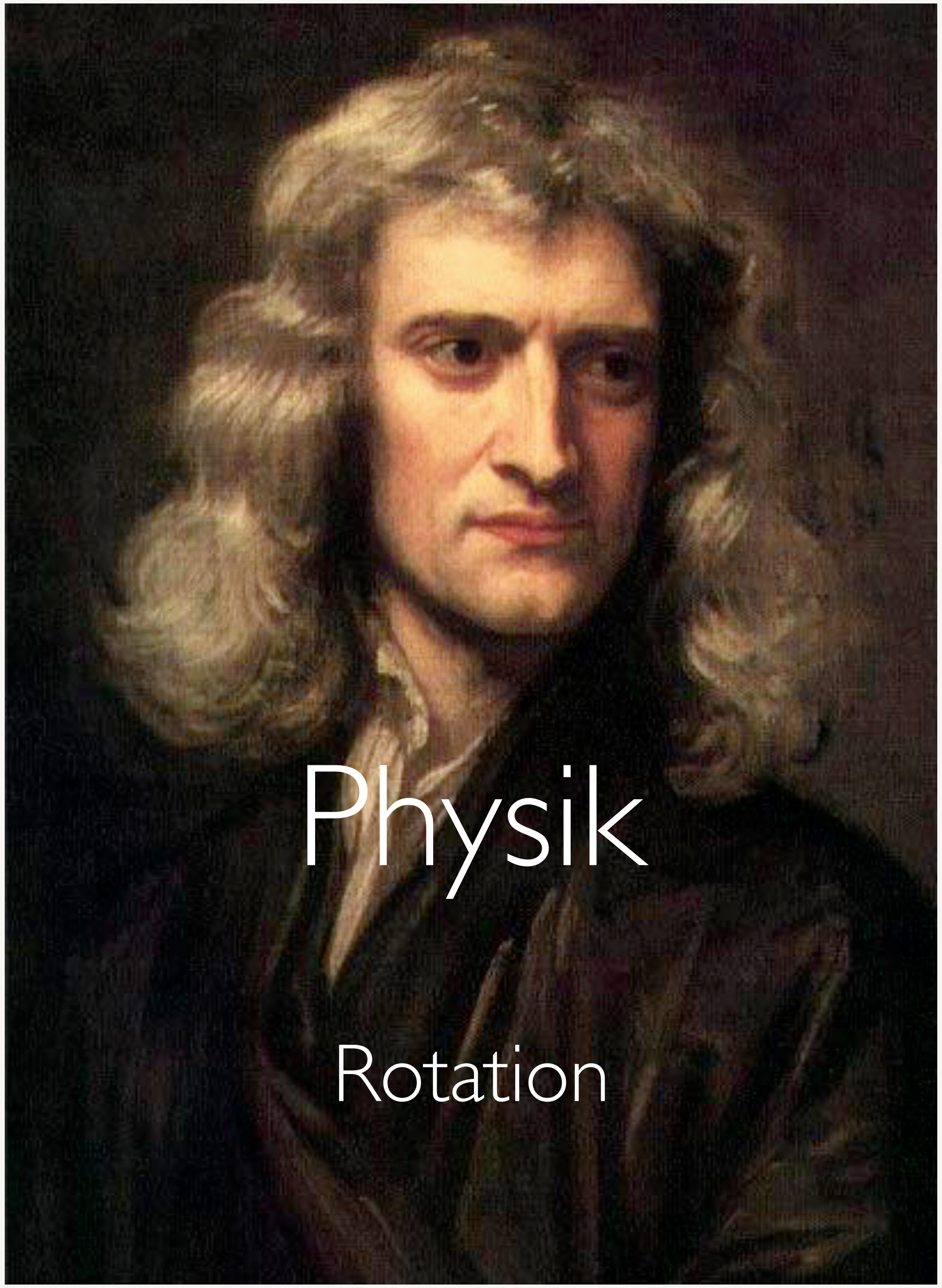
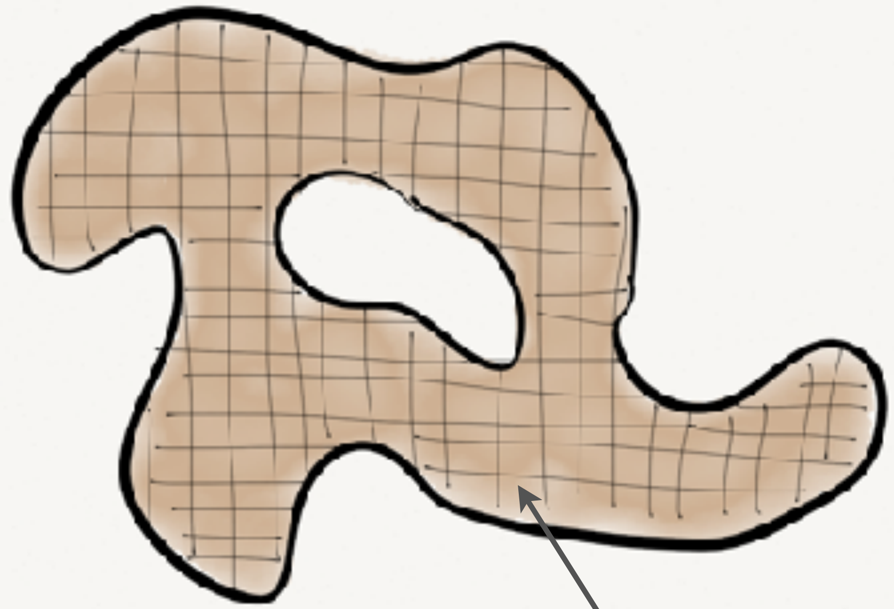
24. November 2016



Schwerpunkt

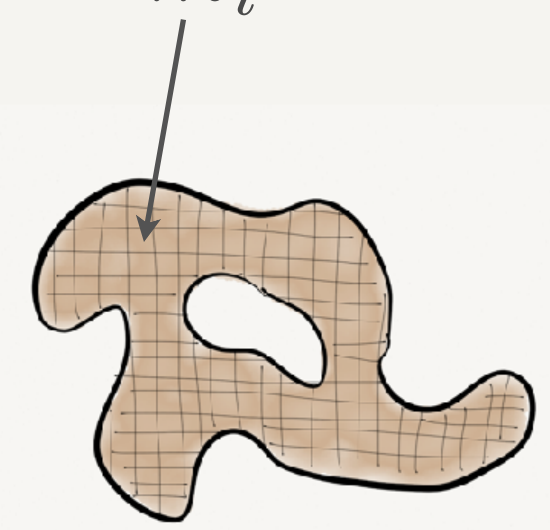
Schwerpunkt

- Bewegungen, Beschleunigungen und Kräfte können so berechnet werden, als würden Sie an einem einzigen Punkt des Objektes angreifen.
- Bei einem Körper mit homogener Dichte ist dies der geometrische Mittelpunkt.
- Bei Kugeln ist dies der Mittelpunkt.
- Für Planeten kann man näherungsweise den Mittelpunkt nehmen.



$$\vec{S} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

Schwerpunkt



$$M = \sum_i m_i$$

- Ein Objekt der Masse M sei in viele einzelne Massteile m_i zerlegt.
- Für jedes einzelne Masseteil gelten die Newton'schen Gesetze, insbesondere das 2.:

$$\vec{F}_i = m_i \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{x}_i$$

- Die gesamte Kraft auf das Objekt ist die Summe aller Kräfte auf jedes Einzelteil.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{x}_i$$

- **Summe und Differentiation dürfen vertauscht werden.**

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\sum_i m_i \vec{x}_i \right)$$

- Mit der Definition des Schwerpunkts kann die resultierende Kraft auf den Körper geschrieben werden als:

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i \Rightarrow \vec{F} = M \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{S}$$

Schwerpunkt

- Natürlich wird die Summe für differentiell kleine Massestücke zum Integral.
- Anschaulicher wird das mit der Dichte. Dann ist jedes Massestück ein Volumen mal die Dichte am Ort.

$$\vec{S} = \lim_{m_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

$$= \frac{1}{M} \int_{\text{Körper}} \vec{x} \, \mathrm{d}m$$

$$= \frac{1}{M} \int_{\text{Körper}} \vec{x} \, \rho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \rho(\vec{x}) \, \mathrm{d}V$$

Schwerpunkt

- Für homogene Körper (bei denen die Dichte überall gleich ist) ist der Schwerpunkt gleich dem geometrischen Mittelpunkt!

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \int\limits_{\text{Körper}} \vec{x}\, \rho(\vec{x})\, \mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{M} \rho_0 \int\limits_{\text{Körper}} \vec{x}\, \mathrm{d}V$$

Schwerpunkt

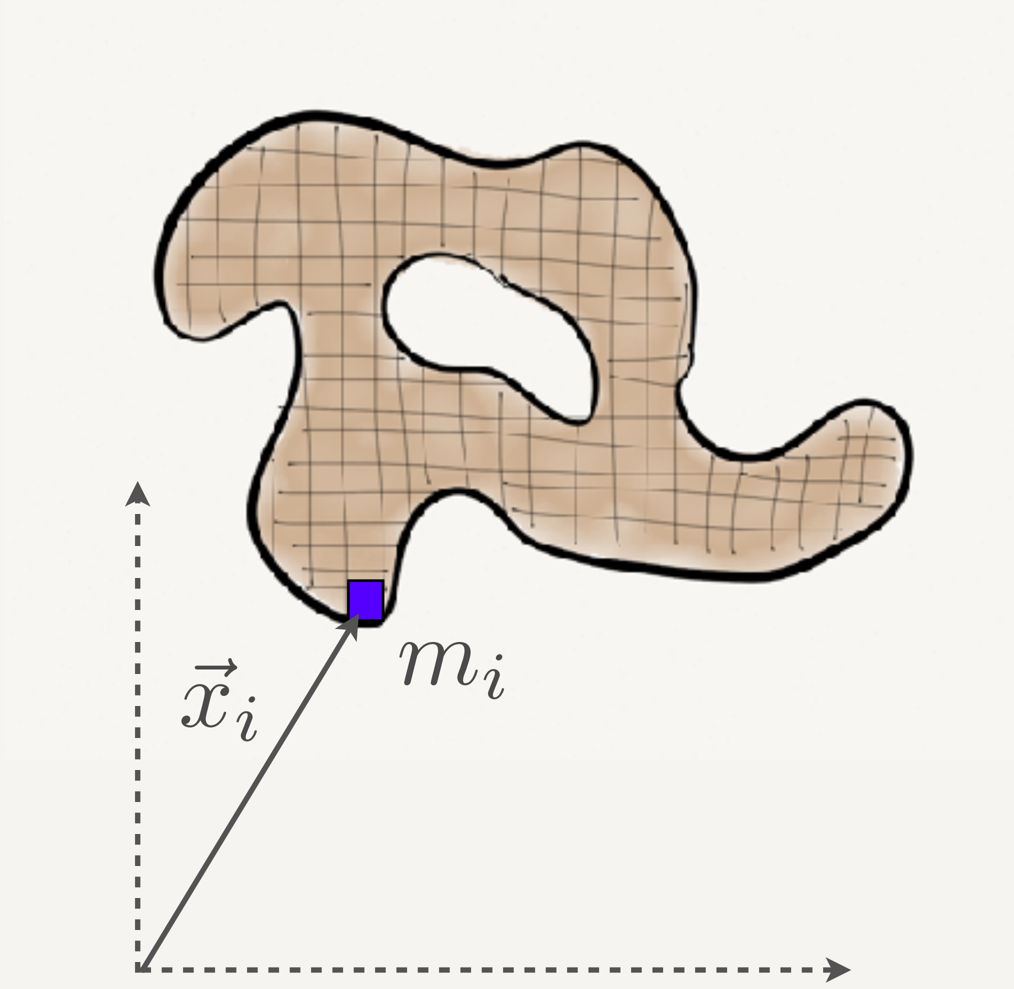
- Ein Objekt setzt sich aus vielen (Größenordnung 10^{23}) Atomen zusammen, die alle aneinander ziehen, drücken, schieben...
- Innere Kräfte gleichen sich paarweise wegen ***actio = reactio*** aus.
- Nur äußere Kräfte verändern den Bewegungszustand des gesamten Objekts.
- Die Kraft greift am **Schwerpunkt** an (s. Vorlesung *08 - Gravitation*).
- Die Flugbahn wird durch die Flugbahn des Schwerpunkts beschrieben:

$$\vec{F} = M \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{S}$$

Rotation

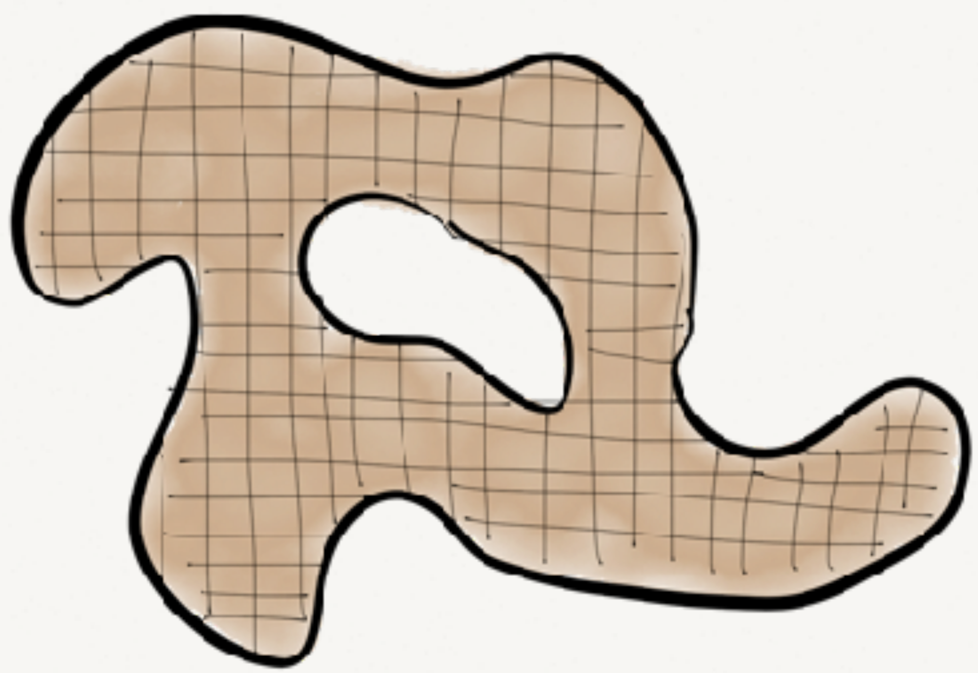
Starrer Körper

- Ein starrer Körper verformt sich nicht auch wenn eine äußere Kraft an ihm angreift.
- Alle Masseteile m_i behalten ihre relative Position $\vec{x}_i$ zueinander.



Rotation

- Zusätzlich zur Bahnbewegung kann sich ein ausgedehnter Körper drehen: **Rotation**.
- Auch dieser Fall wird komplett nur mit dem 2. Newton'schen Gesetz behandelt.
- Es ergibt sich ein neuer Satz von physikalischen Größen und Formeln zur Drehbewegung.
- Diese Größen und Formeln sind völlig analog zu der Bahn-Bewegung im Raum.

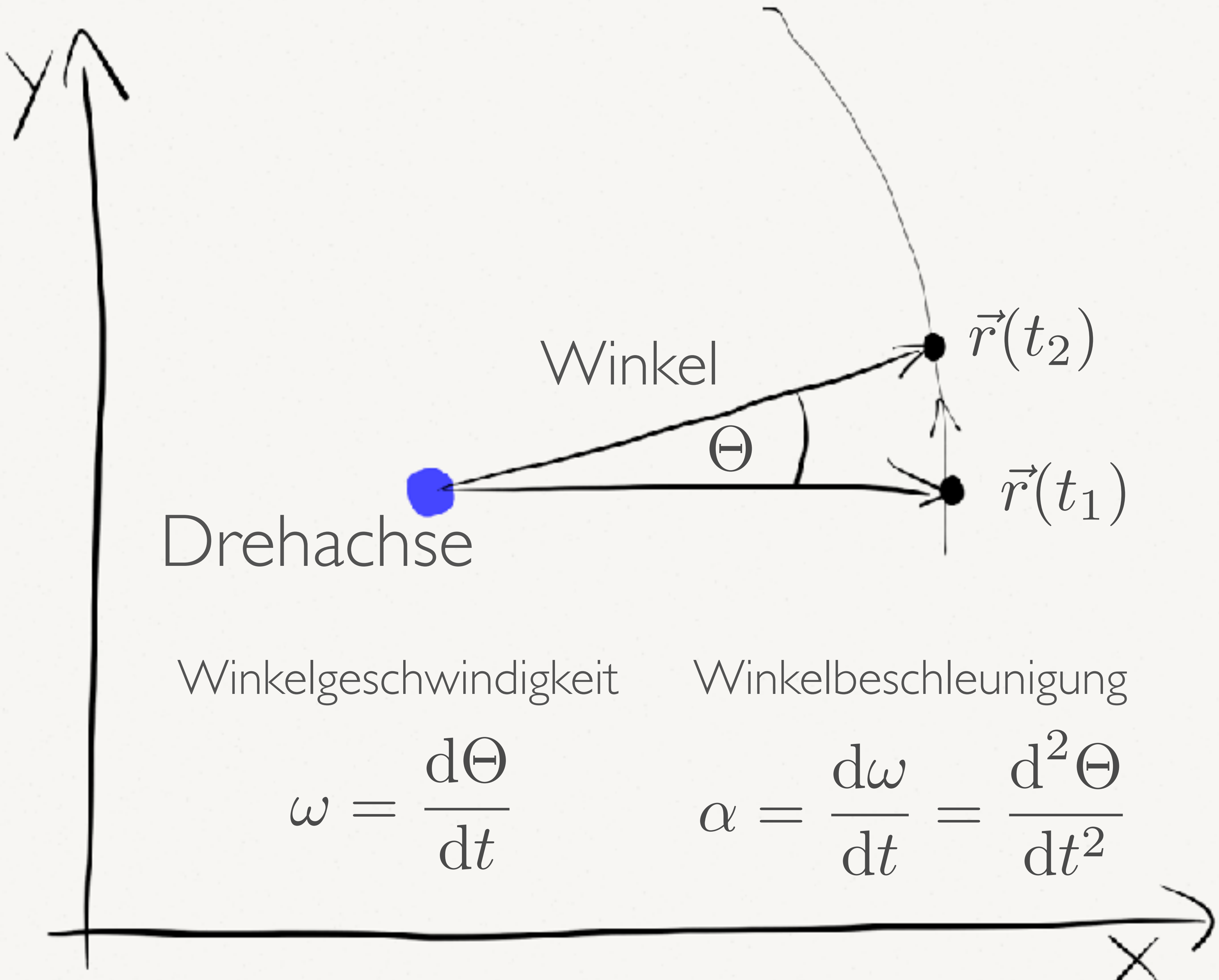


Bewegung und Drehbewegung

Bewegung		Drehbewegung	
Name	Symbol	Symbol	Name
Ort	$\vec{x}$	Θ	Winkel
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	ω	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a}$	α	Winkelbeschleunigung
Kraft	$\vec{F}$	$\vec{M}$	Drehmoment
Masse	m	I	Trägheitsmoment

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
HSD

Drehbewegung



Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$$

Winkelbeschleunigung

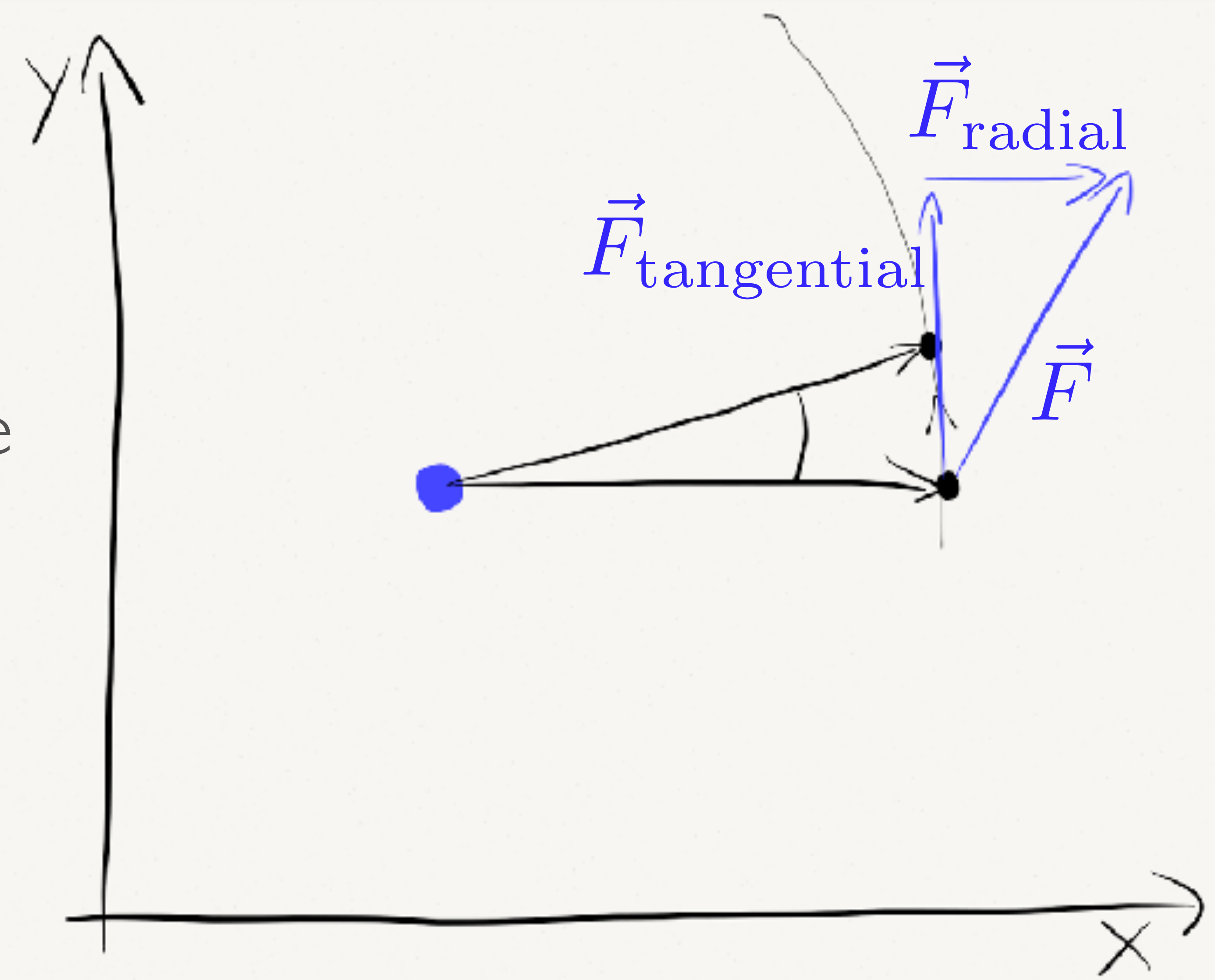
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Drehmoment

skalar

Drehmoment

- Das **Drehmoment** ist für die Drehbewegung das, was die **Kraft** für die Bewegung ist.
- Ein Drehmoment ist also eine Kraft, die die Winkelgeschwindigkeit beschleunigen oder bremsen kann.
- Von der angesetzten Kraft wirkt nur der Teil tangential zur Kreisbahn.



Energieerhaltung

- Die Energieerhaltung gilt natürlich auch für Drehbewegungen.
- Auch für das Drehmoment soll ***Kraft x Weg*** gelten, nur eben als ***Drehmoment x Winkel***.

$$W = \int F \cdot \mathrm{d}x$$

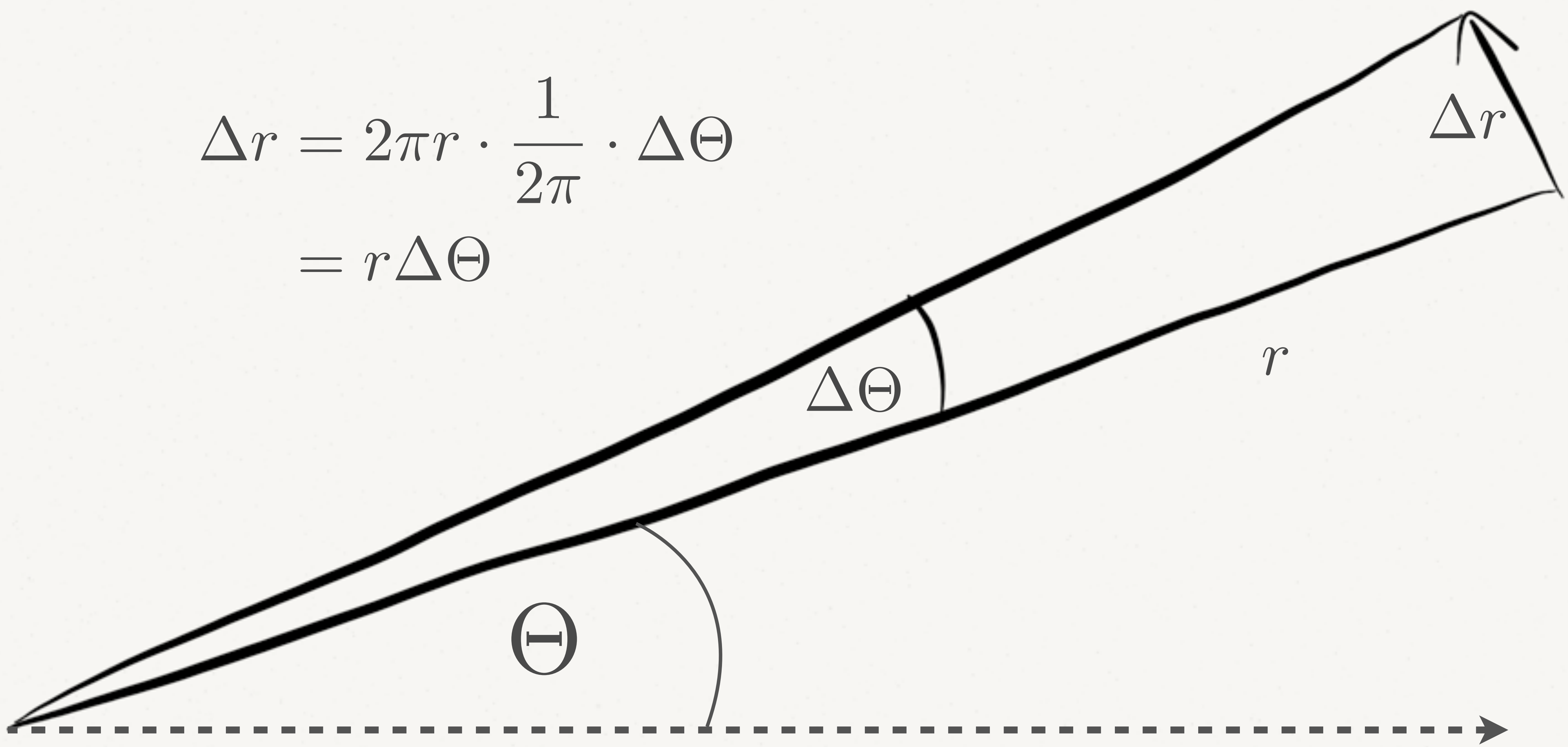
$$= F\Delta x$$

$$\stackrel{!}{=} M \cdot \Delta\Theta$$

$$= ?? \cdot \Delta\Theta$$

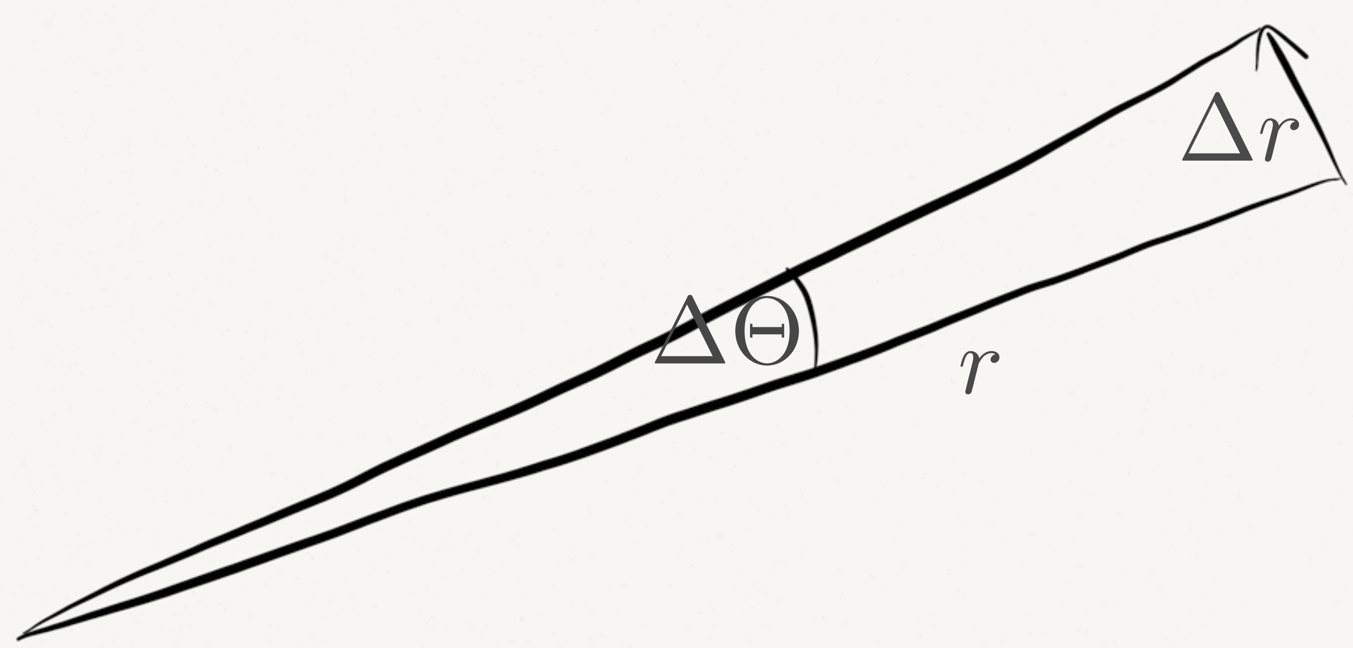
Drehmoment (skalar)

$$\Delta r = 2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta\Theta$$
$$= r\Delta\Theta$$



Drehmoment (skalar)

$$\Delta r = 2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta\Theta$$
$$= r\Delta\Theta$$



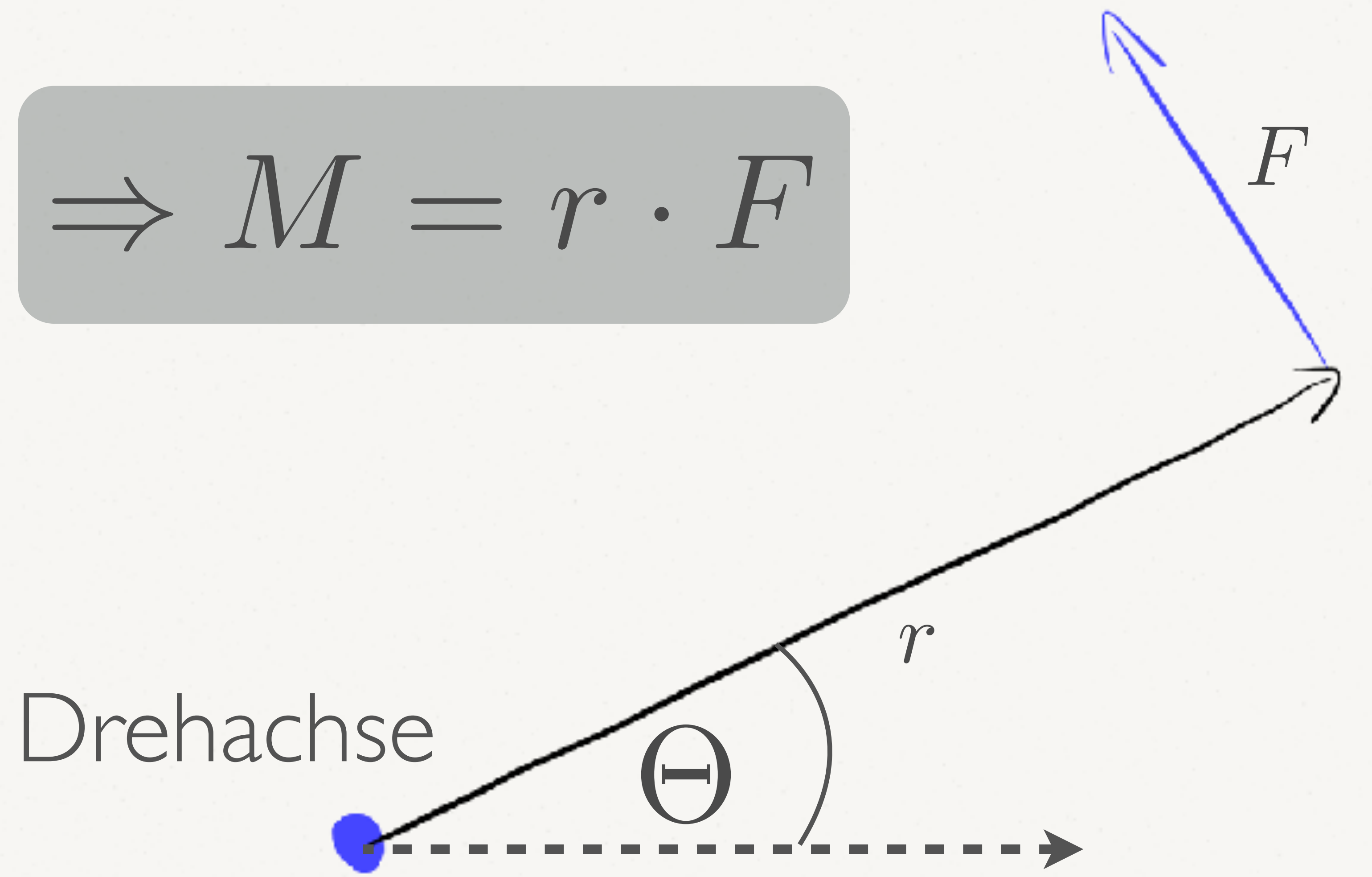
$$W = \int F \cdot \mathrm{d}x$$
$$= F\Delta x$$
$$= F \cdot r\Delta\Theta$$
$$\stackrel{!}{=} M\Delta\Theta$$

Hebel mal Kraft

$$\Rightarrow M = r \cdot F$$

Drehmoment (skalar)

$$\Rightarrow M = r \cdot F$$

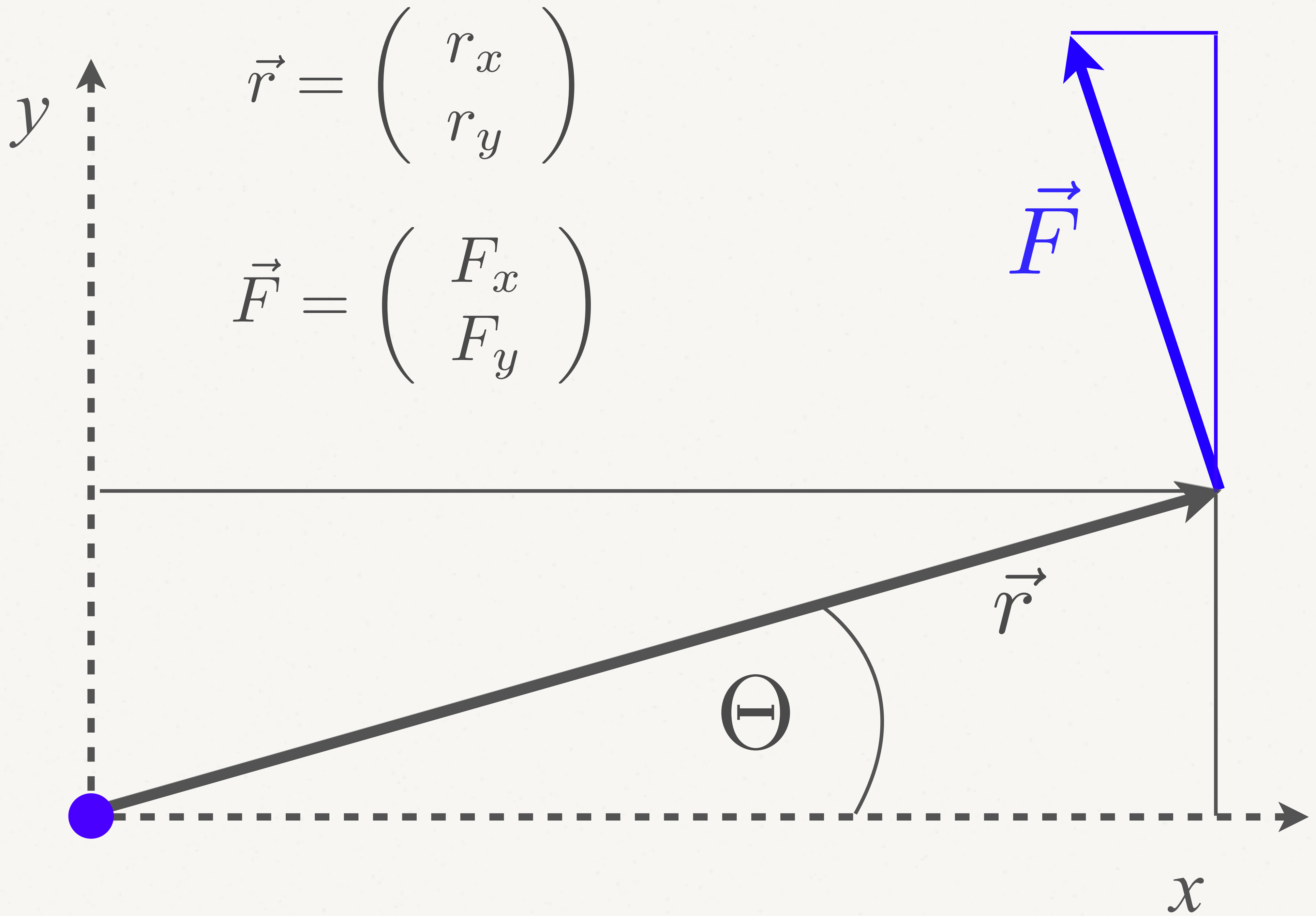


Welche Richtung hat die Drehachse?

Drehmoment

vektoriell

Drehmoment (vektoriell)

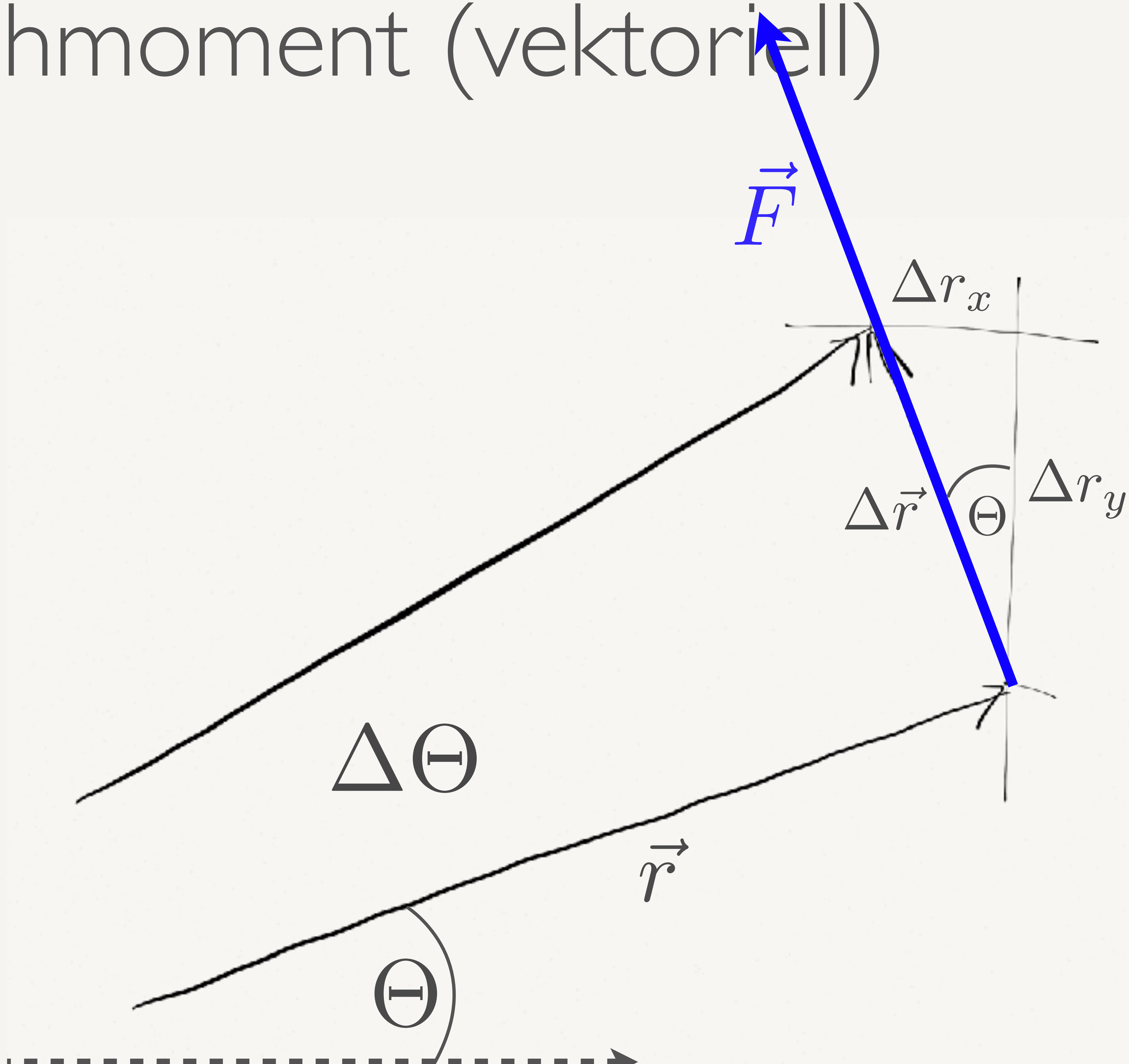


Drehmoment (vektoriell)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

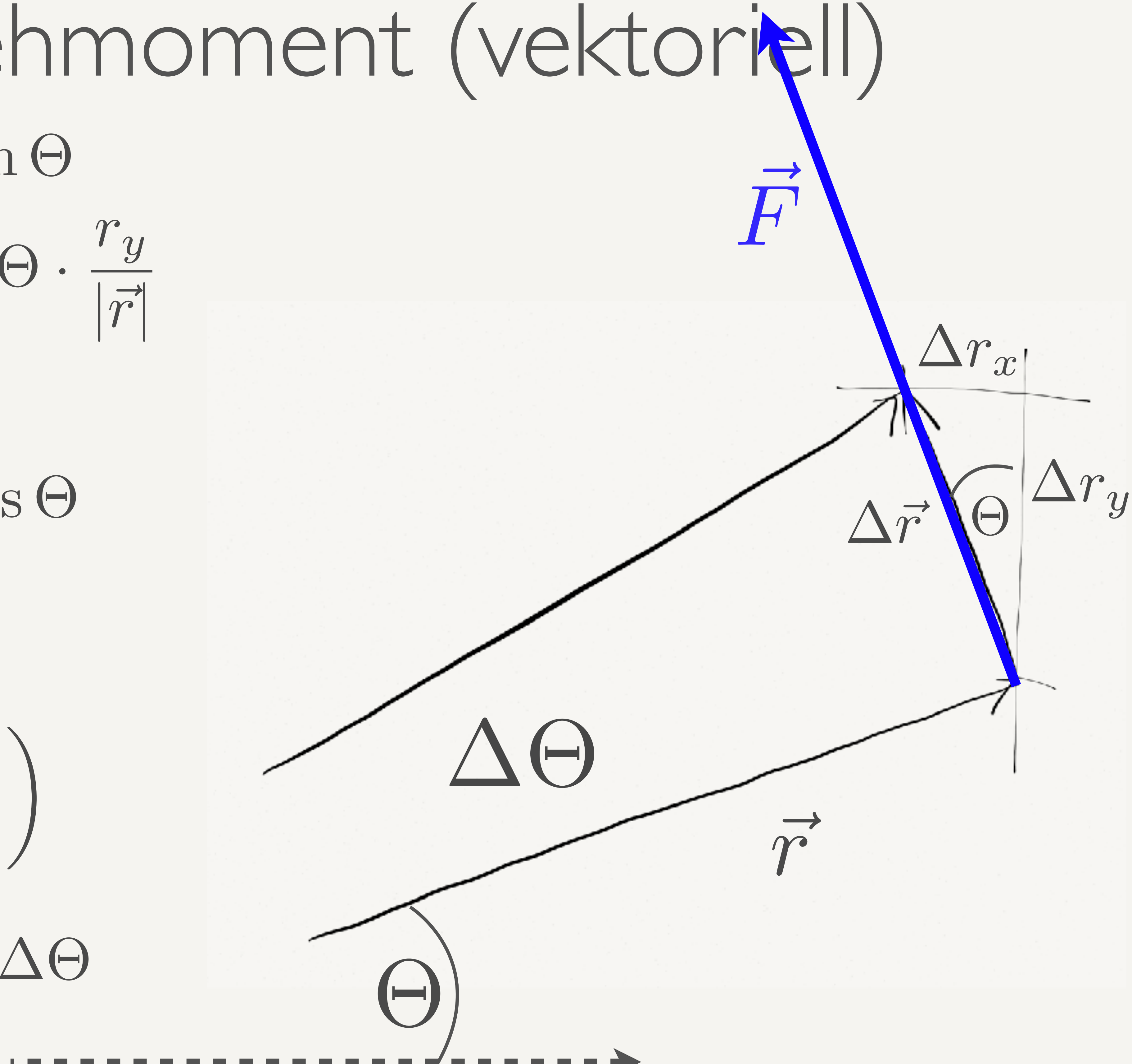
$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta r_x \\ \Delta r_y \end{pmatrix}$$



Drehmoment (vektoriell)

$$\Delta r_x = -|\Delta\vec{r}| \cdot \sin\Theta$$
$$= -|\Delta\vec{r}| \cdot \Delta\Theta \cdot \frac{r_y}{|\vec{r}|}$$
$$= -r_y \Delta\Theta$$
$$\Delta r_y = -|\Delta\vec{r}| \cdot \cos\Theta$$
$$= r_x \Delta\Theta$$

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} -r_y\Delta\Theta \\ r_x\Delta\Theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -r_y \\ r_x \end{pmatrix} \cdot \Delta\Theta$$



Drehmoment (vektoriell)

Arbeit bei Drehung um die z-Achse

$$W_z = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Bahnbewegung

$$= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r_y \\ r_x \end{pmatrix} \cdot \Delta\Theta$$

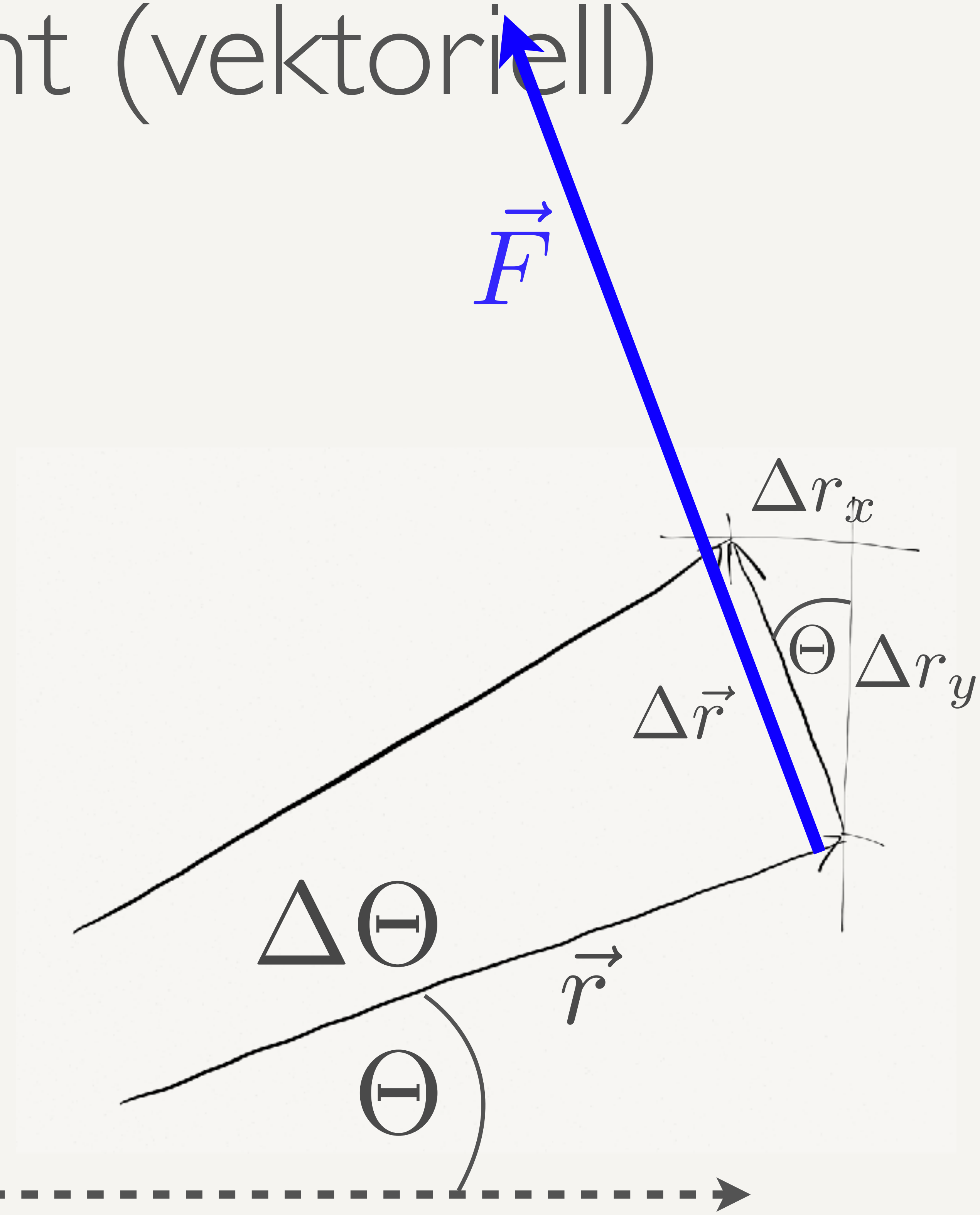
$$= (-F_x r_y + F_y r_x) \cdot \Delta\Theta$$

$$= M_z \cdot \Delta\Theta$$

Drehbewegung

Drehmoment bei Drehung um die z-Achse

$$M_z = (r_x F_y - r_y F_x)$$



Drehmoment (vektoriell)

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Kreuzprodukt

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Kreuzprodukt

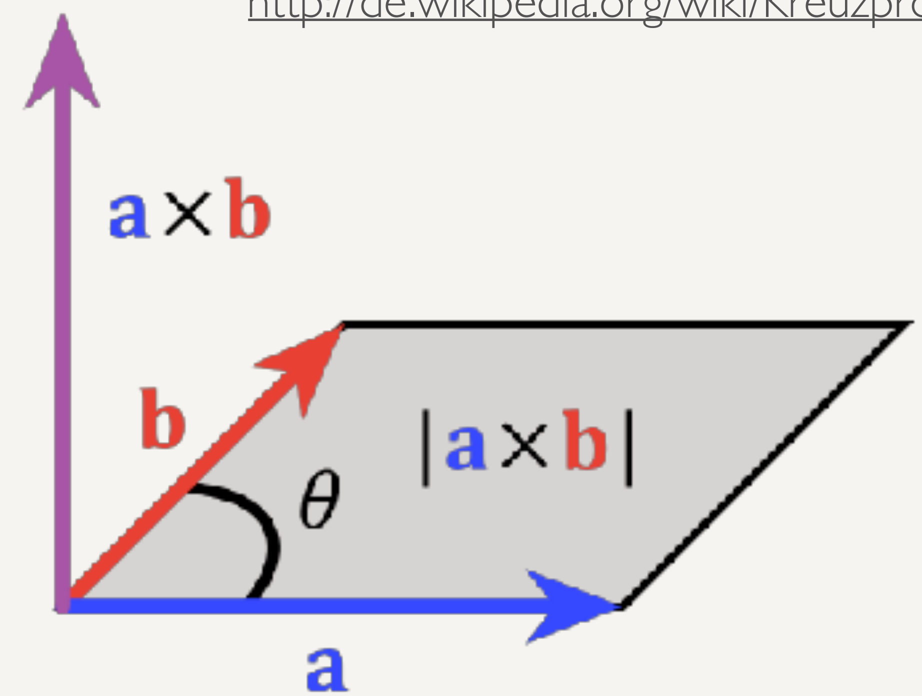
Vektormultiplikation

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Skalar mal Vektor	Produkt mit einem Skalar	$\vec{a}' = c \cdot \vec{a}$	Vektor
Vektor mal Vektor	Skalarprodukt (inneres Produkt)	$s = \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalar
Vektor mal Vektor	Kreuzprodukt (äußeres Produkt) (Vektorprodukt)	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	Vektor

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
HSD

Kreuzprodukt
Komponenten

http://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzprodukt



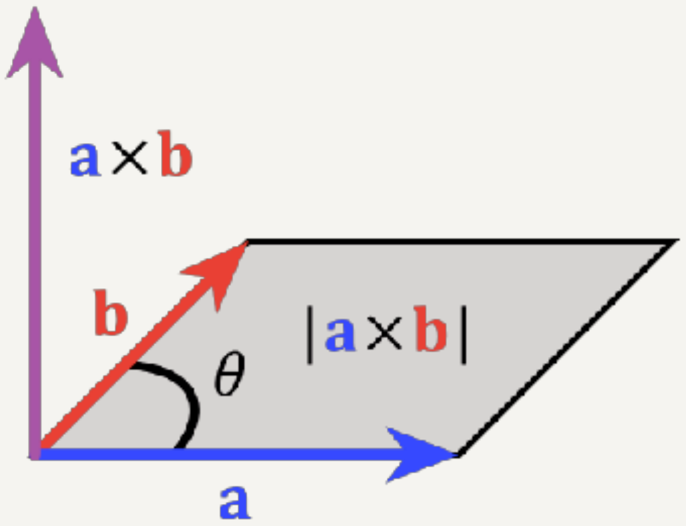
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

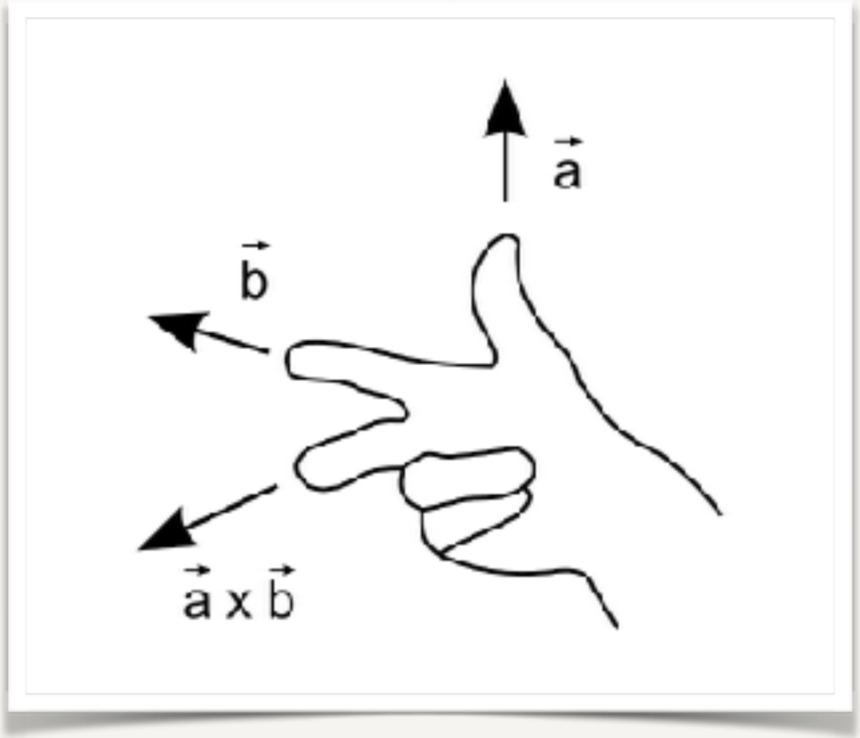
$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt
Geometrische Bedeutung

- Der resultierende Vektor steht senkrecht auf der Ebene, die von den beiden Produktvektoren aufgespannt wird.
- Die drei Vektoren folgen der Rechte-Hand-Regel.
- Die Länge des resultierenden Vektors ist:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\Theta$$





http://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzprodukt

Kreuzprodukt
Rechenregeln

Linear $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

Nullvektor $\vec{a}\times\vec{a}=0$

Antikommutativ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Merken: beim Kreuzprodukt ist alles etwas anders => lieber nachschlagen!

Drehmoment

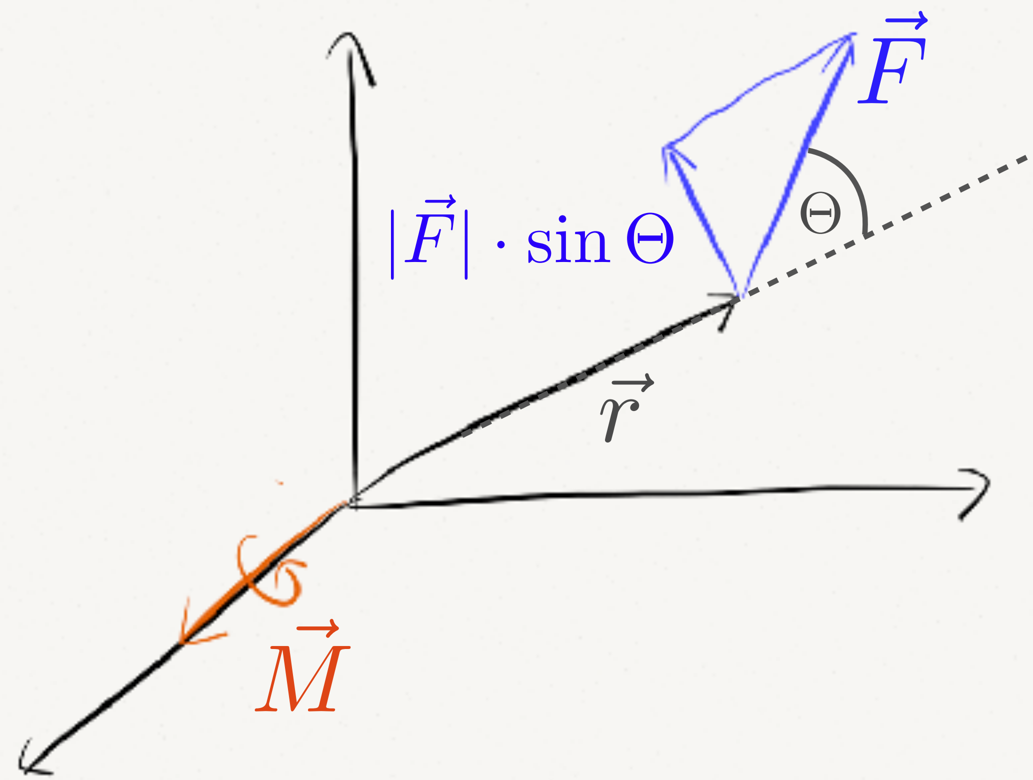
mit Kreuzprodukt

Drehmoment

Richtig vektoriell

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\Theta$$



Die Projektion von F in die tangentiale Richtung ist bereits im Vektorprodukt enthalten!

Trägheitsmoment

Bewegung und Drehbewegung

Bewegung		Drehbewegung	
Name	**Symbol**	**Symbol**	**Name**
Ort	$\vec{x}$	Θ	Winkel
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	ω	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a}$	α	Winkelbeschleunigung
Kraft	$\vec{F}$	$\vec{M}$	Drehmoment
Masse	m	I	Trägheitsmoment

Trägheitsmoment

- Gesucht: das 2. Newton'sche Gesetz für Drehbewegungen.
- Ansatz: stelle a durch α dar.

$$F = m \cdot a$$

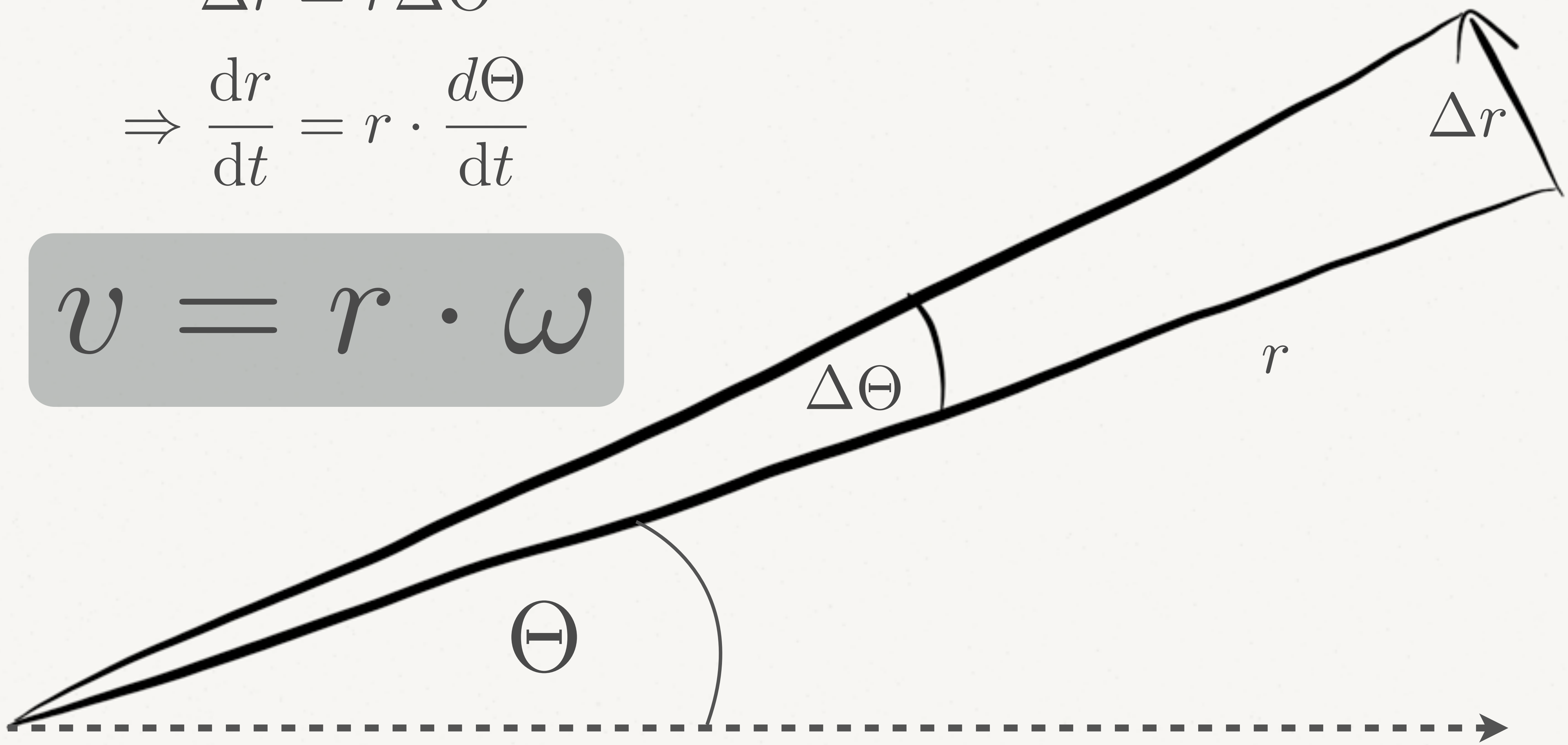
$$M = I \cdot \alpha$$

Tangentialgeschwindigkeit

$$\Delta r = r\Delta\Theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r \cdot \frac{d\Theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{v = r \cdot \omega}$$

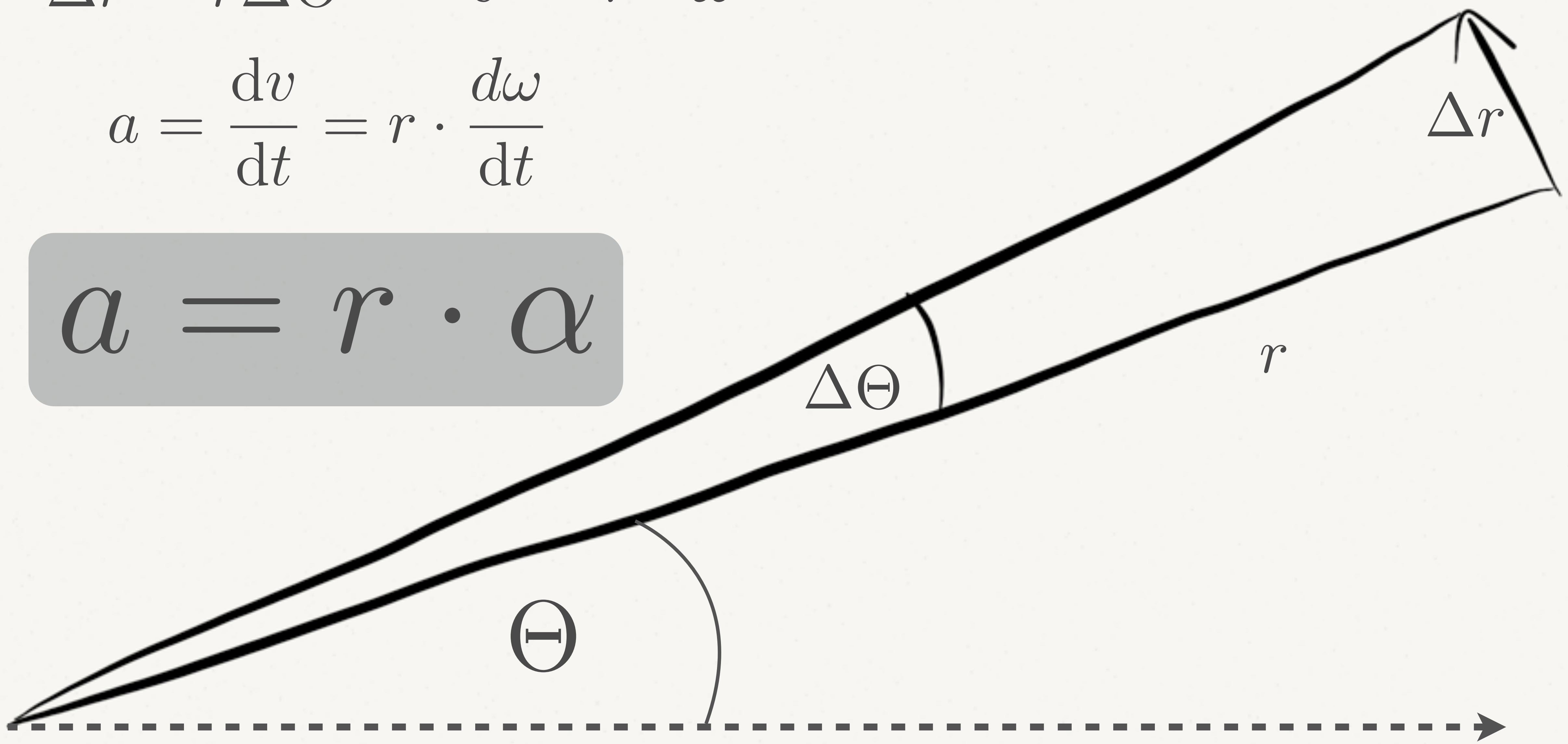


Tangentialbeschleunigung

$$\Delta r = r\Delta\Theta \qquad v = r \cdot \omega$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r \cdot \frac{d\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{a = r \cdot \alpha}$$



Trägheitsmoment

- Das Drehmoment für jedes Masseteil ist Hebel mal Kraft
- Die Beschleunigung ist Radius mal Winkelbeschleunigung

$$M_i = r_i \cdot F_i = r_i \cdot m_i a_i$$
$$= m_i r_i^2 \alpha_i$$

- Das Gesamtdrehmoment ist die Summe über alle einzelnen Drehmomente.

$$M = \sum_i M_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha$$

- Daraus ergibt sich das Trägheitsmoment:

$$\Rightarrow I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad M = I \cdot \alpha$$