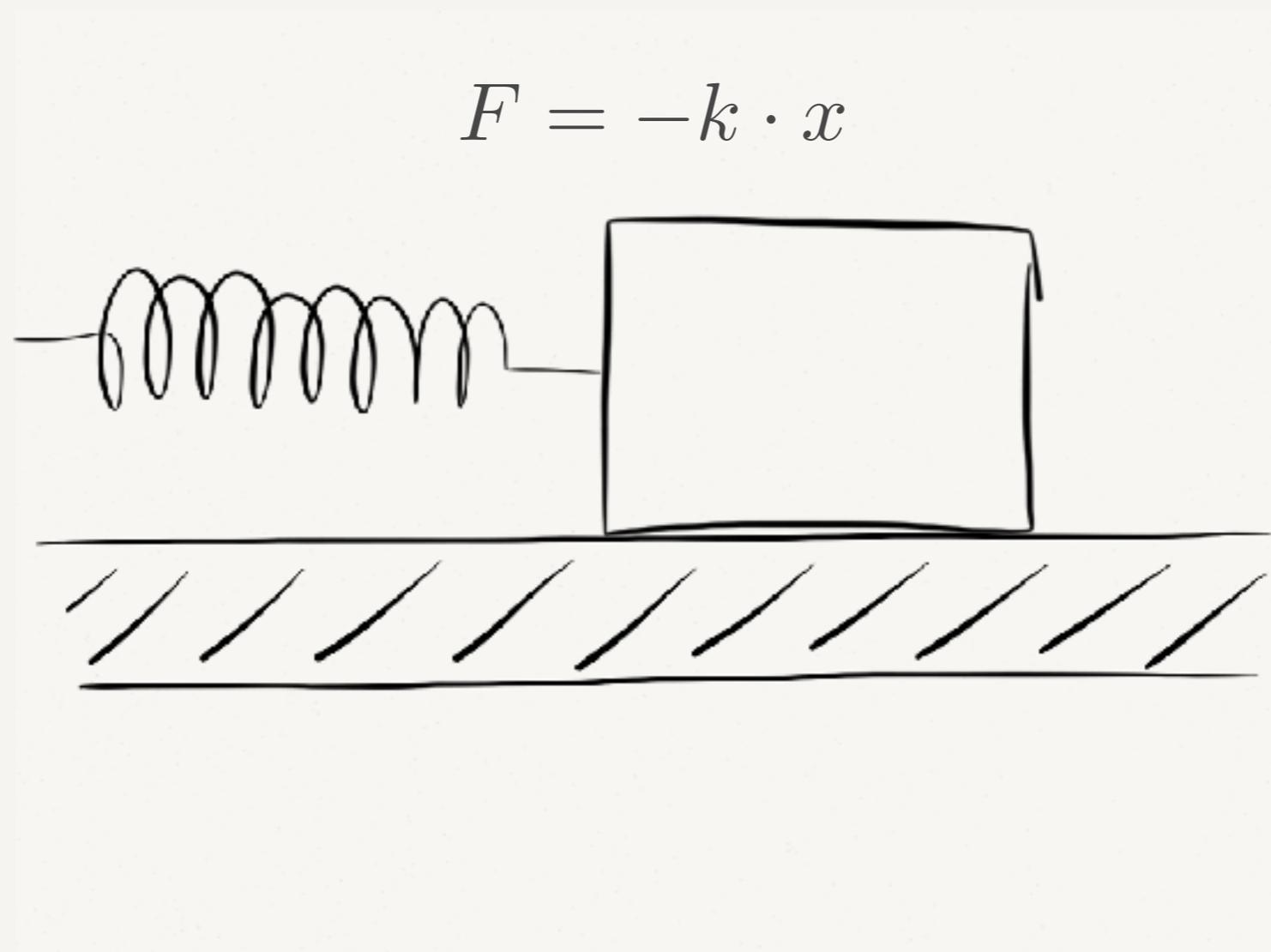


Arbeit bei variabler Kraft

Was passiert wenn sich F in $W = Fx$ ständig ändert?



Arbeit bei variabler Kraft

$$W = \int F dx$$

Arbeit bei variabler Kraft

$$F = -k \cdot x$$

$$W = \int F dx$$

$$W = \int F dx$$

$$= \int (-k \cdot x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} k x^2$$

$$E_{\text{pot}} = -W$$

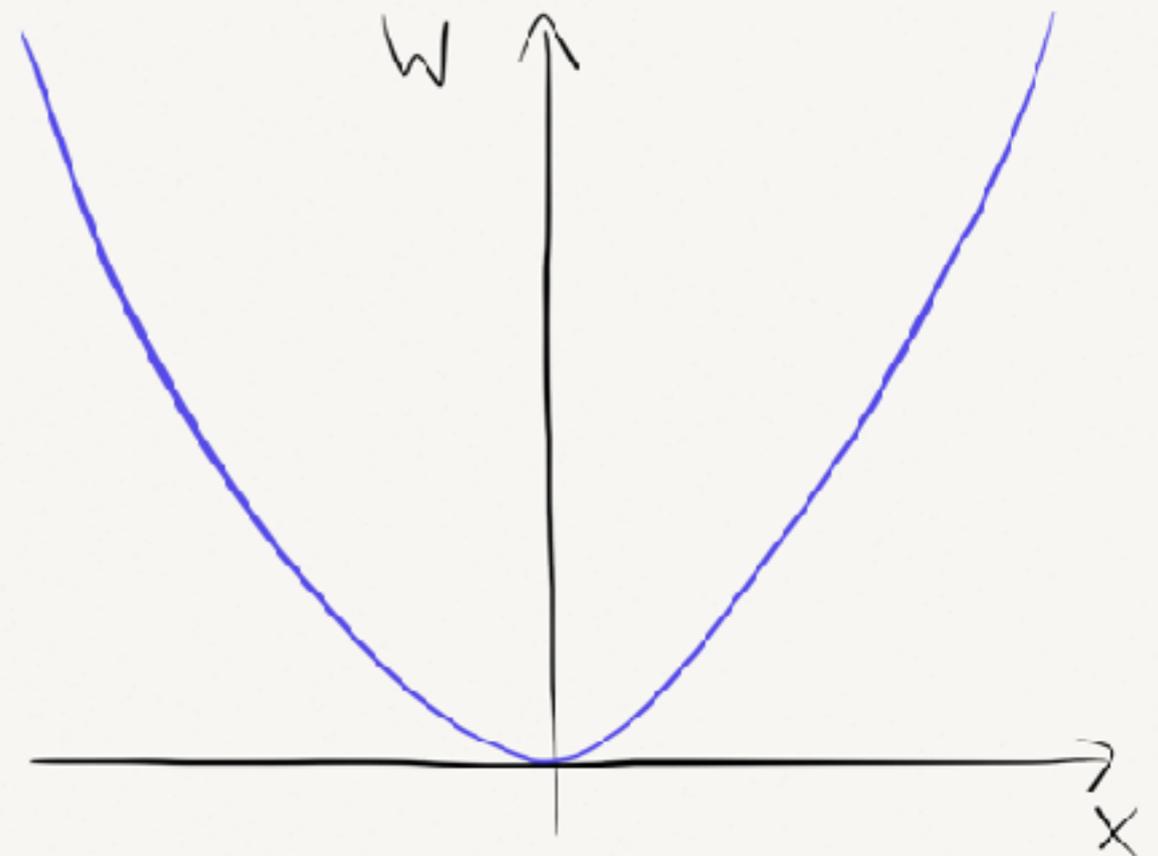
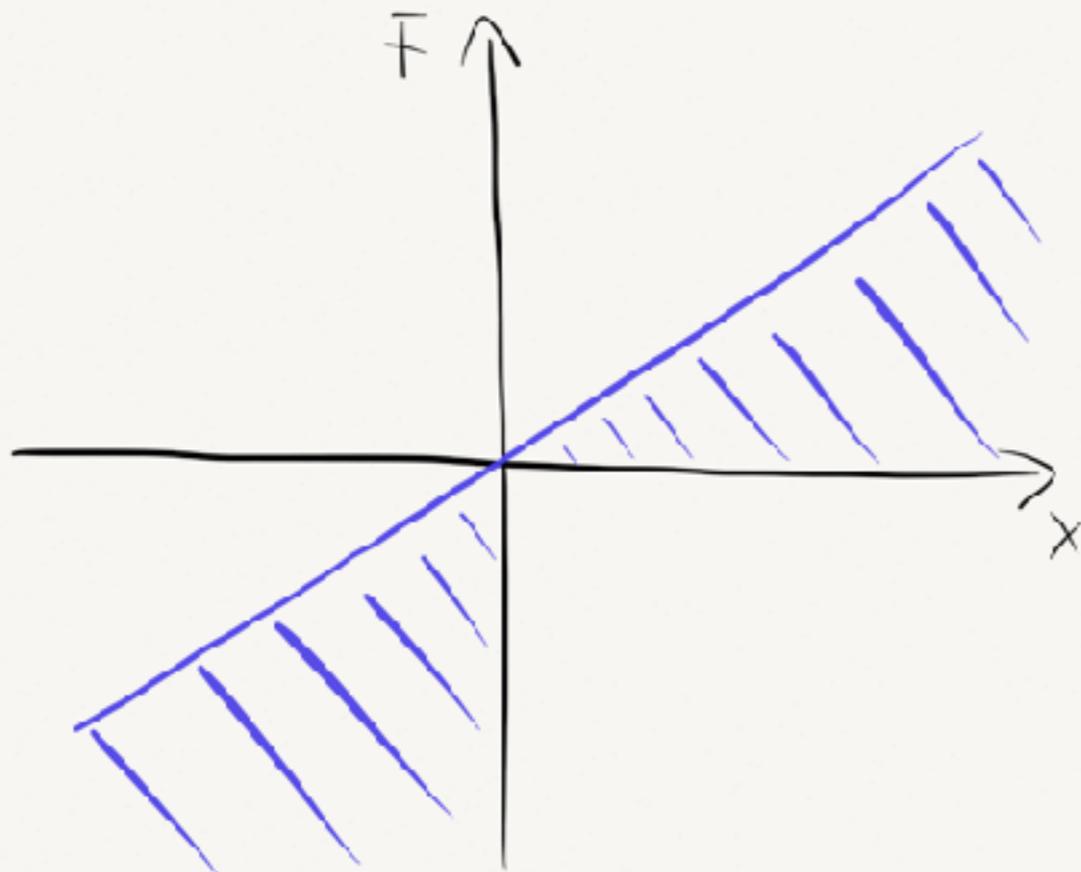
$$= \frac{1}{2} k x^2$$

Variable Kraft und Energie

Hooke'sches Gesetz

$$F = -k \cdot x$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x^2$$

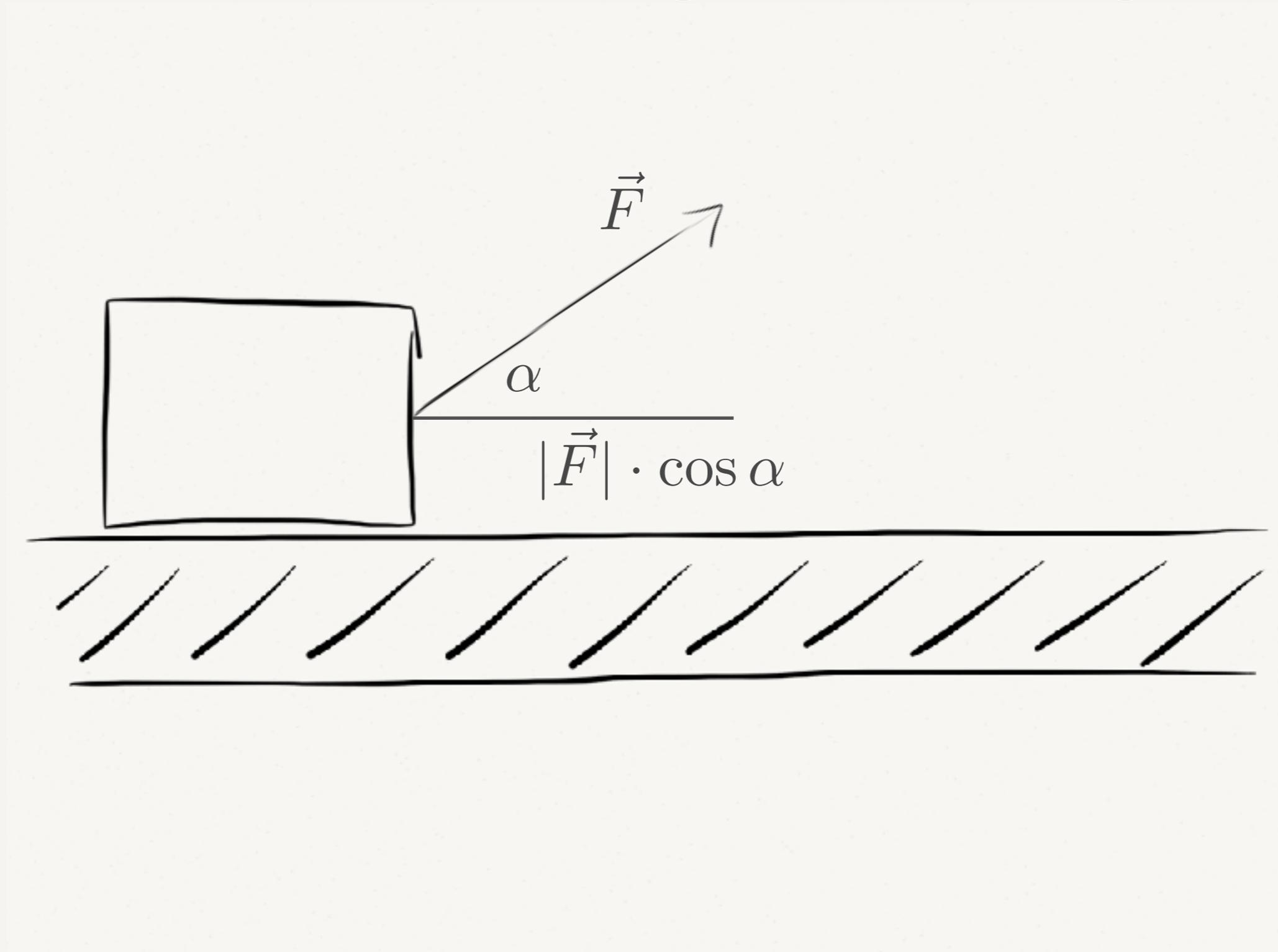


Arbeit vektoriell

- Um Arbeit im dreidimensionalen Raum zu definieren muss eine vektorielle Form gewählt werden.
- Das Skalarprodukt von F und x gibt die Arbeit an und muss über die gesamte Strecke integriert werden.
- Nur der Anteil von F in Richtung x wird gezählt!

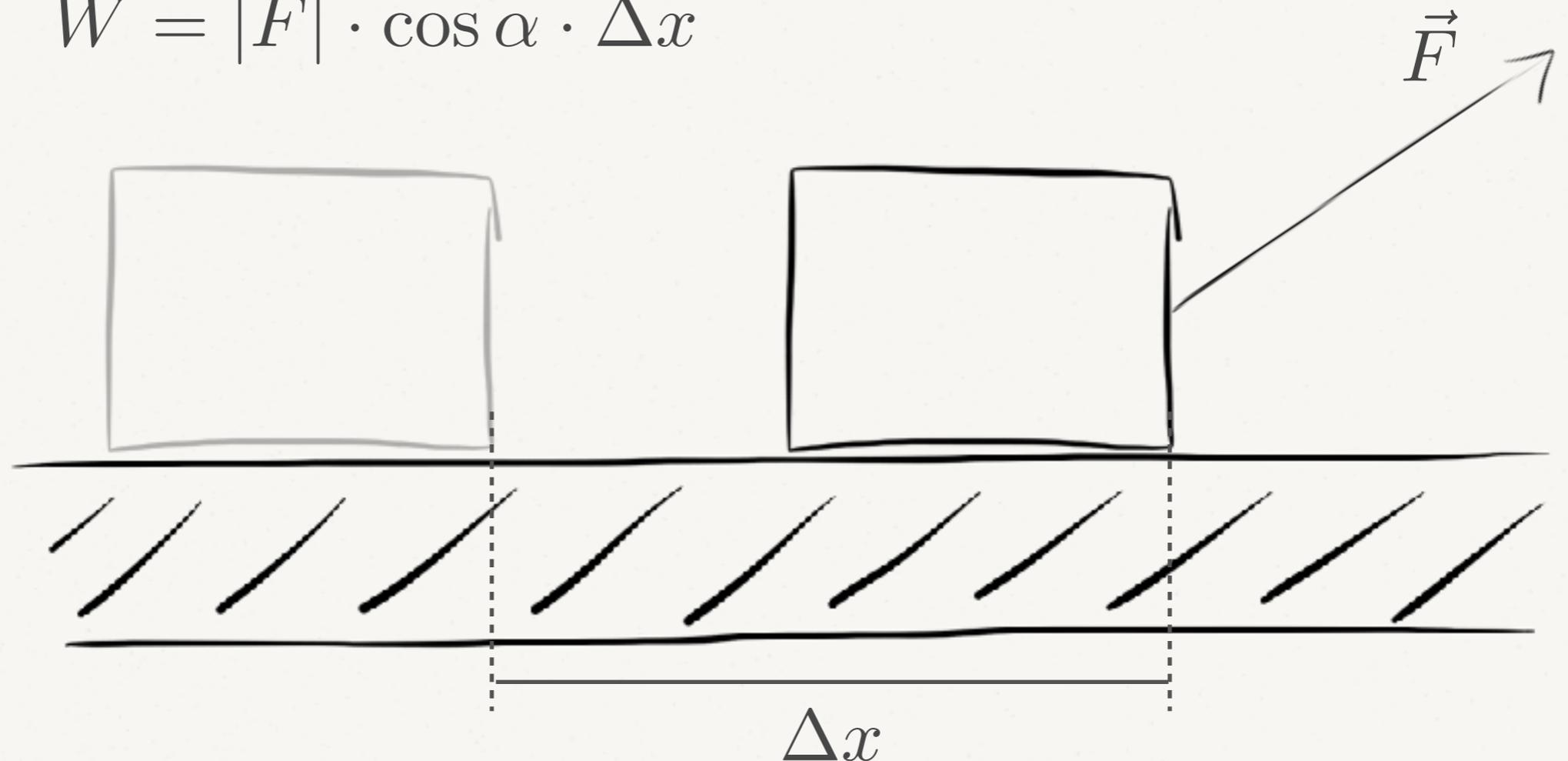
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Konstante Kraft und grader Weg

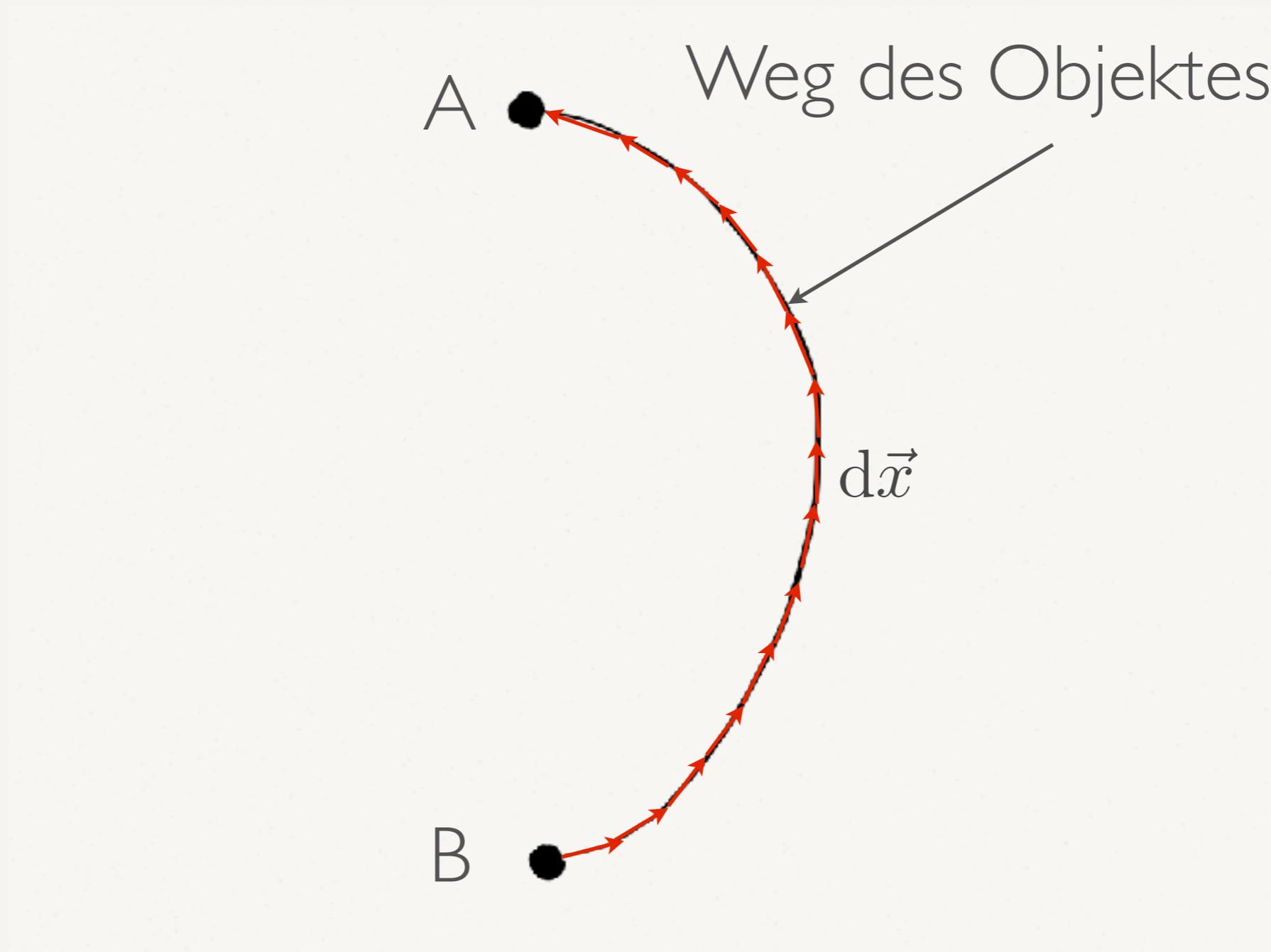


Konstante Kraft und grader Weg

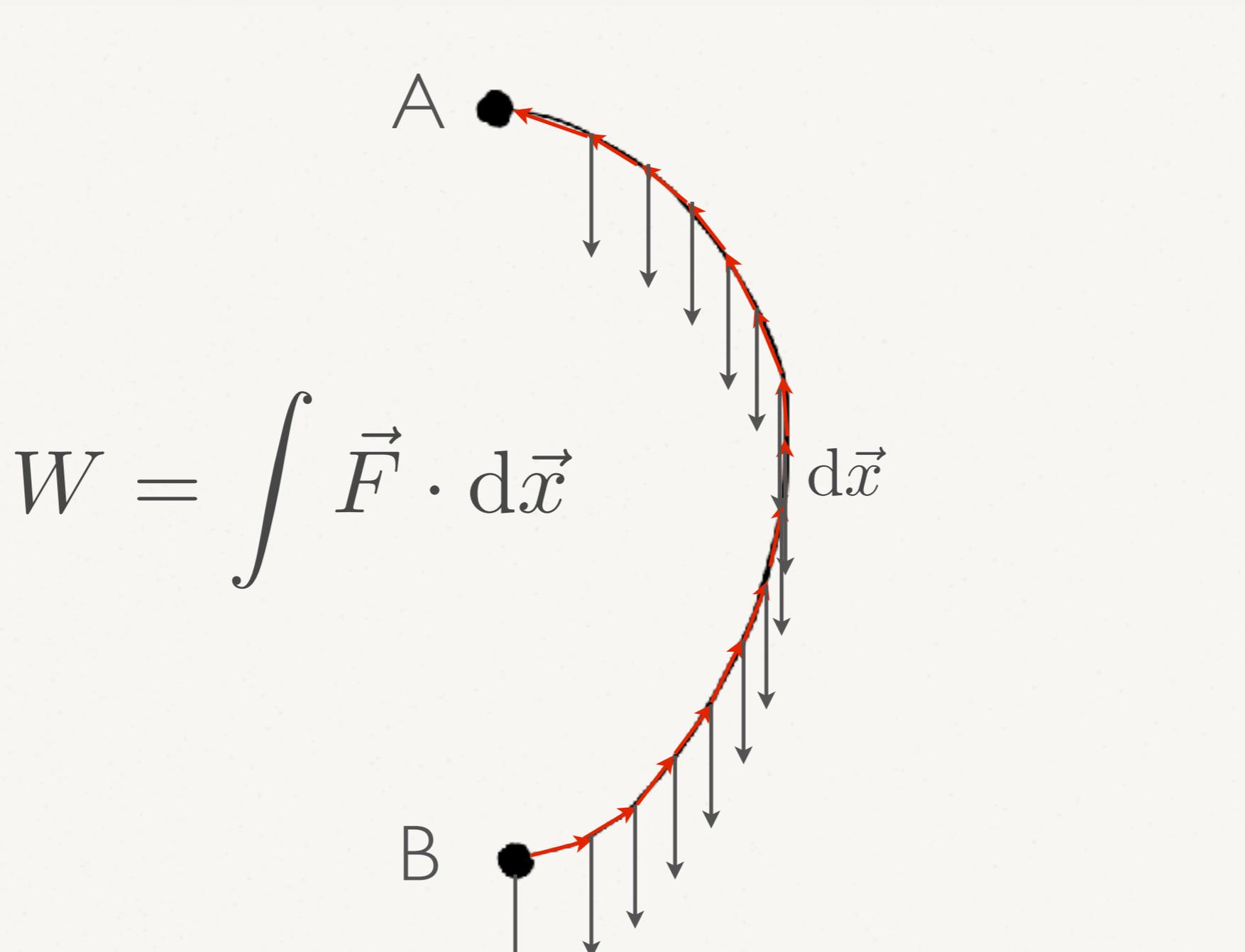
$$W = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \cdot \Delta x$$



Weg vektoriell

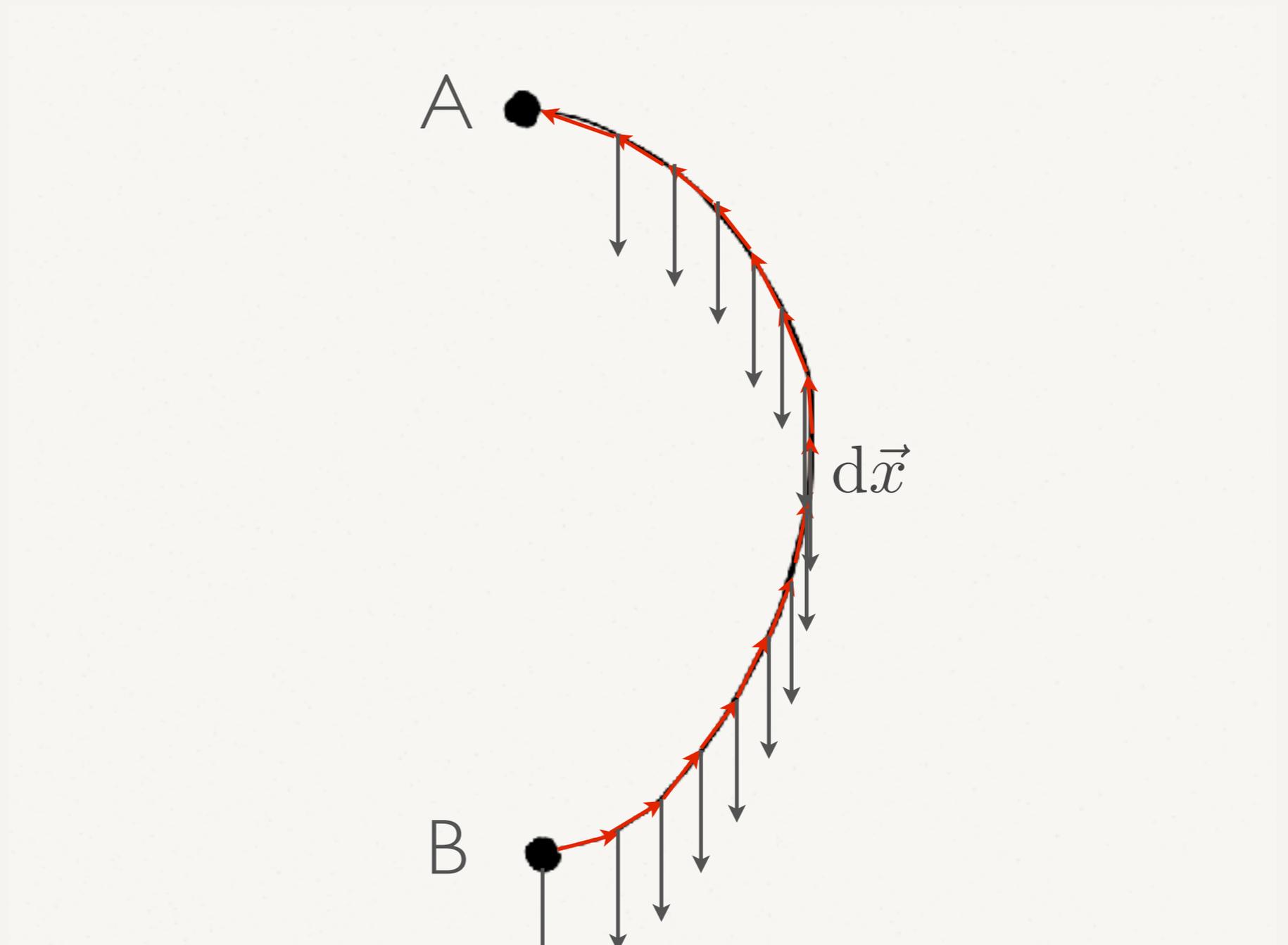


Weg vektoriell



Weg vektoriell

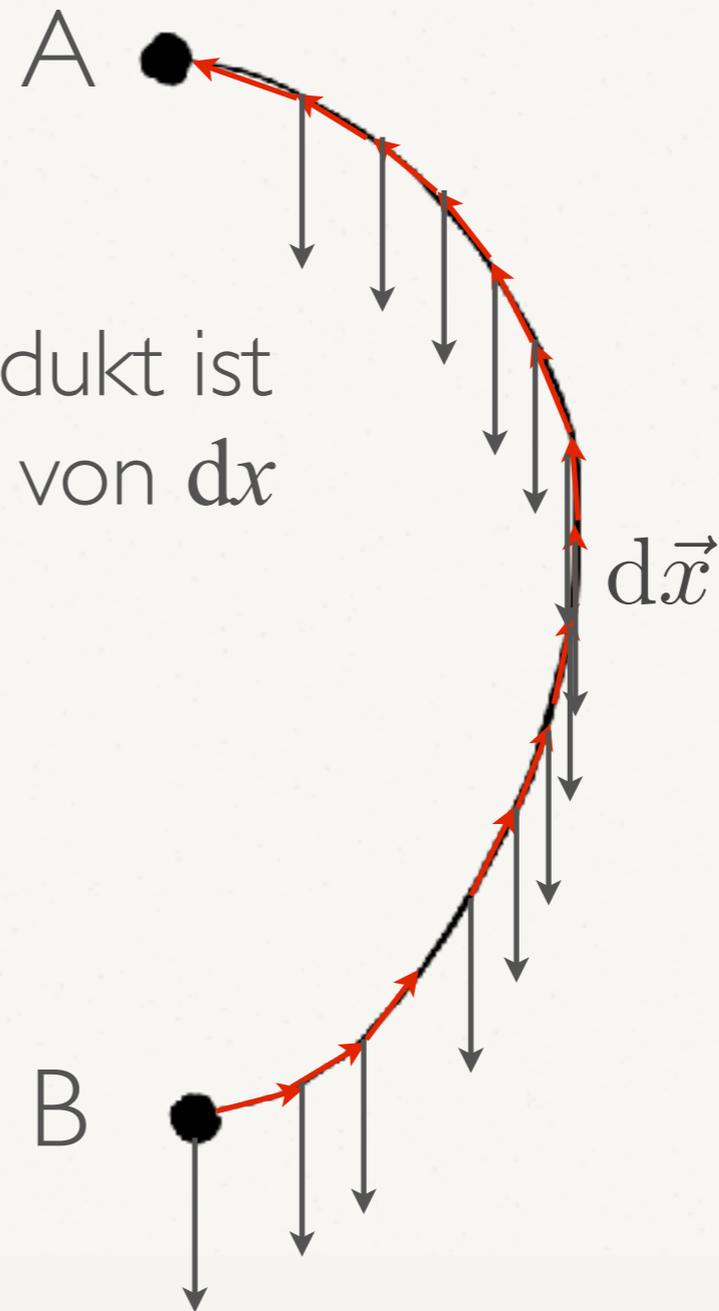
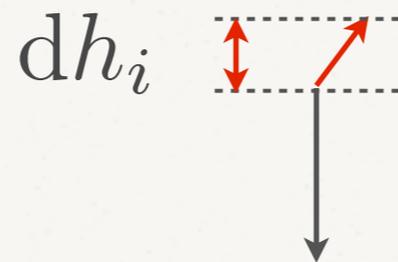
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$



Weg vektoriell

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Das Skalarprodukt ist die Projektion von dx auf F



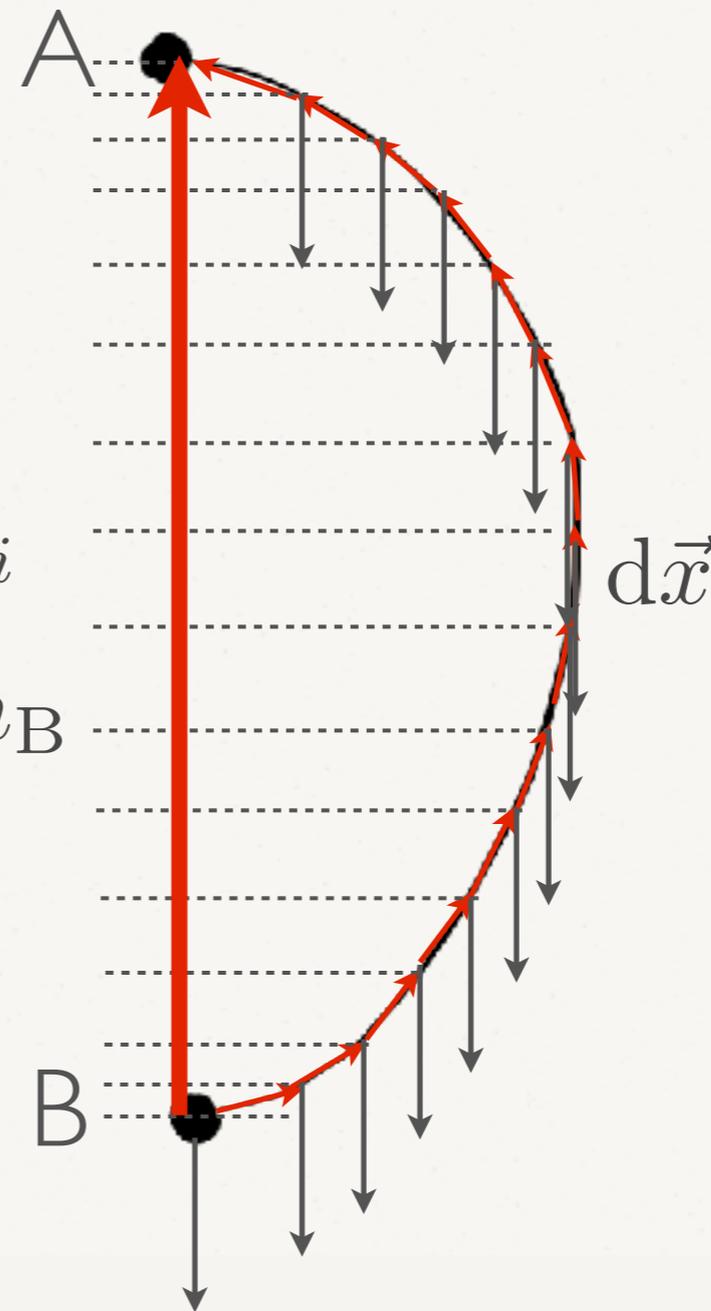
Weg vektoriell

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$W = m \cdot g \cdot \int \vec{e}_y \cdot d\vec{x}$$
$$W = m \cdot g \cdot \int dh$$

$$W = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \sum dh_i$$
$$= h_A - h_B$$



Weg vektoriell

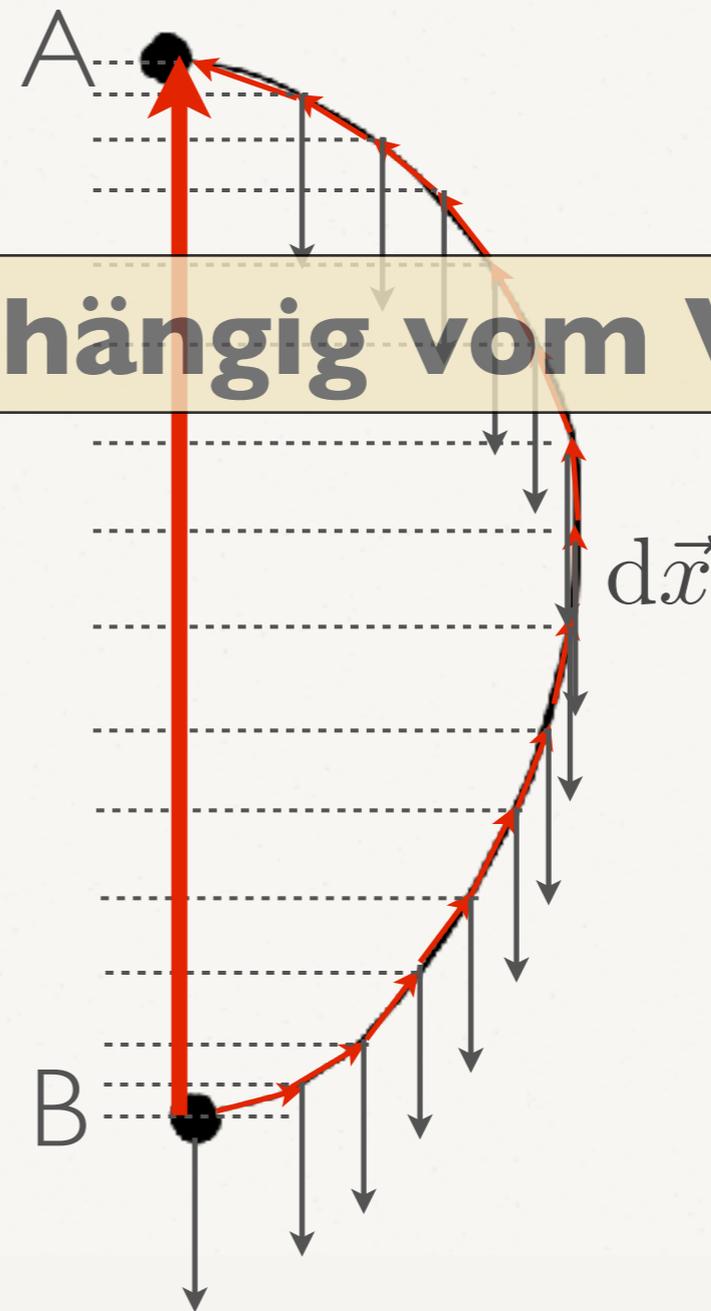
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int \vec{e}_y \cdot d\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int dh$$

$$= m \cdot g \cdot \Delta h$$

Die Arbeit ist unabhängig vom Weg!



Konservatives Kraftfeld

- Wenn die Arbeit gegen eine Kraft unabhängig vom Weg ist nennt man es eine ***konservative Kraft***.
- Die Gravitationskraft ist eine konservative Kraft.
- Die Coulomb-Kraft ist eine konservative Kraft
- Alle fundamentalen Kräfte (also noch schwache und starke Kernkraft) sind konservativ!

Arbeit und keine Arbeit

Kraft als Ableitung des Potentials

$$W = \int F \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{d}{dx} W$$

$$W = m \cdot g \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad F = m \cdot g$$

Ableitung vektoriell?

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = ?? \quad W$$

Erst einmal veranschaulichen...

Ableitung vektoriell?

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla} W$$



Nabla

Nabla ist der Ableitungsoperator

Definition *Nabla*

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- $\frac{\partial}{\partial x}$ ist eine *partielle Ableitung*.
- Es wird in Richtung x abgeleitet wie eine normale Ableitung.
- Es wird also die Steigung einer Funktion in x -Richtung ermittelt.
- Dabei werden y und z konstant gehalten, es spielt also nur die Differenz in der x -Komponente der Funktion eine Rolle.
- Entsprechend für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$.

Vektormultiplikation

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Skalar mal Vektor	Produkt mit einem Skalar	$\vec{a}' = c \cdot \vec{a}$	Vektor
Vektor mal Vektor	Skalarprodukt (inneres Produkt)	$s = \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalar
Vektor mal Vektor	Kreuzprodukt (äußeres Produkt) (Vektorprodukt)	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	Vektor

Vektorielle Ableitungen

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Nabla mal skalare Funktion	Gradient	$\vec{\nabla} f$	Vektor
Nabla mal Vektorfeld	Divergenz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$	Skalar
Nabla kreuz Vektorfeld	Rotation	$\vec{\nabla} \times \vec{E}$	Vektor

Definition *Gradient*

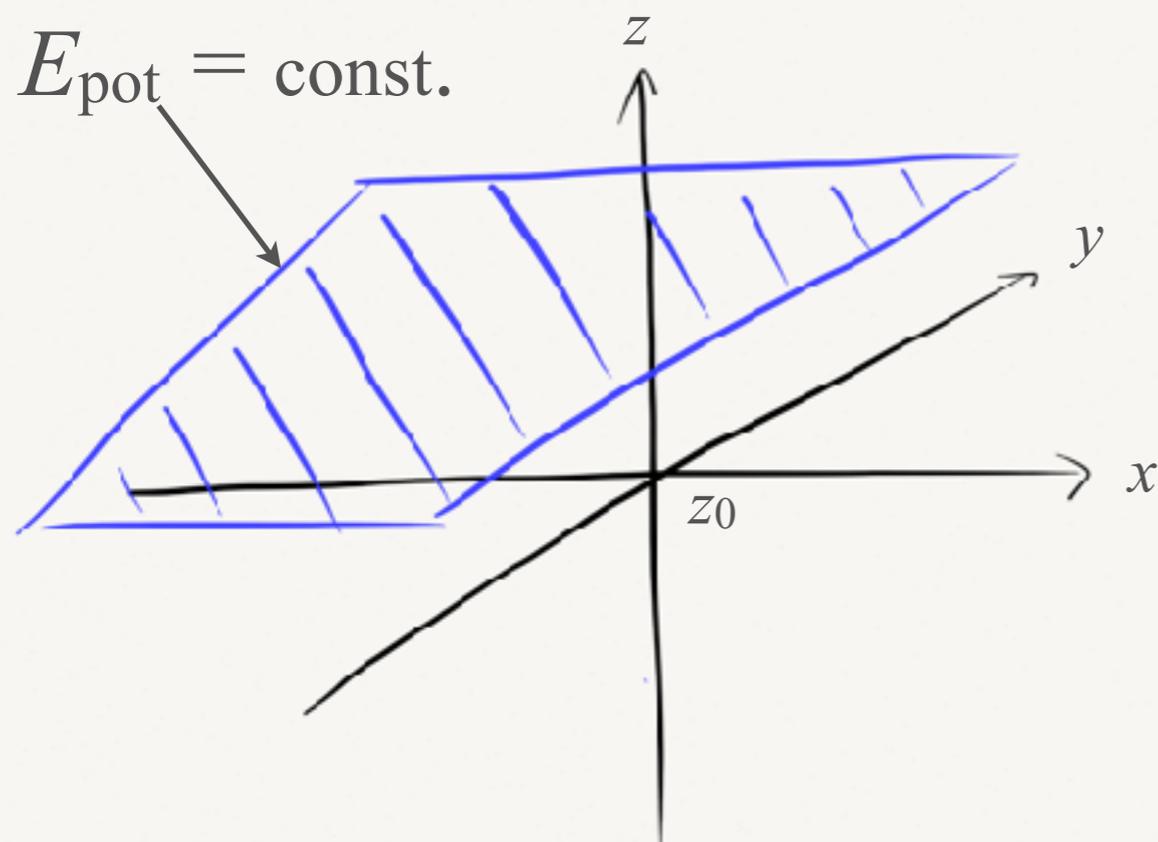
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) \\ &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\end{aligned}$$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$ ist eine Zahl, deren Größe die Änderung von f in Richtung x wiedergibt.
- Diese Zahl multipliziert mit dem Einheitsvektor in x -Richtung zeigt an, wie groß die Änderung in genau diese Richtung ist.
- Entsprechend für $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$ und $\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$.
- Zusammen: die Summe der drei Vektoren ist der Gradient.
- Der Gradient ist ein Vektor, der in Richtung der stärksten Änderung zeigt.

Potentielle Energie als skalare Funktion

$$\vec{F} = mg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{pot}} = mg \cdot (z - z_0)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} E_{\text{pot}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_{\text{pot}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\text{pot}} = mg$$

$$\vec{\nabla} E_{\text{pot}} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{F}$$

Gradient eines Potentials

**Der Gradient eines Potentials
ist eine Kraft!**

$$-\vec{\nabla} \Phi = \vec{F}$$

Ruhelage

- Die Kraft zeigt immer entlang des Gradienten des Potentials.
- Die Beschleunigung ist immer in Richtung Potential-Minimum.
- Die Ruhelage ist in einem Minimum, wo der Gradient Null ist.

