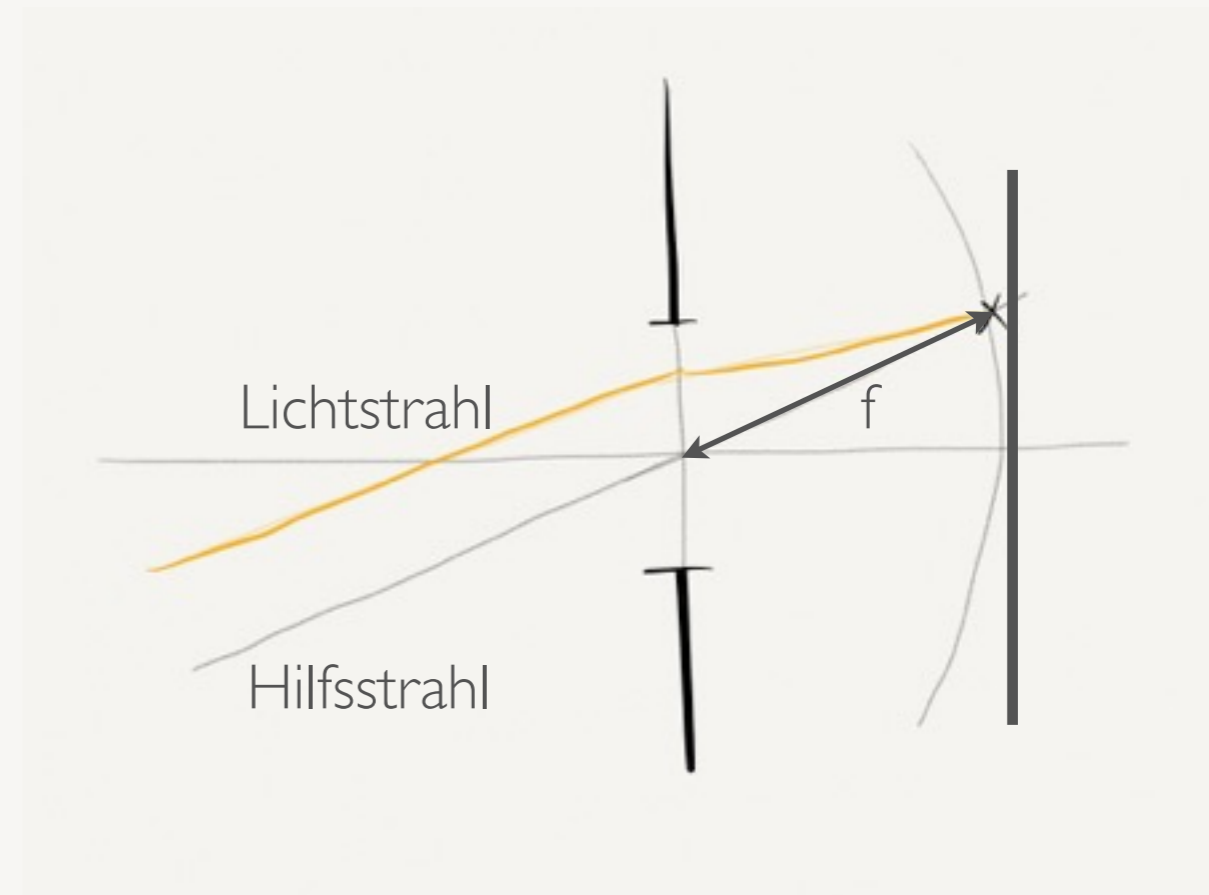
Ort



Dünne Linse

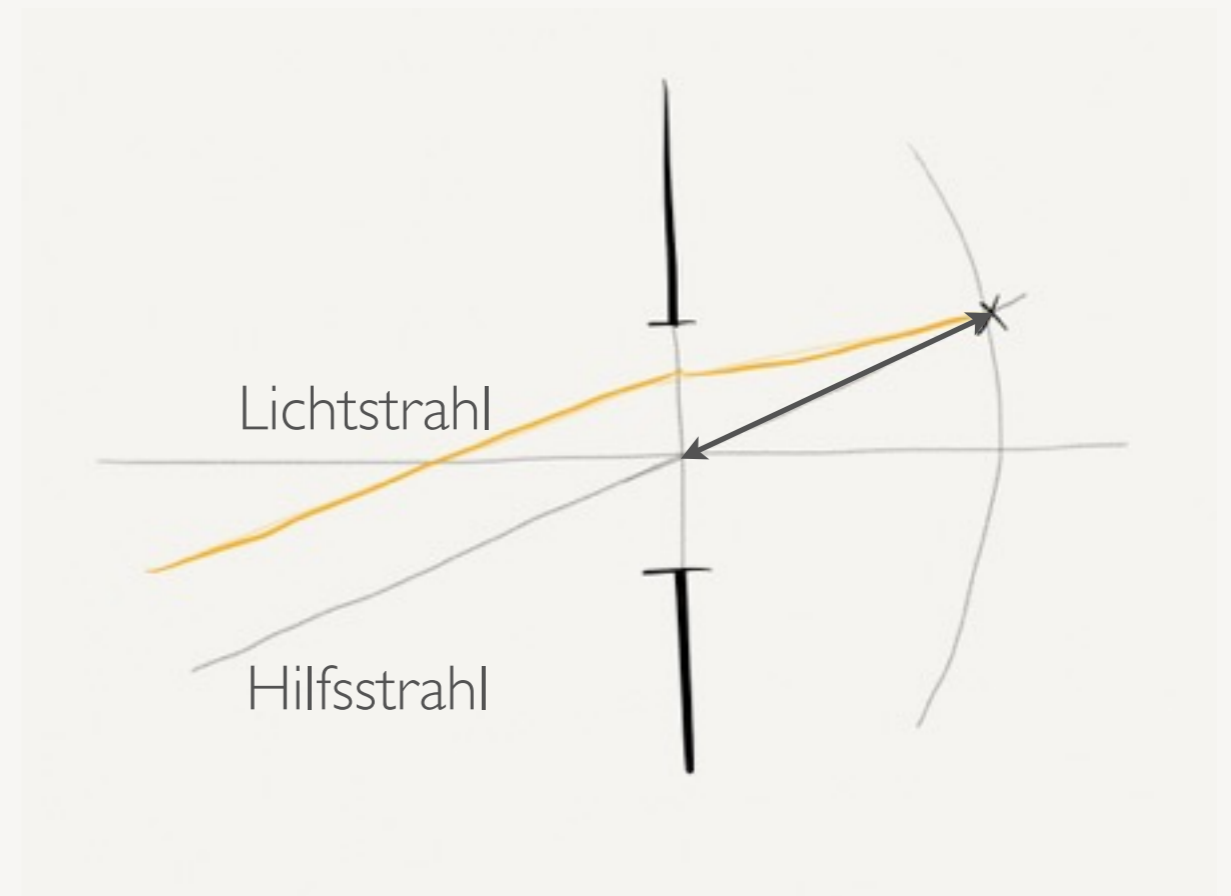
Abbildung eines beliebigen Strahls

- Ein Strahl kommt irgendwo in der Apertur unter irgendeinem Winkel an.
- Als Hilfsstrahl wird der dazu parallele Strahl konstruiert, der durch die Mitte der Apertur geht.
- Im Abstand der Brennweite liegt der Bildpunkt auf dem Hilfsstrahl.
- Alternativ kann der Schnittpunkt mit einer Bild-Ebene gebildet werden, die den Abstand f zur Linse hat.



Aufgabe

- Konstruieren Sie für einen beliebigen Lichtstrahl den Auftreffpunkt auf einem Bildsensor.

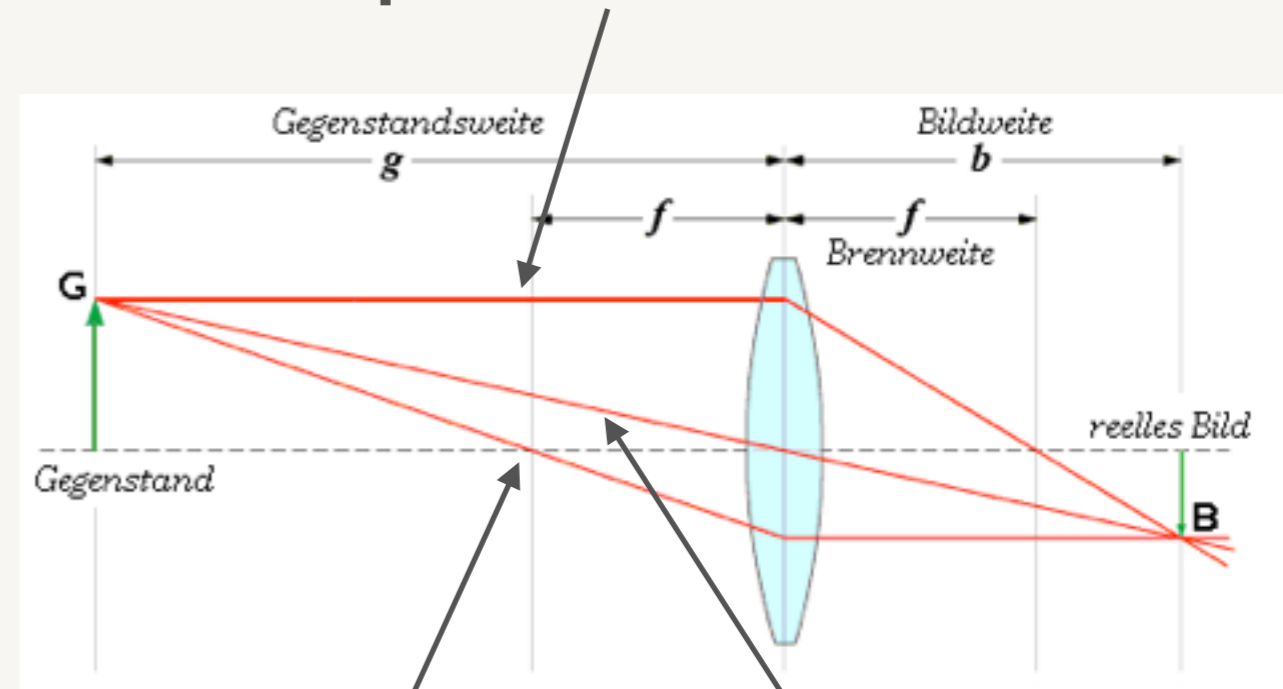


Dünne Linse

Bildkonstruktion bei endlicher Entfernung

1. **Zentralstrahl** vom Objektpunkt durch die Mitte der Linse
2. **Achsenparalleler Strahl** vom Objektpunkt parallel zur optischen Achse => durch den bildseitigen Brennpunkt
3. **Brennpunktstrahl** durch den objektseitigen Brennpunkt => bildseitig parallel zur optischen Achse
4. Schnittpunkt = Bildpunkt

Achsenparalleler Strahl



Zentraler Strahl

Brennpunktstrahl

Linse

Linse

Linse

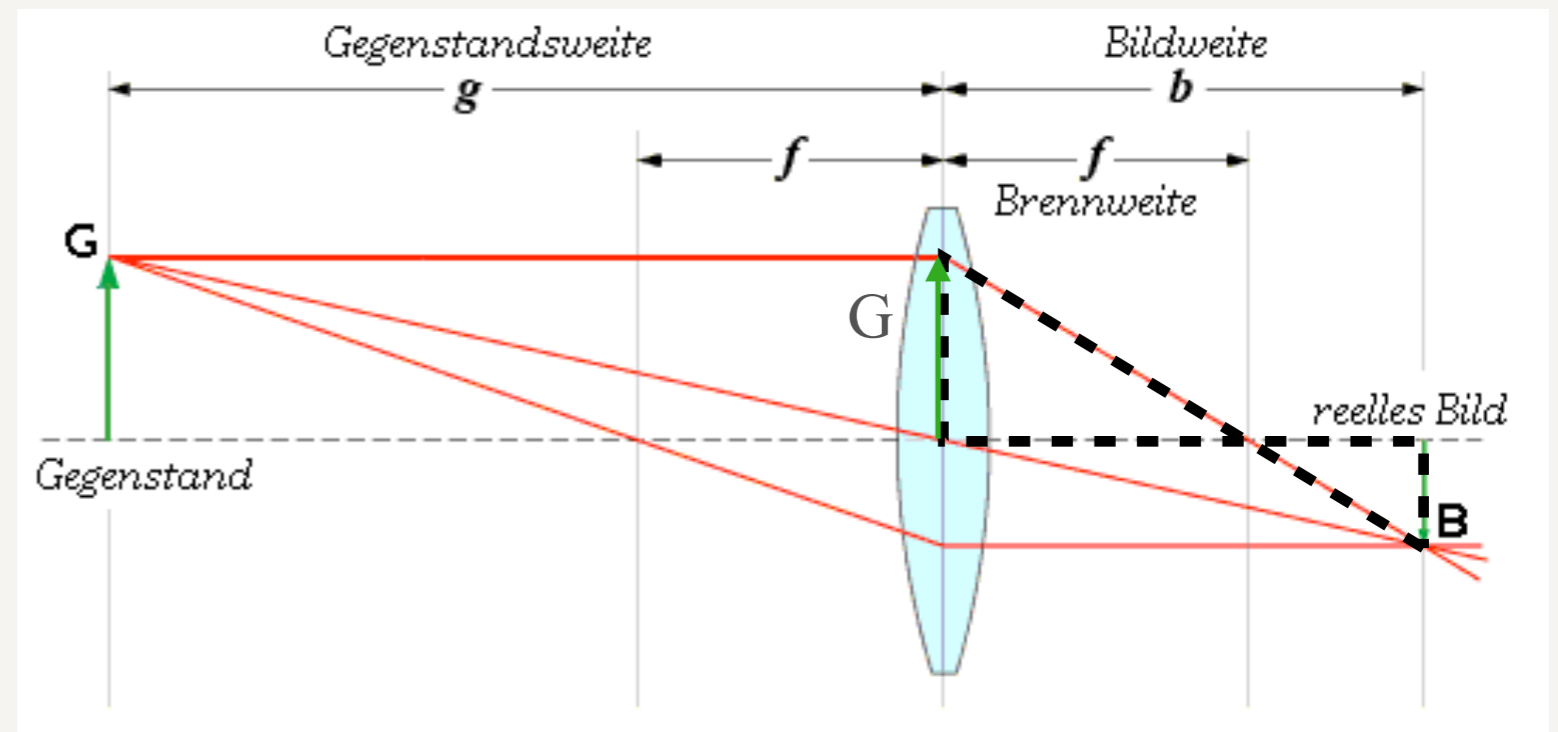
Abbildungsmaßstab:

$$A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

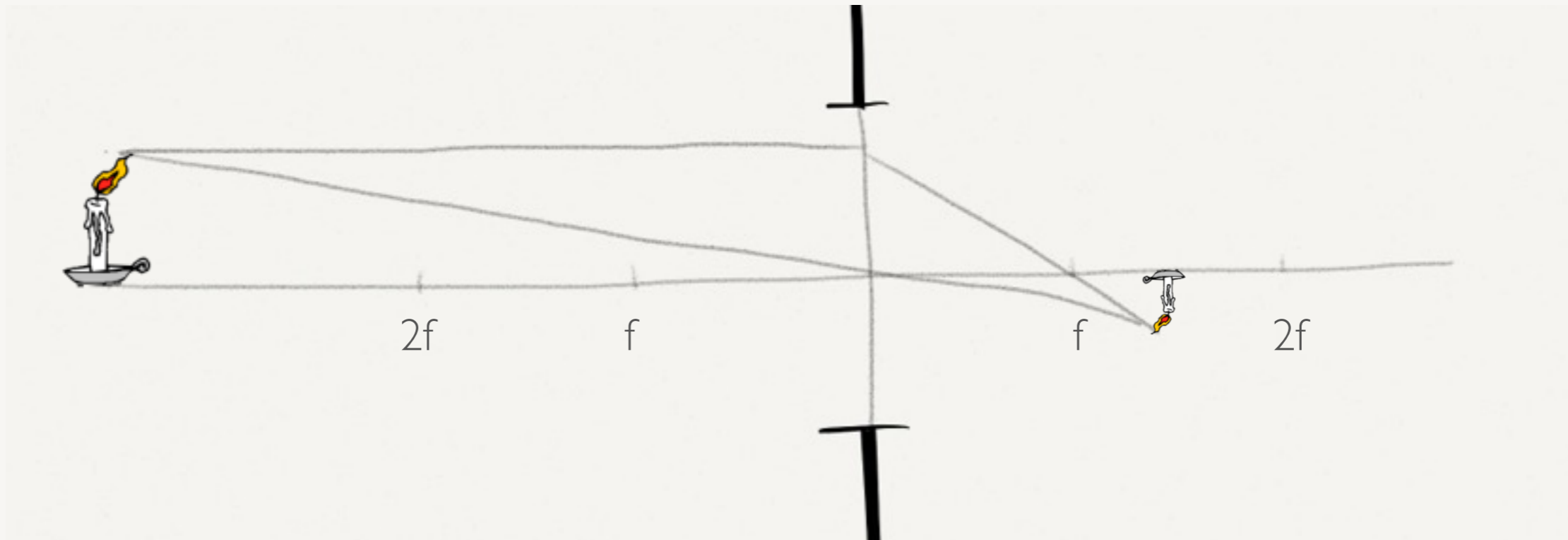
Strahlensatz:

$$\frac{B}{G} = \frac{b - f}{f} = \frac{b}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

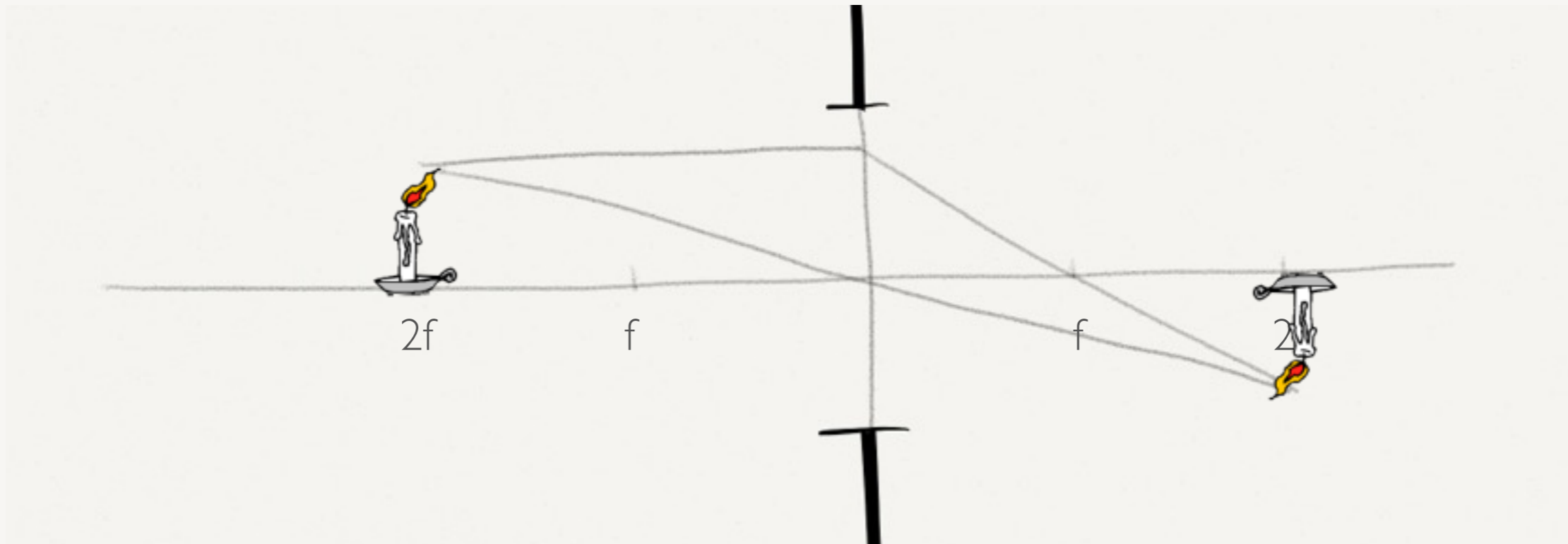


Verkleinerung



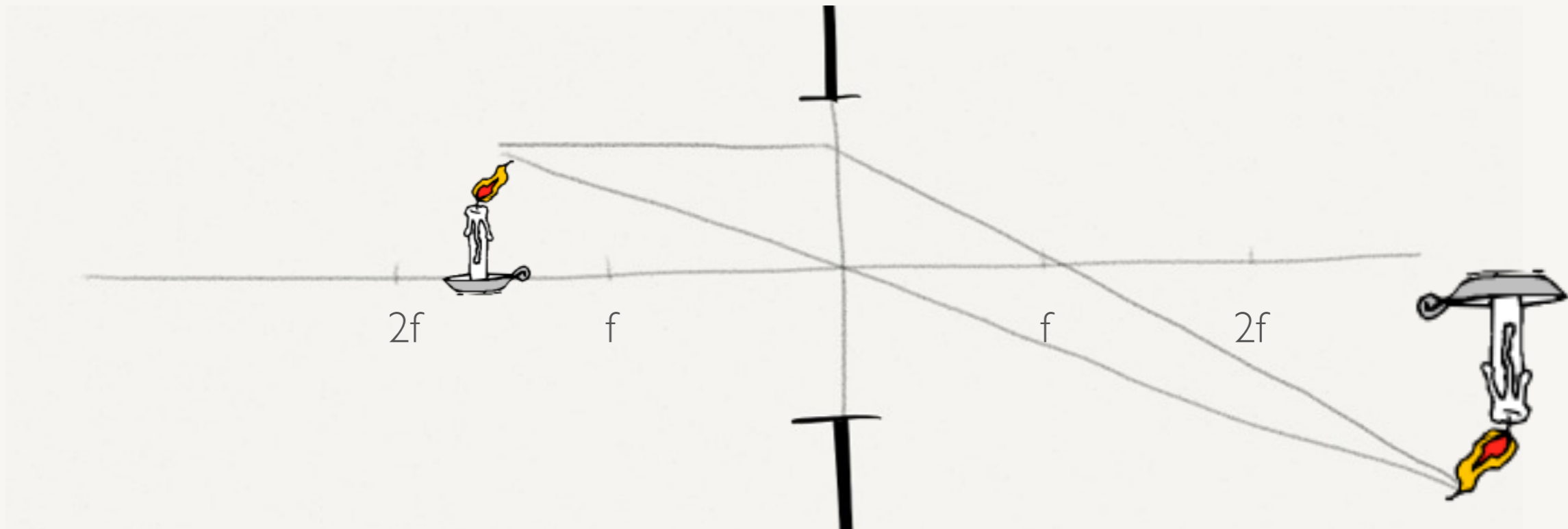
- $G > 2f$
- Abbildung ist reell und verkleinert

1:1 Abbildung



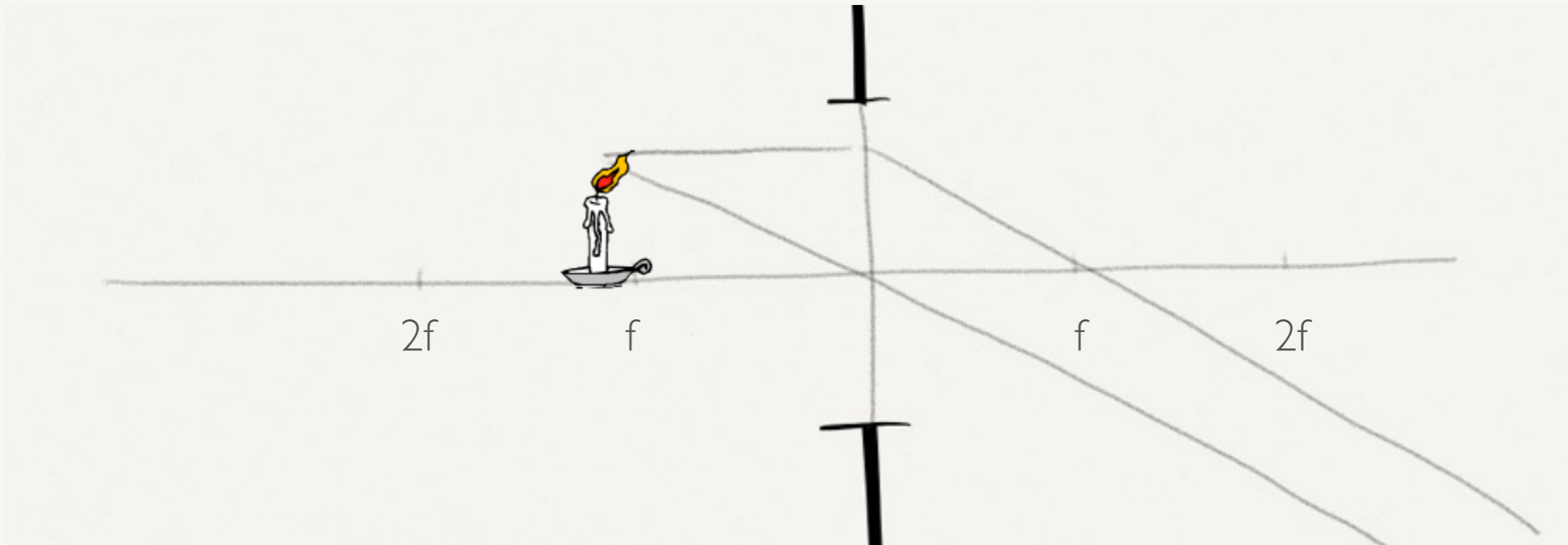
- $G = 2f$
- Abbildung ist reell und genauso groß wie das Objekt

Vergrößerung



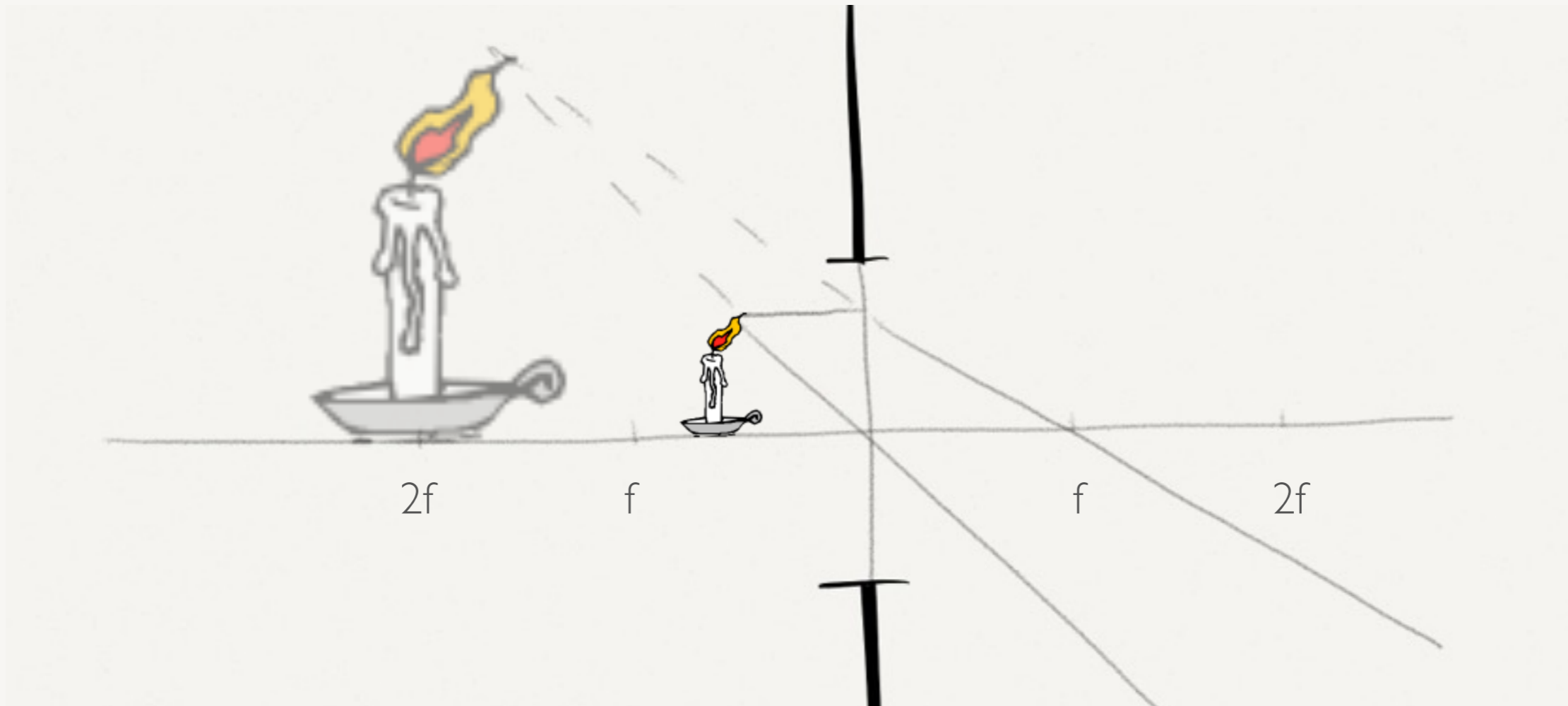
- $2f > G > f$
- Abbildung ist reell und vergrößert

Kein Bild



- $G = f$
- Die Strahlen verlaufen parallel, es gibt kein Bild

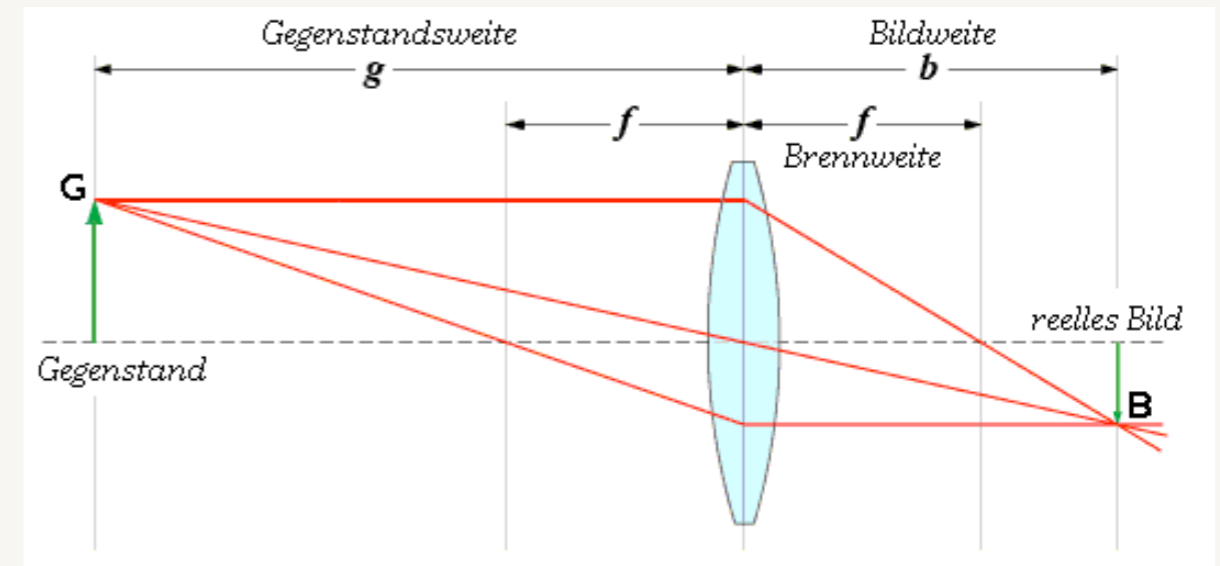
Virtuelles Bild



- $G < f$
- Abbildung ist virtuell und vergrößert und aufrecht

Aufgabe

- Ihre Kamera hat eine Brennweite von 50 mm. Sie stellen erst auf eine Blume scharf, die einen Abstand von 10 cm hat. Danach nehmen Sie den ganzen Garten auf und stellen auf den Baum scharf, der 10 m entfernt ist. Vergleichen Sie die Bildweiten: welchen Weg muss das Objektiv dabei zurücklegen?



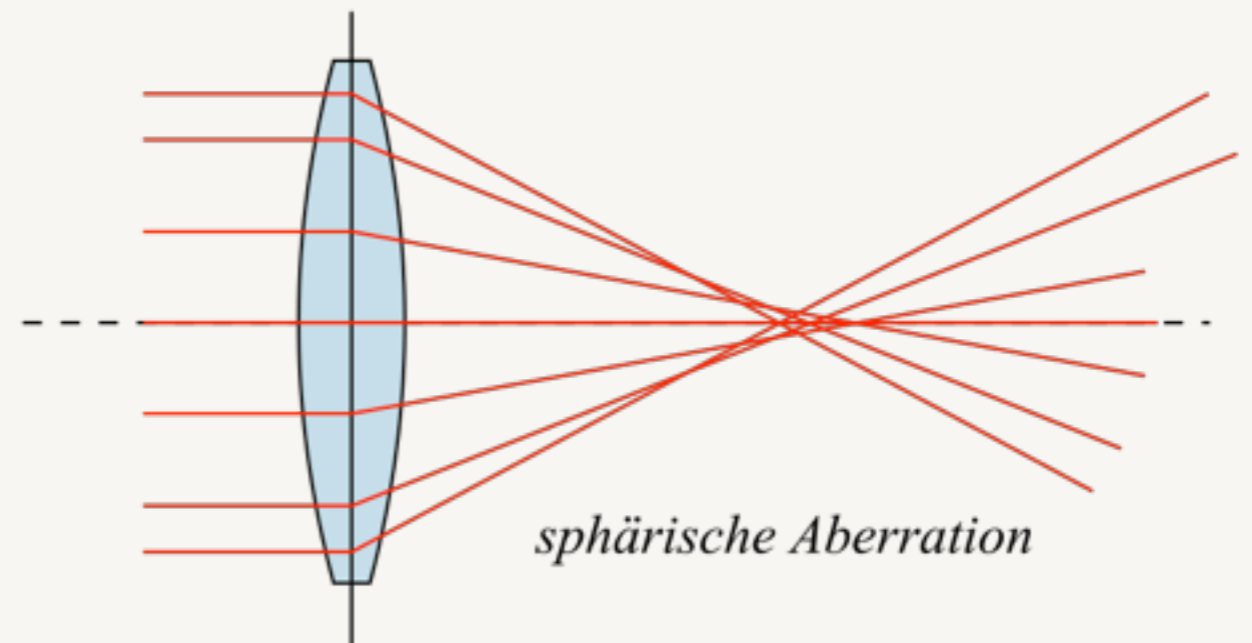
$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Abbildungsfehler

Abbildungsfehler

Sphärische Aberration

- Ideale Form ist je nach Typ asphärisch
- Bei Linsen mit sphärischen Oberflächen werden deswegen nicht alle Strahlen auf den Brennpunkt fokussiert
- Je weiter die Strahlen von der optischen Achse sind desto größer ist die Abweichung
- Verursacht Unschärfe
- Gegenmaßnahmen:
Linsenkombinationen oder asphärische Linsen

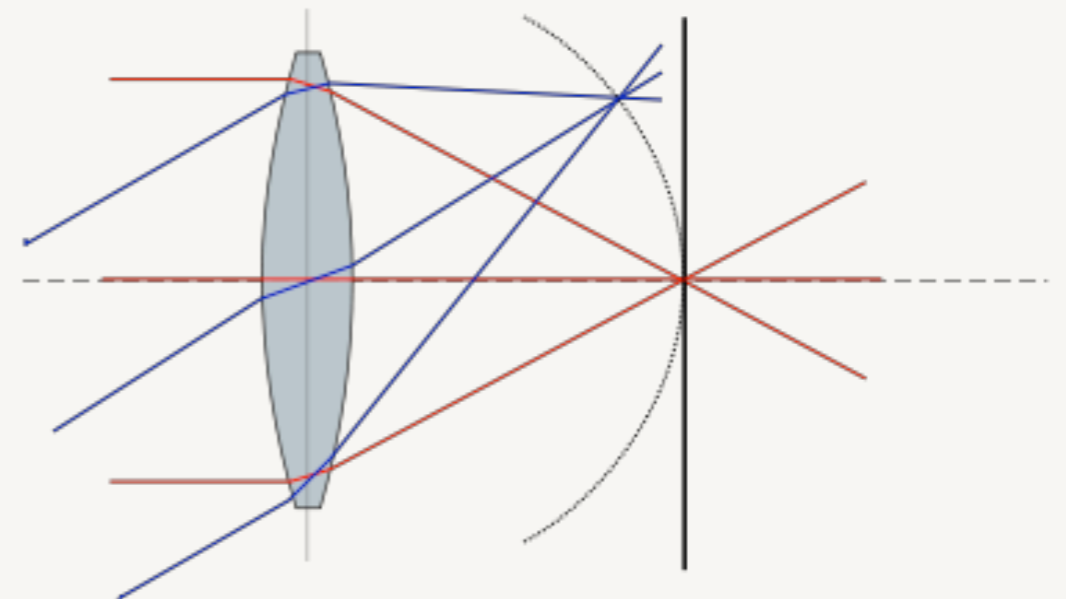


Wikipedia

Abbildungsfehler

Bildfeldwölbung

- Eigentlich kein Fehler sondern eine physikalische Eigenschaft
- Deswegen ist die Netzhaut im Auge auf einer gekrümmten Fläche.
- Verursacht Unschärfe
- Kann in Objektiven durch Linsenkombinationen verringert werden.

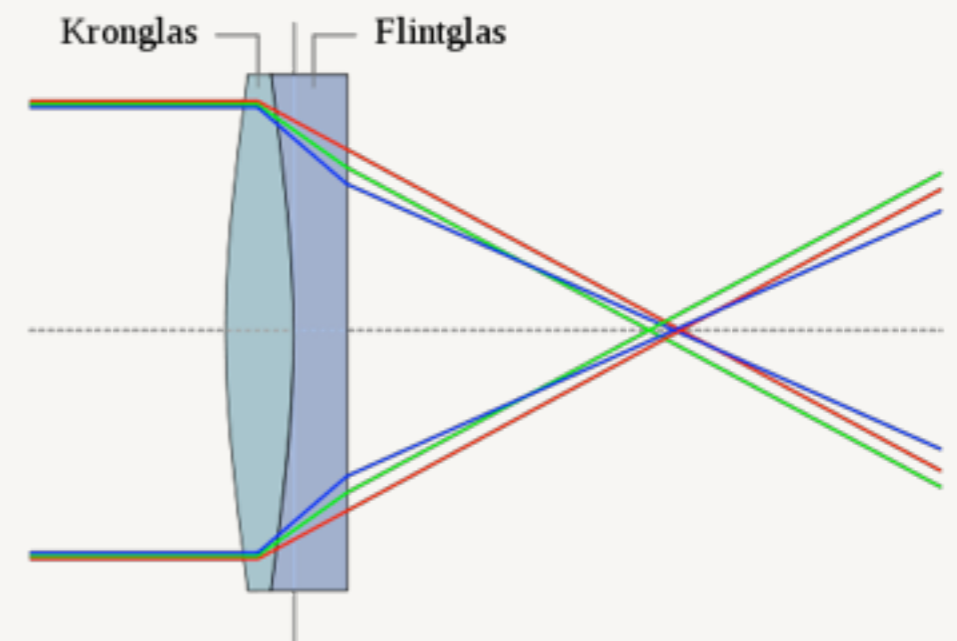
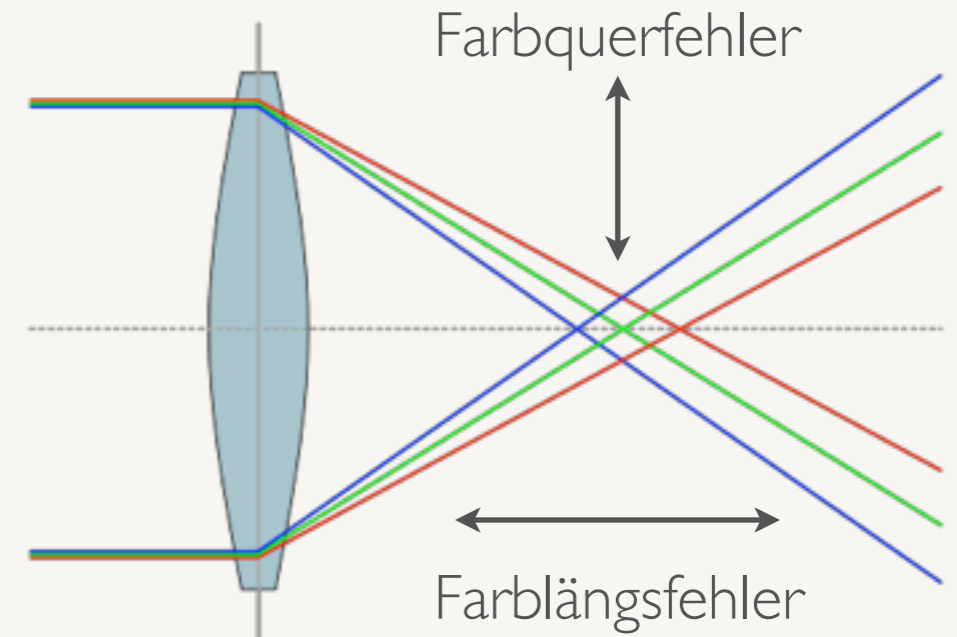


Wikipedia

Abbildungsfehler

Chromatische Aberration

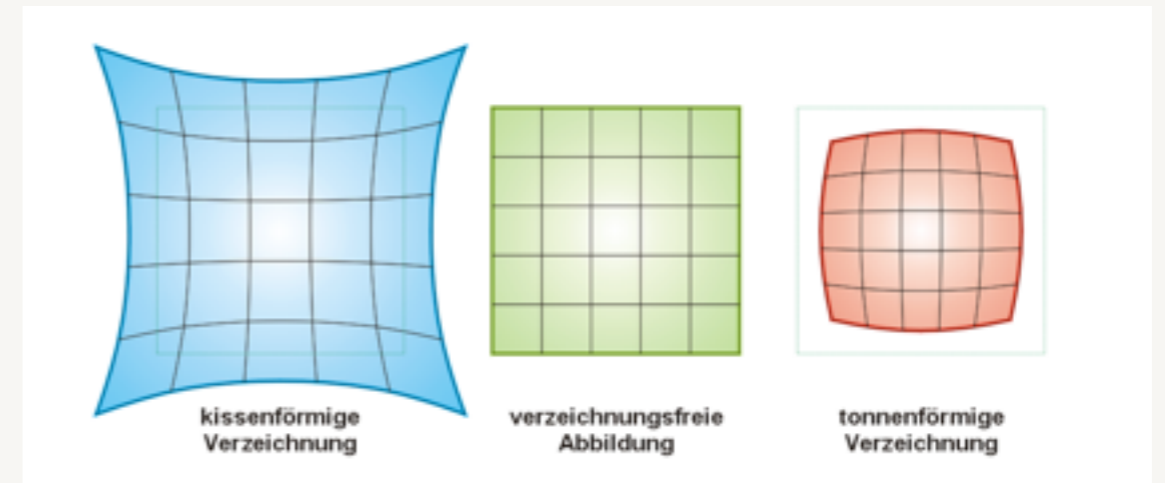
- Der Brechungsindex hängt von der Wellenlänge des Lichts ab - Dispersion
- Dadurch ändert sich die Brechkraft
- Der Fokus ist für unterschiedliche Wellenlängen an unterschiedlichen Stellen.
- Verursacht Unschärfe und Farbsäume
- Man unterscheidet zwischen Farblängsfehlern und Farbquerfehlern
- Gegenmaßnahme: Kombination zweier Linsen mit unterschiedlicher Brechzahl (Achromat)



Wikipedia

Abbildungsfehler Verzeichnung

- Rotationssymmetrische Fehler
- Änderung der Vergrößerung nimmt zum Rand hin zu
- Objektiv-Eigenschaft
- Verursacht geometrische Verzerrungen
- Kann numerisch teilweise durch Entzerrung kompensiert werden

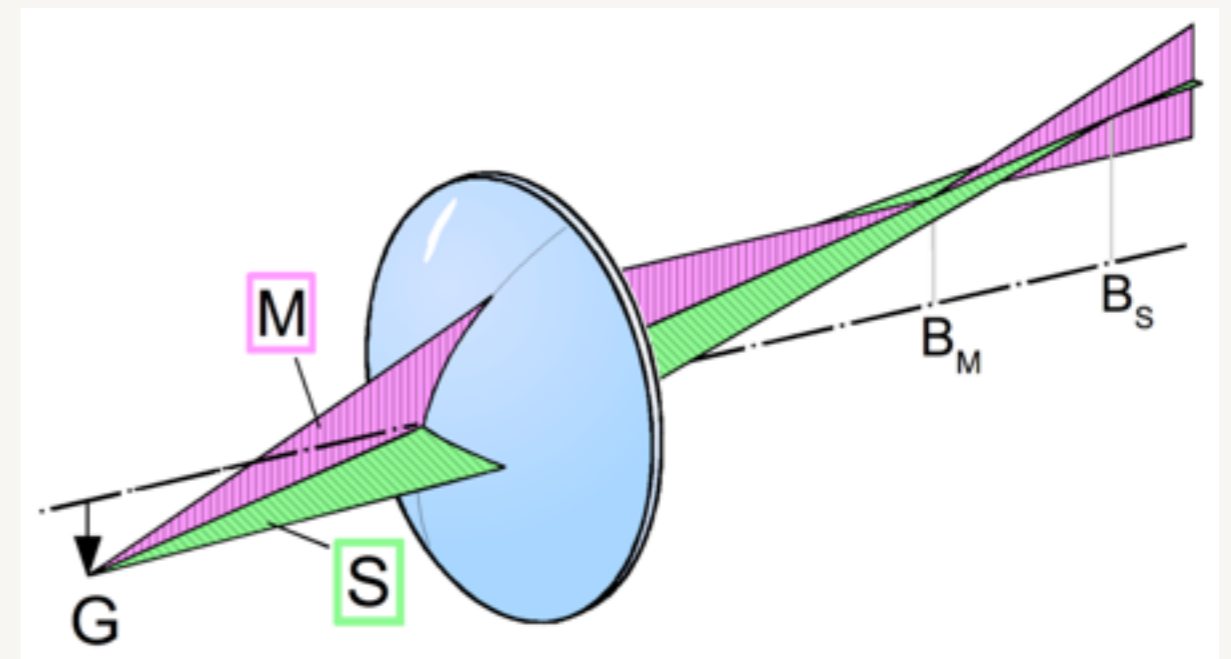


Wikipedia

Abbildungsfehler

Astigmatismus

- Unterscheidung zwischen sogenannter Meridional- und Sagittal-Ebene.
- Bei schrägem Durchgang des Lichtes durch die Linse können sich die Brennpunkte für die meridionale und die sagittale Richtung an unterschiedlichen Stellen befinden.
- Verursacht Unschärfe



[Wikipedia](#)