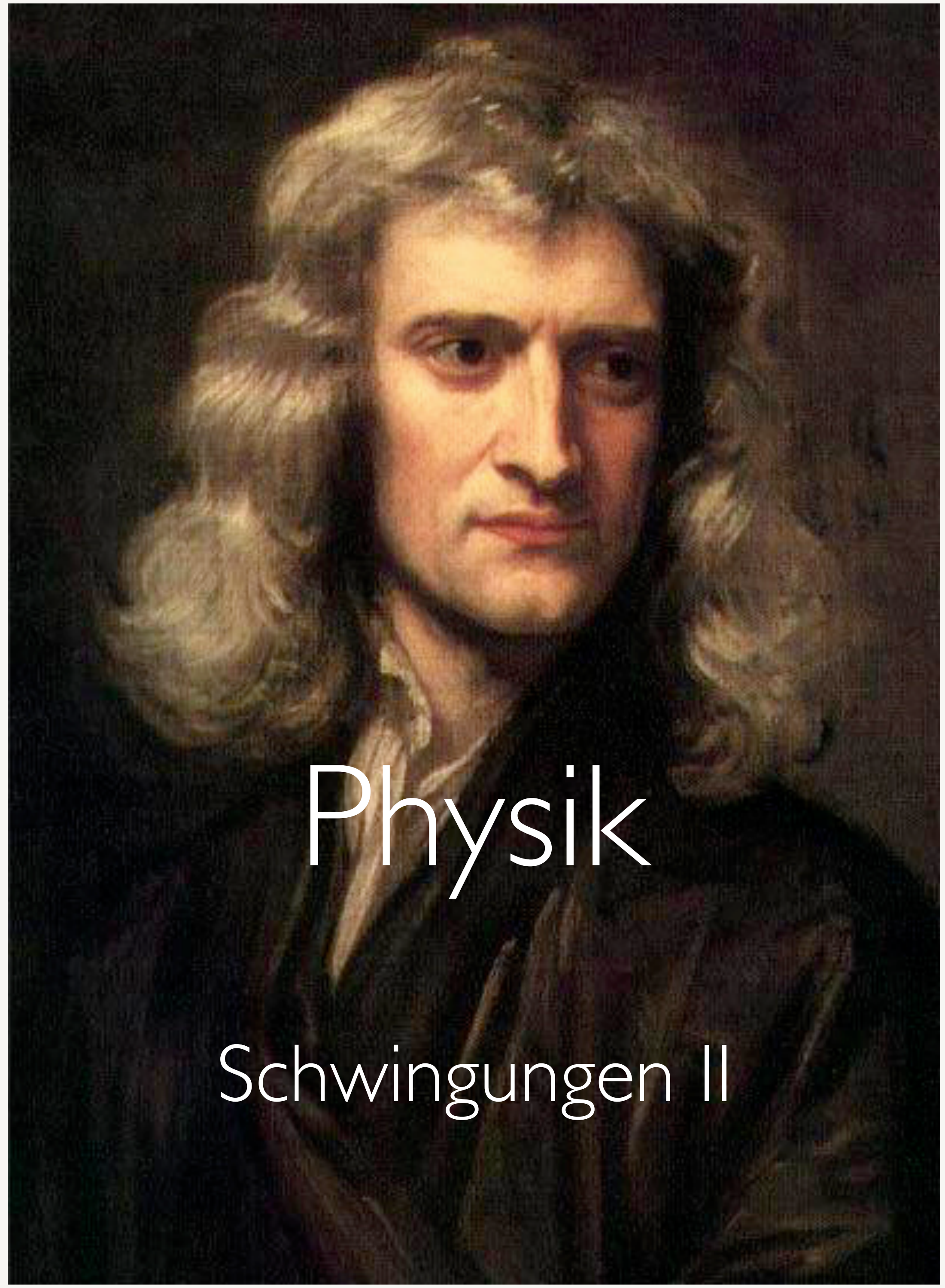
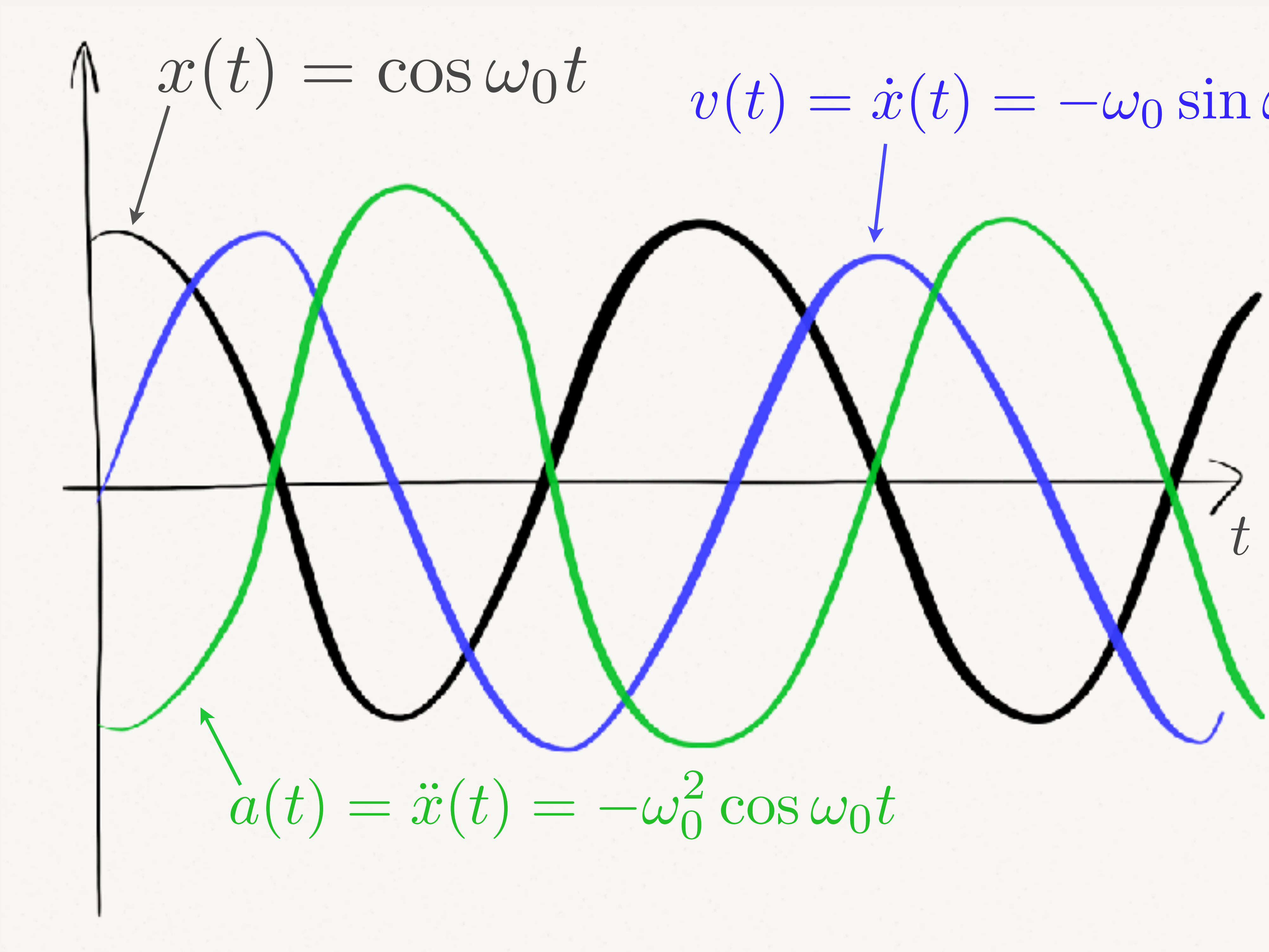

Physik
Schwingungen II

Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung



Energie

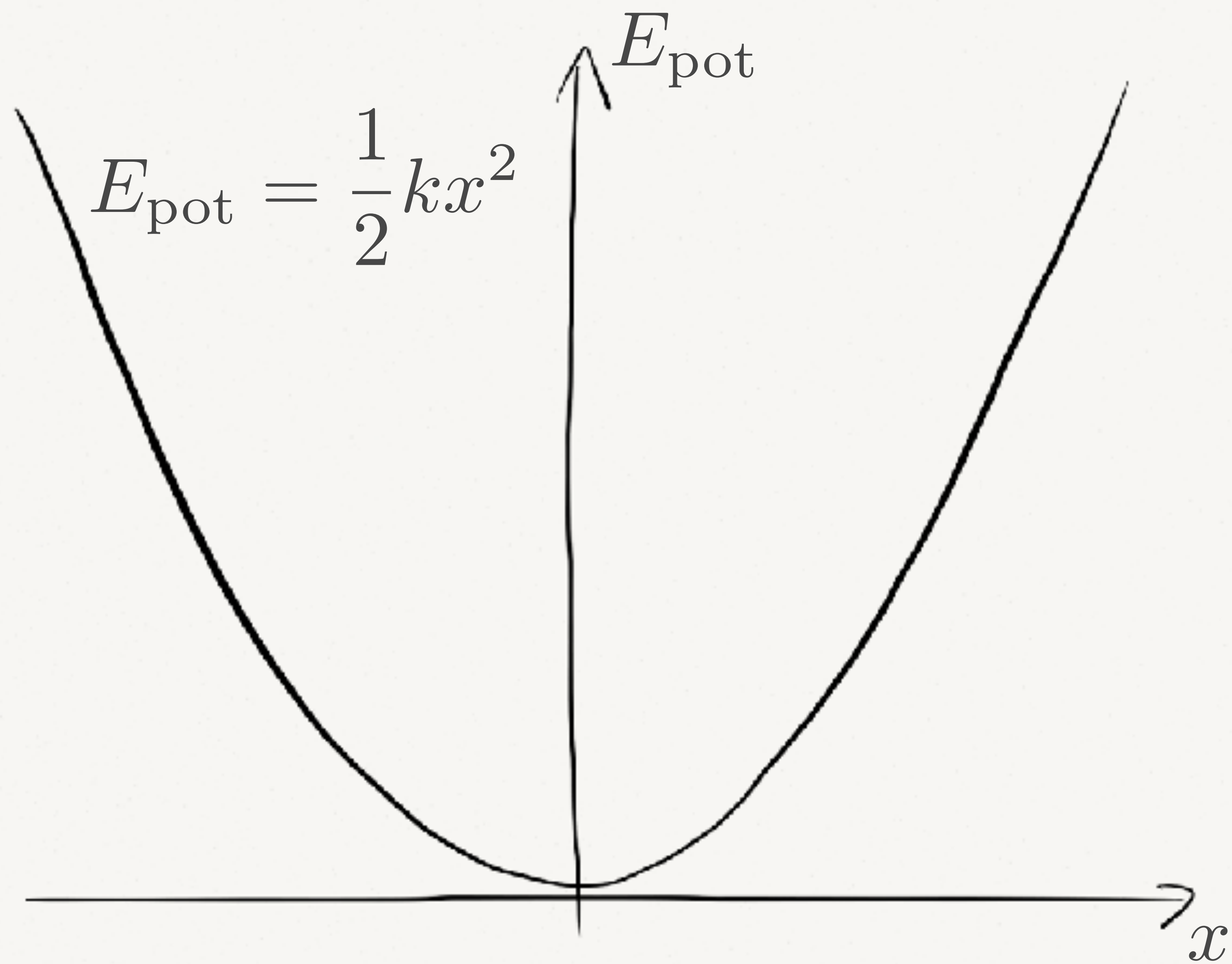
- In einem mechanischen System ist die Gesamtenergie immer gleich der Summe aus potentieller und kinetischer Energie.
- Im abgeschlossenen System ist die Energie erhalten, d.h. sie ändert sich zeitlich nicht.

$$E = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{min}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 0$$

Potentielle Energie

$$
\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= \int F \cdot \mathrm{d}x \\
&= \int kx(t) \cdot \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} kx(t)^2
\end{aligned}
$$



Übungsaufgabe: **Gradient**, Weihnachtsübung

Potentielle Energie

Allgemein:

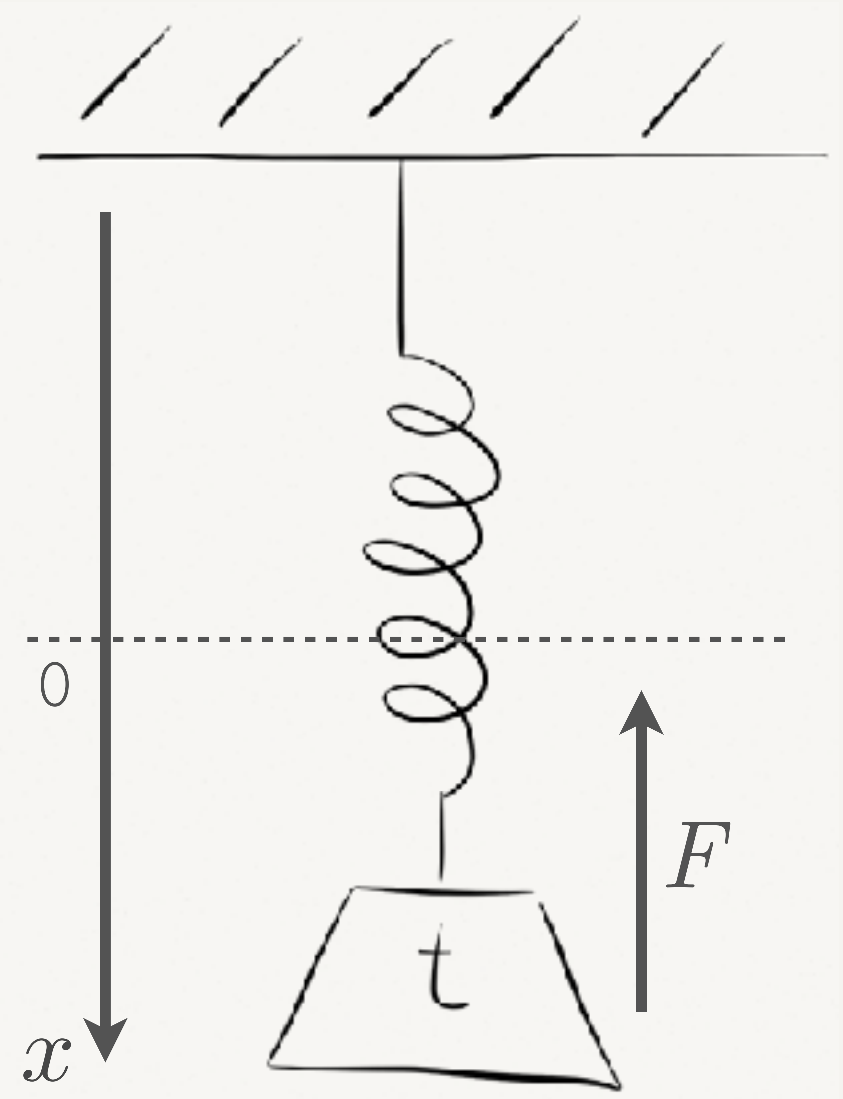
$$E_{\text{pot}} = \int F \cdot \mathrm{d}x$$
$$= \int kx(t) \cdot \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} kx(t)^2$$

Konkret:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

Einsetzen:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kA^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$$



Kinetische Energie

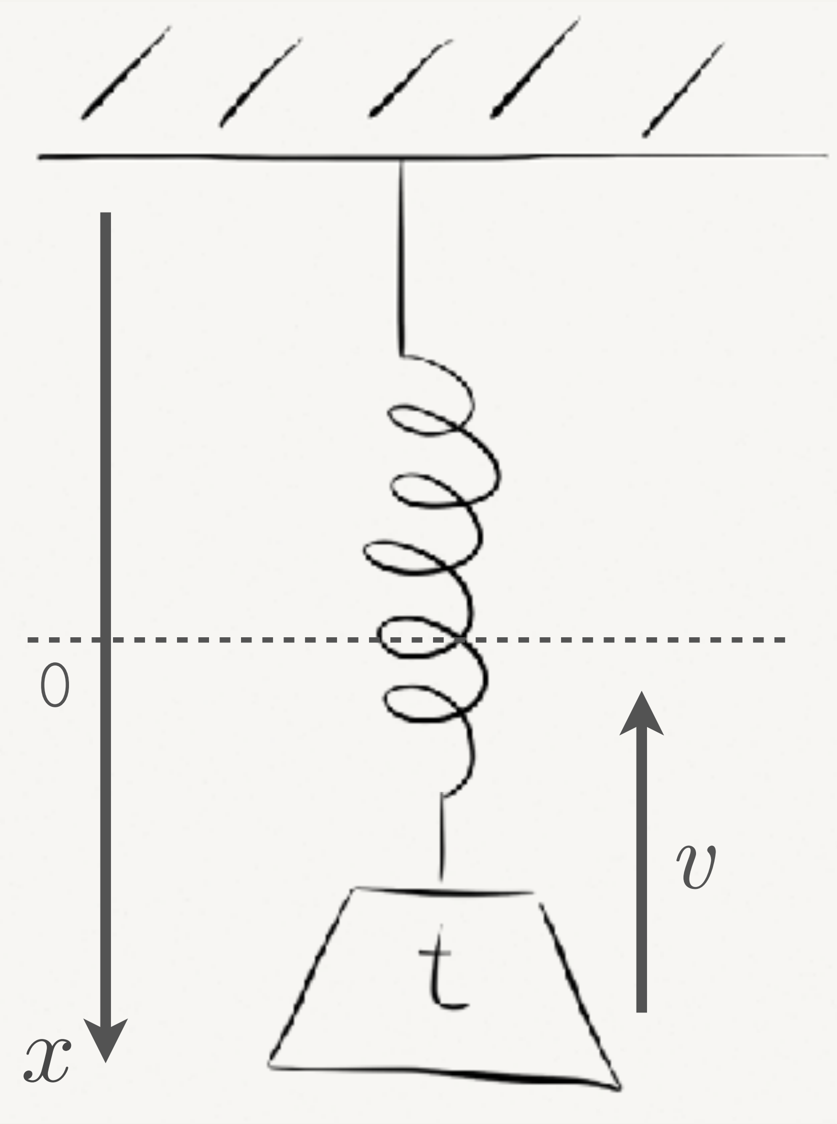
Allgemein:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Konkret:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \cdot \sin \omega_0 t$$



Einsetzen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$$
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$$

Gesamtenergie

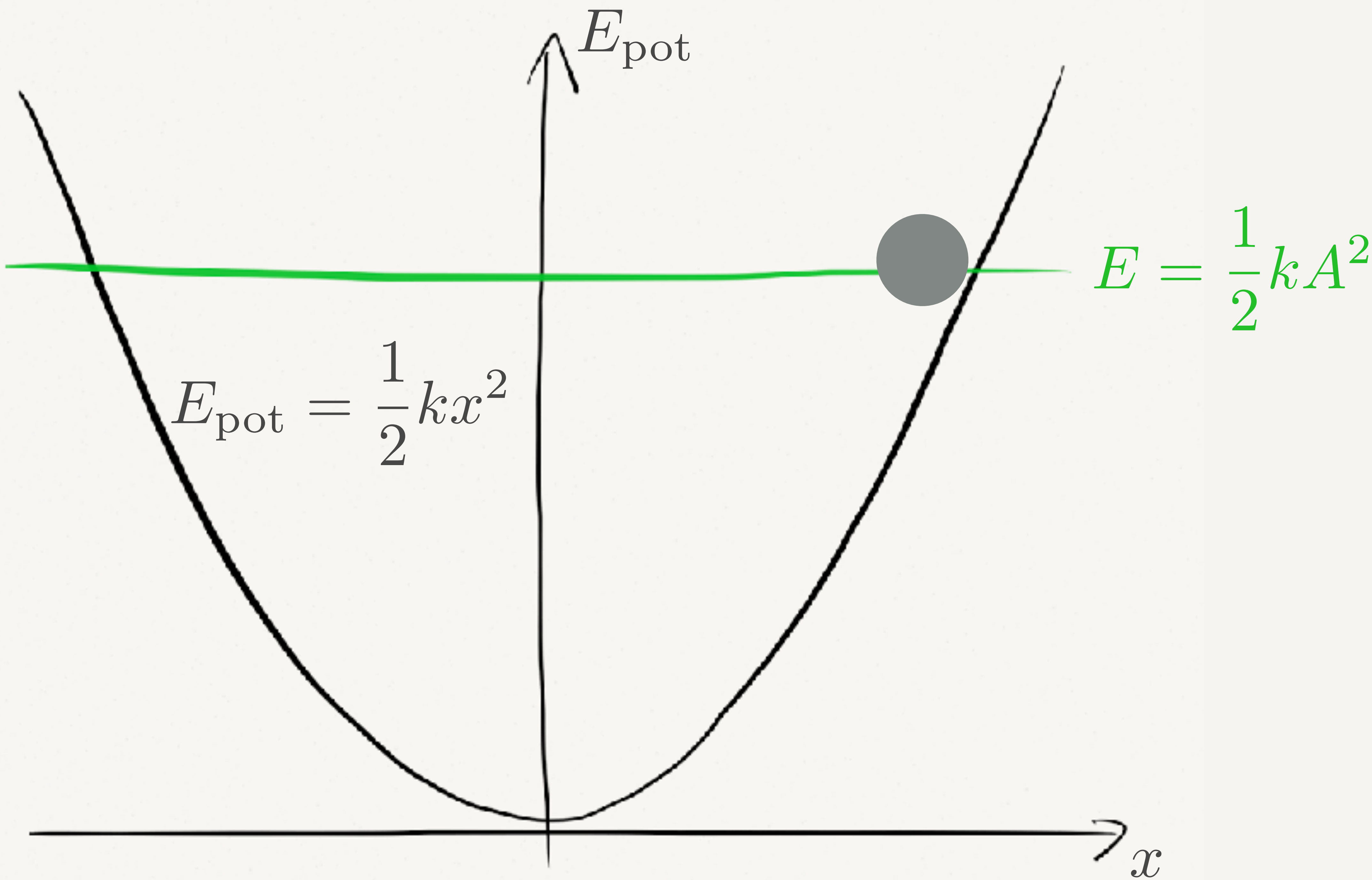
- Die Gesamtenergie hängt von der Federkonstante und der Amplitude der Schwingung ab.
- Die ganze Zeit wird potentielle in kinetische Energie umgewandelt, und dann umgekehrt.
- Die Gesamtenergie ist aber zeitlich konstant!
- Anmerkung: eine initiale Phase in der Lösung fällt zwischen der dritten und vierten Zeile heraus.

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cdot \left(\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t\right) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

Gesamtenergie



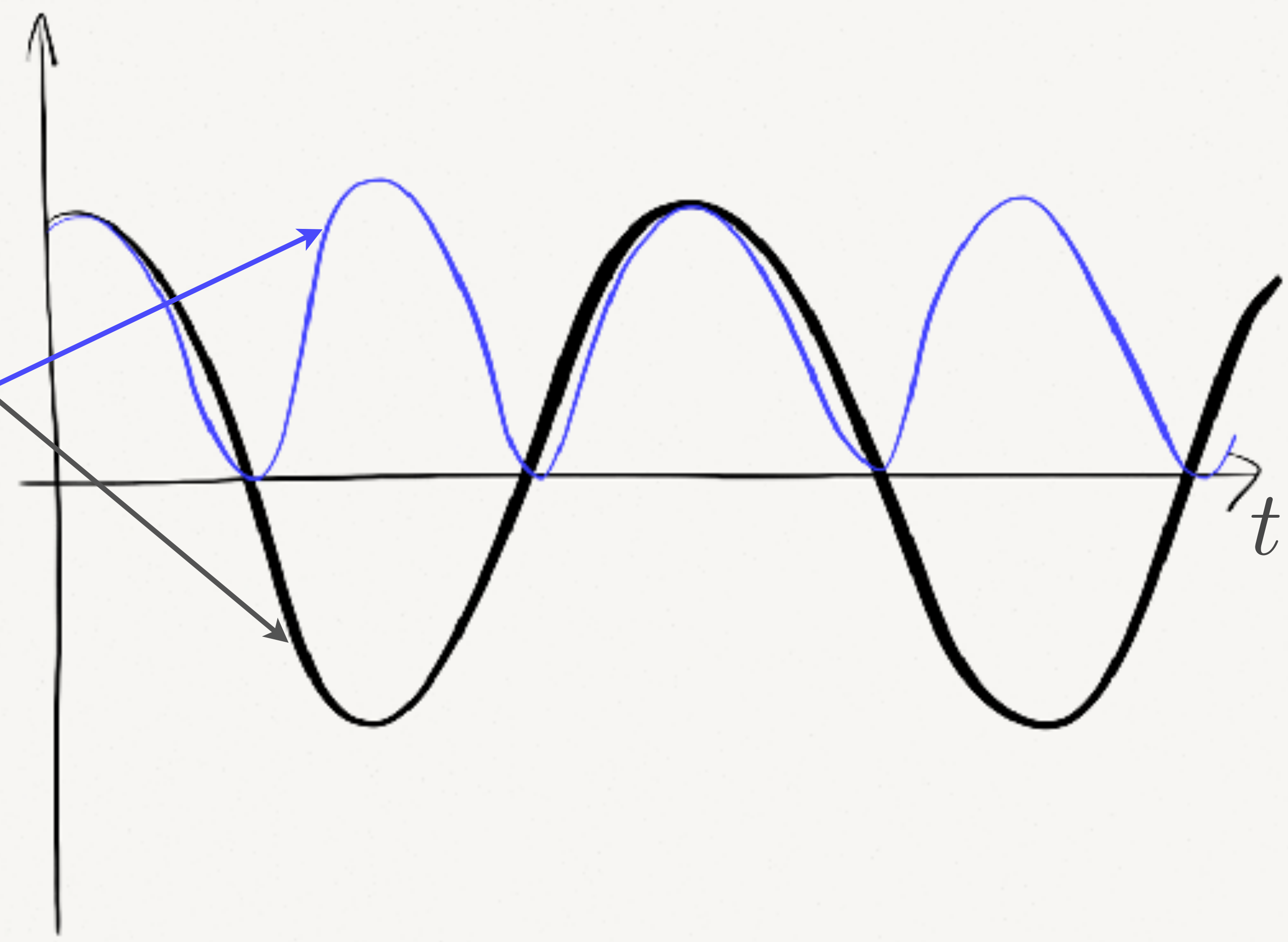
Zeitliches Verhalten der Energie

Schwingung:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$$



Zeitliches Verhalten der Energie

Schwingung:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

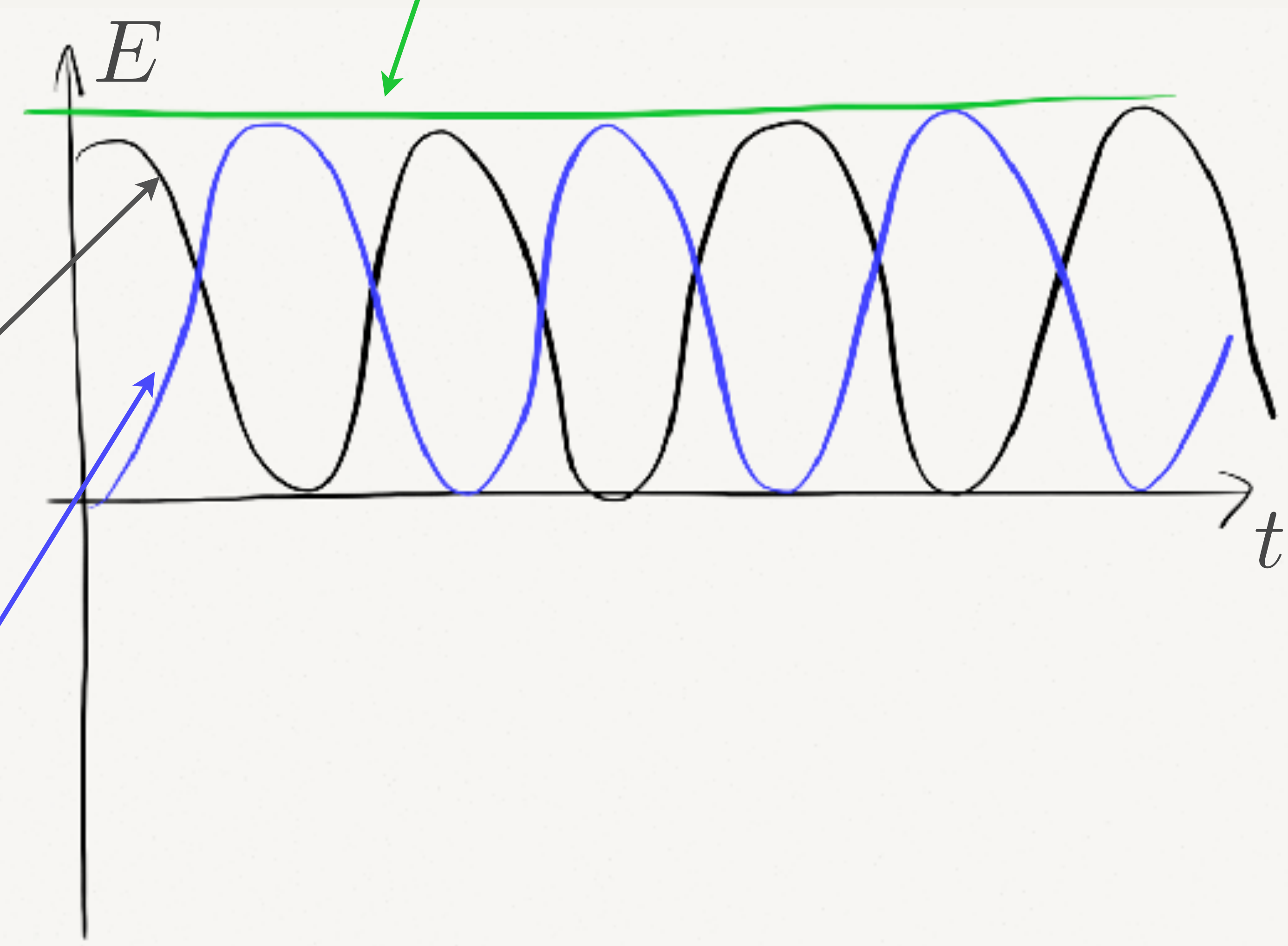
Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetische Energie:

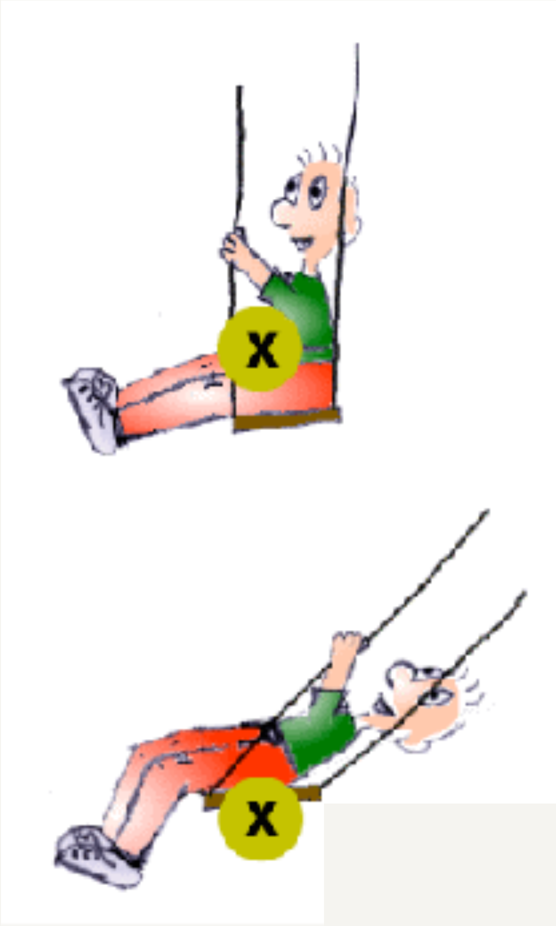
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$



Getriebener harmonischer Oszillator

- Ein schwingfähiges System kann auch von außen angetrieben werden.
- Dabei wird dem System Energie zugeführt.
- Im Allgemeinen werden dadurch Reibungsverluste ausgeglichen (z.B. bei Uhren).



Elektromagnetische Strahlung trifft auf ein Wassermolekül

Getriebener harmonischer Oszillator

Antreibende Kraft:

$$F_\mathrm{A} = F_0 \cos \omega_\mathrm{A} t$$

Einsetzen in das 2. Newton'sche Gesetz:

Newton   Summe aller Kräfte

$$m\ddot{x} = -kx + F_\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_\mathrm{A} t$$

bzw. $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_\mathrm{A} t$$

Getriebener harmonischer Oszillator

- Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Grades
- Im allgemeinen komplizierter zu lösen (Lösungsraum).
- Hier: bei einer Kosinus-förmigen Anregung wird das System auch mit der Anregungsfrequenz schwingen.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_\mathrm{A} t$$

Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(t) = A \cos \omega_\mathrm{A} t$$

Harmonischer Oszillator

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

Getriebener harmonischer Oszillator

Eine Lösung raten:

$$x(t) = A\cos\omega_\mathrm{A} t$$

Ableitung bilden:

$$\dot{x}(t) = -\omega_\mathrm{A}\sin\omega_\mathrm{A} t$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_\mathrm{A}^2\cos\omega_\mathrm{A} t$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$-\omega_\mathrm{A}^2 A\cos\omega_\mathrm{A} t + \omega_0^2 A\cos\omega_\mathrm{A} = \frac{F_0}{m}\cos\omega_\mathrm{A} t$$

$$\Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2\right) A = \frac{F_0}{m} \qquad \Rightarrow \boxed{A = \frac{F_0}{m\cdot\left(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2\right)}}$$

Getriebener harmonischer Oszillator

- Das System schwingt mit der Anregungsfrequenz, nicht mit der Resonanzfrequenz.
- Die Amplitude der Schwingung hängt vom Unterschied zwischen Anregungs- und Resonanzfrequenz ab.

Lösung:

$$x(t) = A \cos \omega_\mathrm{A} t$$

Mit der Amplitude:

$$A = \frac{F_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2)}$$

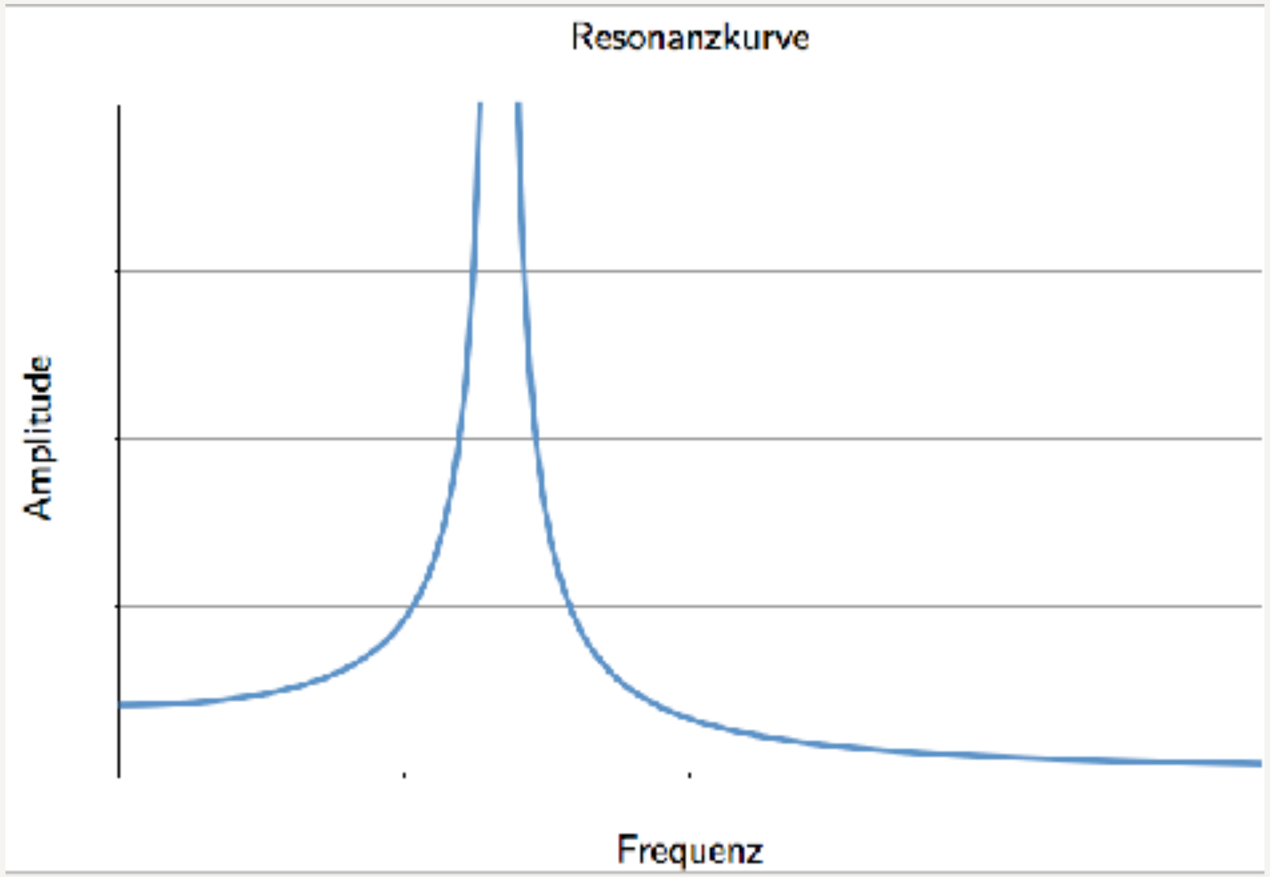
Getriebener harmonischer Oszillator

$$A = \frac{F_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_A^2)}$$

- Die kurve zeigt ein scharfes Maximum bei der Resonanzfrequenz
- Für kleine Frequenzen geht die Amplitude gegen die *statische Auslenkung:*

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

- Für große Frequenzen geht die Amplitude gegen Null.



Resonanzkatastrophe

http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

Tacoma Narrows Bridge



Resonanzkatastrophe

Dämpfung

- Keine Schwingung ist wirklich reibungsfrei.
  - Am ehesten noch durch Molekülschwingungen realisiert.
- Im Allgemeinen sehr schwer zu lösen.
- Hier: Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit.
  - Das entspricht dem Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten (Pendel).

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - F_\mathrm{R}$$

$$F_\mathrm{R} = \mu\dot{x}(t)$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - F_{\mathrm{R}}$$

$$F_{\mathrm{R}} = \mu\dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\quad 2\delta = \dfrac{\mu}{m}$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine Lösung raten:

Ableitung bilden:

Halt!

Einsetzen in die Differentialgleichung:

Komplexe Zahlen!

Komplexe Zahlen

Eulersche Formel

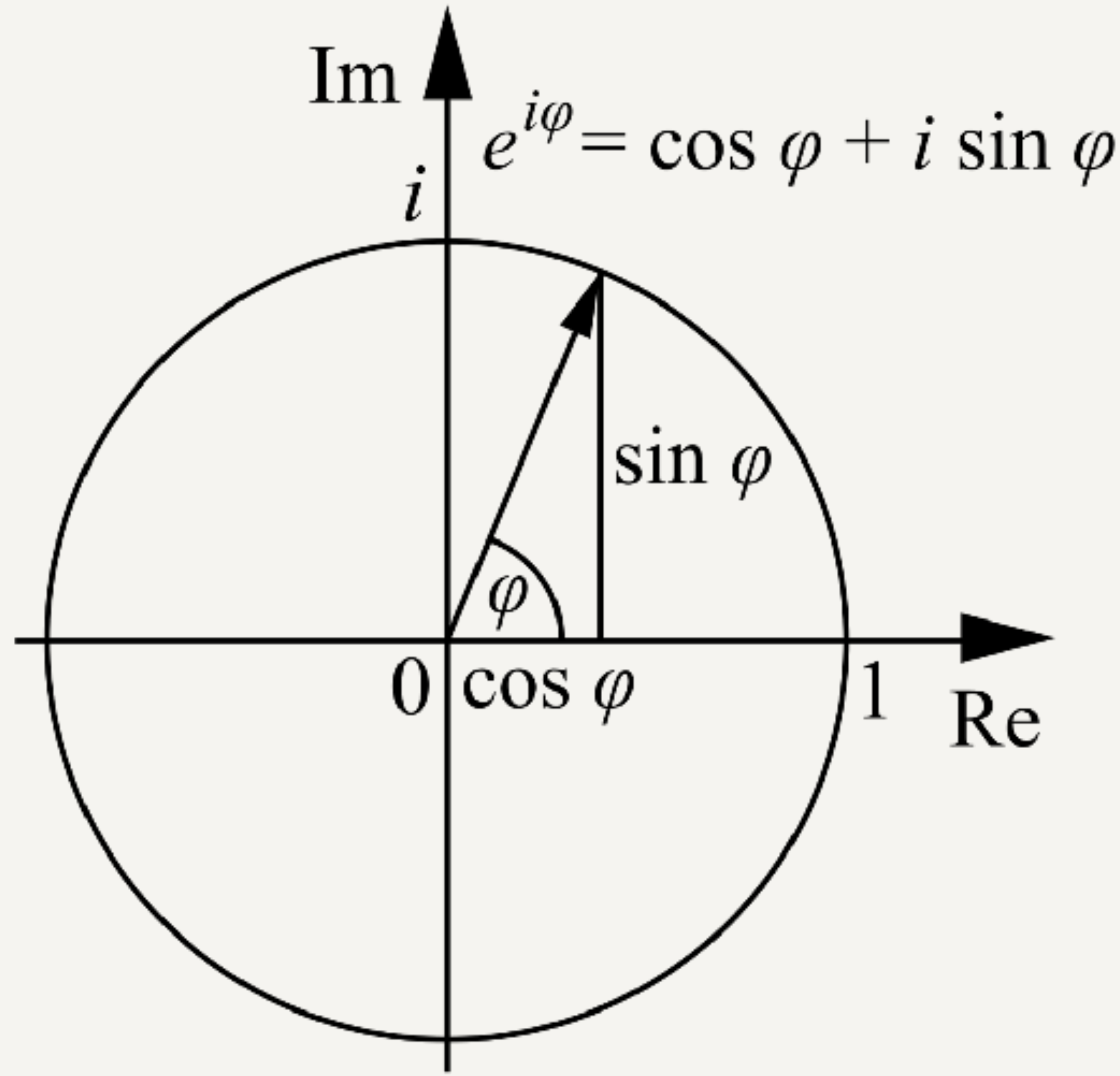
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Anders herum:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Komplexe Schwingung

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$



Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine Lösung raten:

$$x(t) = A\,e^{i\omega t}$$

Ableitung bilden:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= i\omega A\,e^{i\omega t}\\ &= i\omega x(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\omega^2 A\,e^{i\omega t}\\ &= -\omega^{x}(t)\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$x(t) = A\,e^{i\omega t}$$

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ableitungen einsetzen:

$$-\omega^2 x + 2\delta i\omega x + \omega_0^2 x = 0$$

Ausklammern:

$$(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2)x = 0$$

Quadratische Gleichung für ω:

$$\omega^2 - 2\delta i\omega - \omega_0^2 = 0$$

p-q-Formel:

$$\omega_\pm = -i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\omega_\pm = -i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$x(t) = A\, e^{i\omega t}$$

$$x_+(t) = A \exp\left\{ i \left(-i\delta + \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \right) t \right\}$$

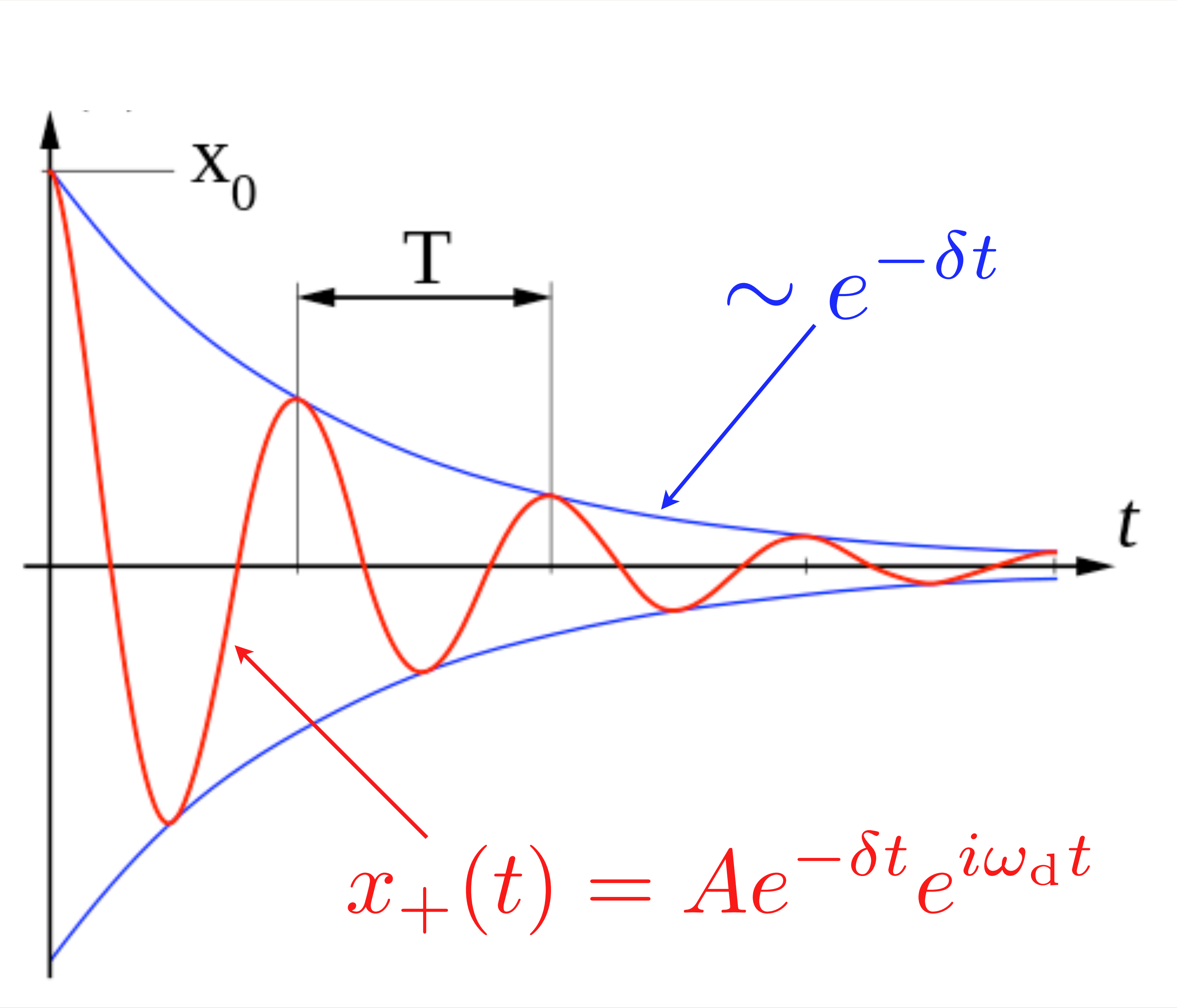
$$= A e^{-\delta t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t}$$

$$= A e^{-\delta t} e^{i\omega_\mathrm{d} t}$$

Verschobene Resonanzfrequenz:

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator



http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung

Harmonischer Oszillator

Differentialgleichung	Lösung	Zusatz
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$	
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_\mathrm{A} t$	$x(t) = A \cos \omega_\mathrm{A} t$	$A = \frac{F_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2)}$
$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x(t) = Ae^{-\delta t} e^{i\omega_\mathrm{d} t}$	$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$