Lösungen

1. Aufgabe

Kraft: $F = m \cdot a = m \dfrac{v}{t} = m \dfrac{s}{t^2}$

$$[F] = [m] \cdot \frac{[s]}{[t^2]} = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

Arbeit oder Energie: $W = F \cdot s$

$$[W] = [F] \cdot [s] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = J$$

Leistung: $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$

$$[P] = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s^3} = W$$

Spannung: Aus $P = U \cdot I$ folgt

$$[U] = \frac{[P]}{[I]} = kg \cdot \frac{m^2}{s^3} \cdot \frac{1}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3} = V$$

2. Aufgabe

- 1 Sekunde ist Basiseinheit
- 1 Stunde = 60 Minuten $\cdot \dfrac{60\,\text{Sekunden}}{1\,\text{Minute}}$ = 3600 Sekunden

  $1\,h = 3600\,s$ Stunde ist eine nichtkohärente Einheit im SI-System
- 1 Newton ist eine kohärente Einheit im SI-System

  $1\,N = 1\,kg \cdot \dfrac{m}{s^2}$
- 1 Volt ist eine kohärente Einheit im SI-System

  $1\,V = 1\,kg \cdot \dfrac{m^2}{A \cdot s^3}$
- 1 Kilogramm ist Basiseinheit
- 1 Kelvin ist Basiseinheit
- 1 Meile ist eine nichtkohärente Streckeneinheit

  $1\,mi = 5280\,ft \cdot 0{,}3408\,\dfrac{m}{ft} = 1609{,}3\,m$

- 1 Joule ist eine kohärente Einheit
  $1\,J = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
- 1 PS ist eine nichtkohärente Leistungseinheit
  $1\,PS = 735{,}75\,W$
- 1 Watt ist eine kohärente Einheit
  $1\,W = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^3}$
- 1 Kilocalorie ist eine nichtkohärente Einheit
  $1\,kcal = 4{,}1868\,kJ$
  $1\,cal = 4{,}1868\,J$
- 1 Kilowattstunde ist eine nichtkohärente Leistungseinheit $1\,kWh = 1000\,W \cdot 3600\,s = 3{,}6\,MWs$

3. Aufgabe

a) Einheit der Energie ist das Joule, abgekürzt J

Es gilt $W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{v}{t} \cdot s = m \cdot \frac{s}{t^2} \cdot s$

$$\underline{\underline{[W]}} = [m] \cdot \frac{[s^2]}{[t^2]} = \underline{\underline{kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = J}}$$

b) Ist $N = J/m$?

N = Newton ist die Einheit der Kraft.

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{s}{t^2} \Rightarrow \underline{\underline{[F] = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2} = N}} = J/m$$

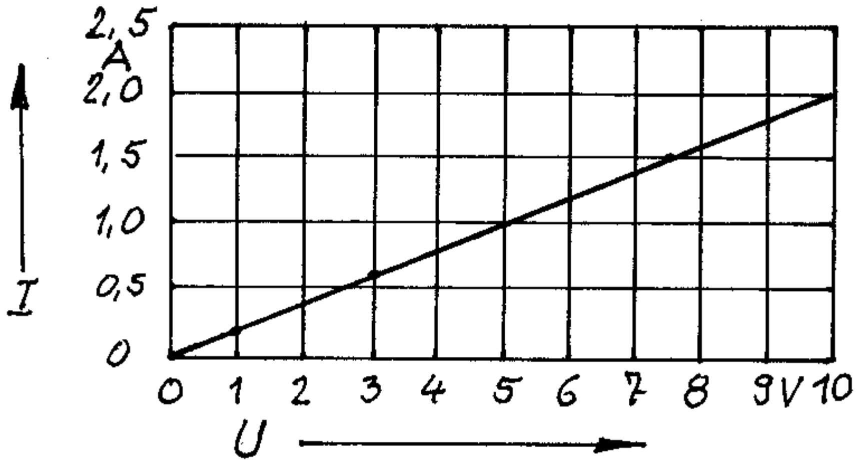
c) Leistung: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$ und $F = m \cdot a$

75 kg werden in 1 s auf die Höhe von 1 m gebracht:

$$P = m \cdot g \cdot \frac{s}{t} = 75\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1\,m}{1\,s} = 735{,}75\,kg \cdot \frac{m^2}{s^3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{1\,PS = 735{,}75\,W}}$$

4. Aufgabe



Funktionsverlauf ist eine Gerade $I = f(U)$

Die Geradengleichung lautet $y = mx + y|_{x=0} = mx + y_0$

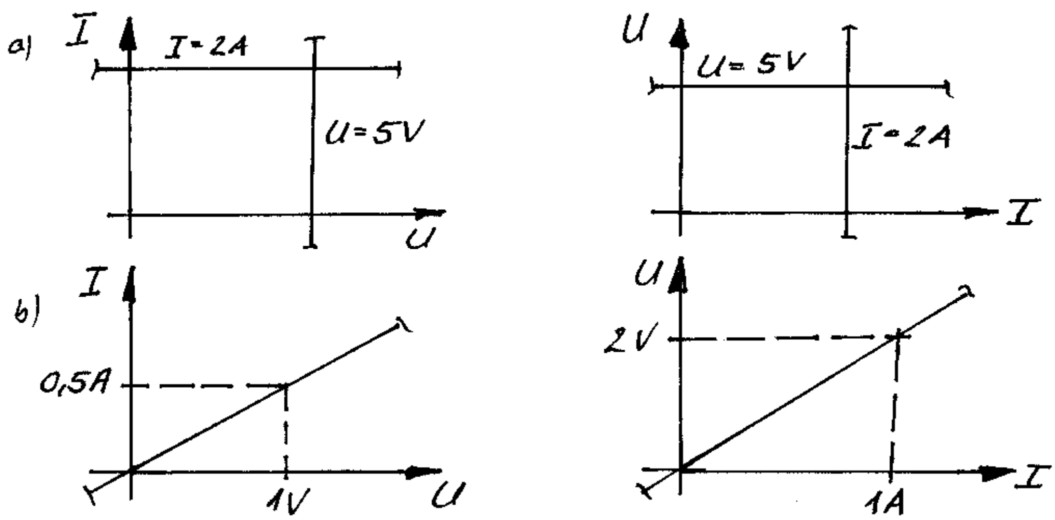
Übertragen auf die Aufgabe gilt:

$$I = m \cdot U + I_0$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{2A}{10V} = 0{,}2\,\frac{A}{V} \quad ; \quad I(x=0) = 0 = I_0$$

$\underline{\underline{I = 0{,}2 A/V \cdot U}}$ ist die gesuchte Gleichung.

5. Aufgabe



c) Gleichung $U = U_0 + m \cdot I$ ist eine Geradengleichung $U(I)$ mit der Steigung

$$m = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{\Delta U}{I_1 - I_2} = \frac{\Delta U}{\frac{U_0 - U_1}{R} - \frac{U_0 - U_2}{R}}$$

$$m = \frac{\Delta U}{\frac{-U_1 + U_2}{R}} = \frac{\Delta U}{-\frac{1}{R}\underbrace{(U_1 - U_2)}_{=\Delta U}} = -R$$

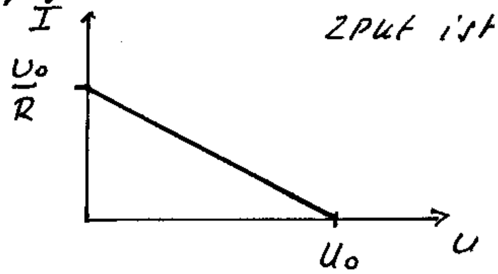
$m = -R$

Aus $U = U_0 - R \cdot I$ folgt

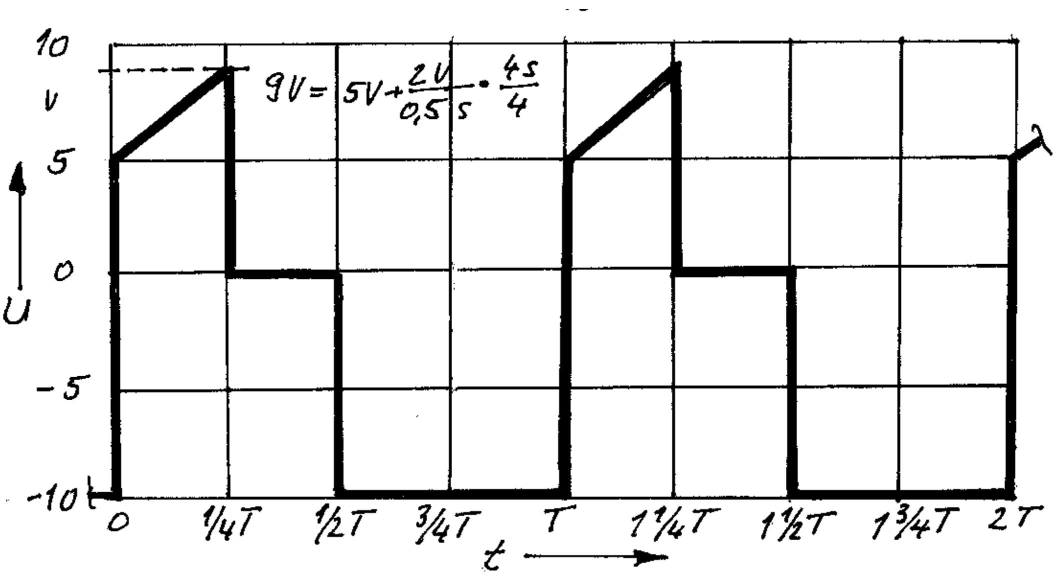
- für $U = 0 \Rightarrow 0 = U_0 - R \cdot I \Rightarrow I = \frac{U_0}{R}$
- und für $I = 0$ folgt $U = U_0$

Damit sind die beiden Punkte der Geradengleichung gefunden: 1Pkt ist $I = \frac{U_0}{R}$; $U = 0$

2Pkt ist $I = 0$; $U = U_0$



d)



6. Aufgabe

(A)
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < T/4 \\ 5V - \frac{40V}{T}(t - T/4) & \text{für } T/4 \le t < T/2 \\ 0 & \text{für } T/2 \le t < 3T/4 \\ 10V & \text{für } 3T/4 \le t < T \end{cases}$$

(B)
$$u(t) = \begin{cases} -\frac{40V}{T} \cdot t & \text{für } 0 \le t < T/4 \\ -10V + \frac{40V}{T}(t - \frac{T}{4}) & \text{für } T/4 \le t < 3T/4 \\ 10V - \frac{40V}{T}(t - 3T/4) & \text{für } 3T/4 \le t < T \end{cases}$$

(C)
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < T/4 \\ 10\,V & \text{für } T/4 \le t < T/2 \\ 0 & \text{für } T/2 \le t < T \end{cases}$$

(D)
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < 3T/8 \\ -10V + \frac{50V}{T}(t - \frac{3T}{8}) & \text{für } 3T/8 \le t < 7T/8 \\ 0 & \text{für } 7T/8 \le t < T \end{cases}$$

(E)
$$u(t) = \begin{cases} 10\,V & \text{für } 0 \le t < T/4 \\ 0 & \text{für } T/4 \le t\ T/2 \\ 10V & \text{für } T/2 \le t < 3T/4 \\ 0 & \text{für } 3T/4 \le t < T \end{cases}$$

(F)
$$u(t) = \begin{cases} -10V & \text{für } 0 \le t < T/4 \\ 10V & \text{für } T/4 \le t < T/2 \\ -10V & \text{für } T/2 \le t < 3T/4 \\ 10V & \text{für } 3T/4 \le t < T \end{cases}$$

7. Aufgabe

a) $v = \frac{s}{t}$

b) $\frac{v}{km/h} \cdot km/h = \frac{\frac{s}{m} \cdot m}{\frac{t}{s} \cdot s}$

$$\frac{v}{km/h} = \frac{s/m}{t/s} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{h}{km} = \frac{s/m}{t/s} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{3600\,s}{1000\,m}$$

$$\underline{\underline{\frac{v}{km/h} = 3{,}6 \cdot \frac{s/m}{t/s}}}$$

Bei $s = 300\,m$ in $t = 6\,s$ ergibt sich eine Geschwindigkeit von $\frac{v}{km/h} = 3{,}6 \cdot \frac{\frac{300\cancel{m}}{\cancel{m}}}{\frac{6\cancel{s}}{\cancel{s}}} = 180$

$$\underline{\underline{v = 180\ \frac{km}{h}}}$$

c) Geschwindigkeit in Meilen:

Es gilt $1\,\text{Meile} = 1{,}61\,km$

$1\,km = 0{,}62112\ \text{Meile} = 0{,}62112\,mi$

$$\frac{v}{0{,}62112\,\frac{mi}{h}} = 3{,}6 \cdot \frac{s/m}{t/s}$$

$$\frac{v}{mi/h} = 3{,}6 \cdot 0{,}62112 \cdot \frac{s/m}{t/s} = 2{,}236 \cdot \frac{\frac{s}{m}}{t/s}$$

$$\underline{\underline{v}} = 2{,}236 \cdot \frac{300}{6}\ \frac{mi}{h} = \underline{\underline{111{,}8\ \frac{mi}{h}}}$$

d) Aus $v = \frac{s}{t}$ folgt $\frac{v}{km/h} \cdot \frac{km}{h} = \frac{\frac{s}{mm} \cdot mm}{\frac{t}{ms} \cdot ms} = \frac{\frac{s}{mm} \cdot 10^{-3}\,m}{\frac{t}{ms} \cdot 10^{-3}\,s}$

$$\underline{\underline{\frac{v}{km/h}}} = \frac{\frac{s}{mm}}{\frac{t}{ms}} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{3600\,s}{1000\,m} = \underline{\underline{3{,}6 \cdot \frac{s/mm}{t/ms}}}$$

$$\underline{\underline{V_1}} = 3{,}6 \cdot \frac{\frac{30\,mm}{mm}}{\frac{18\,ms}{ms}} \cdot \frac{km}{h} = 3{,}6 \cdot \frac{30}{18}\,\frac{km}{h} = \underline{\underline{6\,\frac{km}{h}}}$$

$$\underline{\underline{V_2}} = 3{,}6 \cdot \frac{300}{18}\,\frac{km}{h} = \underline{\underline{60\,\frac{km}{h}}}$$

$$\underline{\underline{V_3}} = 3{,}6 \cdot \frac{250}{18} \cdot \frac{km}{h} = \underline{\underline{50\,\frac{km}{h}}}$$

8. Aufgabe

a)
$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\left(\frac{F}{GN}\right) \cdot GN = \gamma \cdot \frac{(m_1/kg) \cdot kg \cdot (m_2/kg) \cdot kg}{(r/km)^2 \cdot (km)^2}$$

$$\left(\frac{F}{GN}\right) = \gamma \cdot \frac{\left(\frac{m_1}{kg}\right) \cdot \left(\frac{m_2}{kg}\right)}{\left(\frac{r}{km}\right)^2} \cdot \frac{kg \cdot kg}{GN \cdot (km)^2}$$

Es ist
$$\frac{kg \cdot kg}{GN \cdot (km)^2} = \frac{kg^2}{10^9 \cdot N \cdot 10^6\,m^2} = \frac{kg^2}{10^{15} \cdot \frac{kg\,m}{s^2} \cdot m^2}$$

Einsetzen liefert:
$$\underline{\underline{\left(\frac{F}{GN}\right) = \gamma \cdot \frac{(m_1/kg) \cdot (m_2/kg)}{(r/km)^2} \cdot \frac{kg \cdot s^2}{m^3} \cdot 10^{-15}}}$$

b)
$$\left(\frac{F}{GN}\right) = \frac{6{,}672 \cdot 10^{-11} \cdot m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{kg \cdot s^2 \cdot 10^{-15}}{m^3} \cdot \frac{(m_1/kg)(m_2/kg)}{(r/km^2)}$$

$$\underline{\underline{\frac{F}{GN} = 6{,}672 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{(m_1/kg) \cdot (m_2/kg)}{(r/km)^2}}}$$

c)
$$\frac{F}{GN} = 6{,}672 \cdot 10^{-26}\, \frac{\left(\frac{7{,}34 \cdot 10^{22}\,kg}{kg}\right)\left(\frac{5{,}68 \cdot 10^{24}\,kg}{kg}\right)}{\left(\frac{3{,}8 \cdot 10^5\,km}{km}\right)^2}$$

$$\frac{F}{GN} = \frac{6{,}672 \cdot 7{,}34 \cdot 5{,}68}{3{,}8^2} \cdot 10^{-26} \cdot 10^{22} \cdot 10^{24} \cdot 10^{-10}$$

$$\underline{\underline{F = 19{,}26 \cdot 10^{10}\,GN}} = 19{,}26 \cdot 10^{10} \cdot 10^9\,N$$

$$\underline{F = 1{,}926 \cdot 10^{20}\,N}$$

9. Aufgabe

$$R = \frac{l}{\varkappa \cdot A}$$

1. Teil:

$$\frac{R}{k\Omega} \cdot k\Omega = \frac{\frac{l}{m} \cdot m}{\varkappa \cdot \frac{A}{cm^2} \cdot cm^2}$$

$$\frac{R}{k\Omega} = \frac{\frac{l}{m}}{\frac{A}{cm^2}} \cdot \frac{m}{\varkappa \cdot cm^2 \cdot k\Omega}$$

$$\frac{m}{\varkappa \cdot cm^2 \cdot k\Omega} = \frac{m}{34{,}8 \frac{m \cdot \cancel{S}}{mm^2} \cdot cm^2 \cdot 10^3 \cancel{\Omega}} = \frac{mm^2}{34{,}8 \cdot 10^3 \, cm^2}$$

$$= \frac{10^{-6} \cdot \cancel{m^2}}{34{,}8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot \cancel{m^2}} = \frac{10^{-2}}{34{,}8 \cdot 10^3} = \frac{10^{-5}}{34{,}8}$$

$$\underline{\underline{\frac{R}{k\Omega}}} = \frac{10^{-5}}{34{,}8} \cdot \frac{l/m}{A/cm^2} = \underline{\underline{2{,}87 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{l/m}{A/cm^2}}}$$

2. Teil: $l = \varkappa \cdot R \cdot A$

$$l/cm \cdot cm = \varkappa \cdot \frac{R}{m\Omega} \cdot m\Omega \cdot \frac{A}{cm^2} \cdot cm^2$$

$$\frac{l}{cm} = \frac{R}{m\Omega} \cdot \frac{A}{cm^2} \cdot \frac{\varkappa \cdot 10^{-3} \Omega \cdot cm^2}{cm}$$

$$\frac{l}{cm} = \frac{R}{m\Omega} \cdot \frac{A}{cm^2} \cdot 34{,}8 \frac{\cancel{S} \cdot m}{mm^2} \cdot 10^{-3} \cancel{\Omega} \cdot cm$$

$$\frac{l}{cm} = \frac{R}{m\Omega} \cdot \frac{A}{cm^2} \cdot 34{,}8 \cdot \frac{\cancel{m} \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}01 \cancel{m}}{10^{-6} \cancel{m^2}}$$

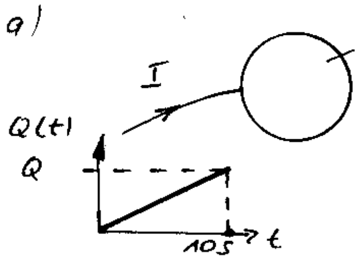
$$\frac{l}{cm} = 34{,}8 \cdot 10 \cdot \frac{R}{m\Omega} \cdot \frac{A}{cm^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{l}{cm} = 348 \cdot \frac{R}{m\Omega} \cdot \frac{A}{cm^2}}}$$

Lösungen

1. Aufgabe

a)



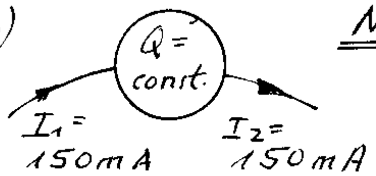
Auf die Elektrode ist nach 10 s d. Ladg.

$Q = I \cdot t = 150\,mA \cdot 10\,s = 1500\,mA \cdot s$

$\underline{Q = 1{,}5\,As}$ transportiert worden.

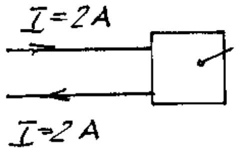
$\underline{\underline{N}} = Q/e = 1{,}5\,A / 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As = \underline{\underline{9{,}4 \cdot 10^{18}}}$

b)



Damit die Ladung Q auf der Elektrode konstant bleibt, muß die vom Strom I_1 auf die Elektrode transportierte Ladung sofort vom Strom I_2 über die andere Leitung abtransportiert werden. Daher weist der Strompfeil von I_2 weg von der Elektrode. Der Strom von $I_2 = 150\,mA$ ist gleich dem Strom I_1.

c)



Da elektrische Ladung nicht verschwinden kann, muß die über die obere Leitung in das Bauelement hineintransportierte Ladung genauso groß sein, wie die über die untere Leitung aus dem Bauelement heraustransportierte Ladung.

$$\Rightarrow Q_{zu} = Q_{ab}$$

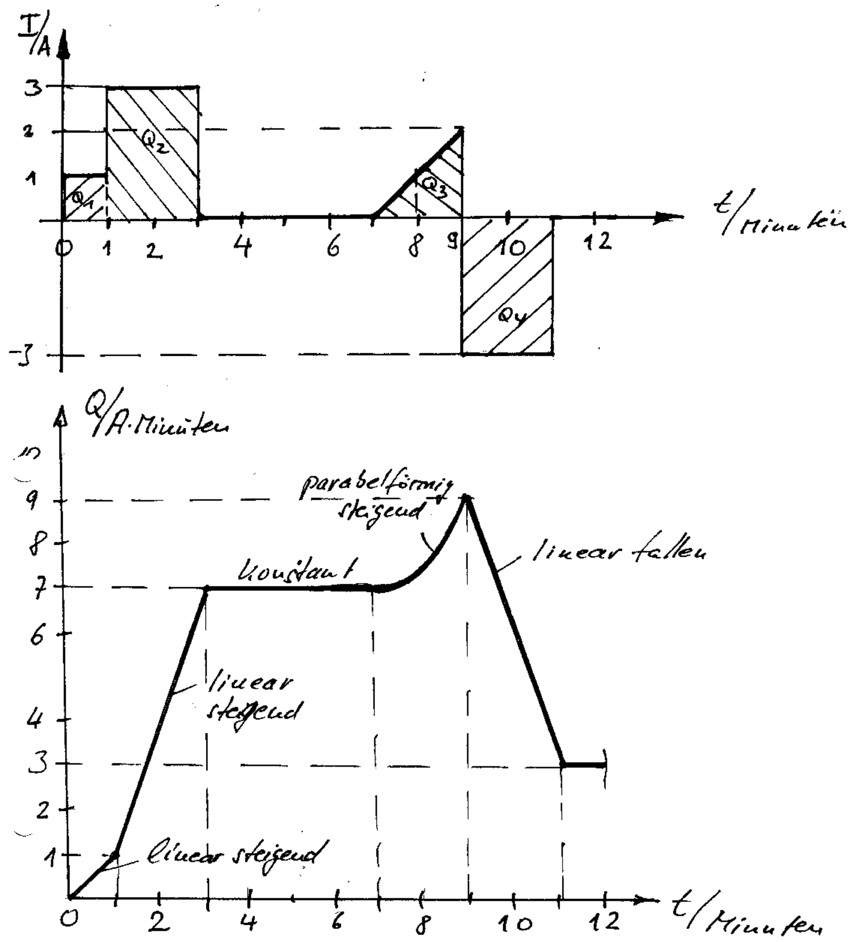
$$I_1 \cdot t = I_2 \cdot t \rightarrow I_1 = I_2$$

$$Q = I_1 \cdot t = I_2 \cdot t = 2\,A \cdot 33\,min \cdot \frac{60\,s}{min}$$

$$\underline{Q = 3960\,As}$$

$$\underline{\underline{N}} = Q/e = 3960\,As / 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{22}}}$$

d)



Strom und Ladung

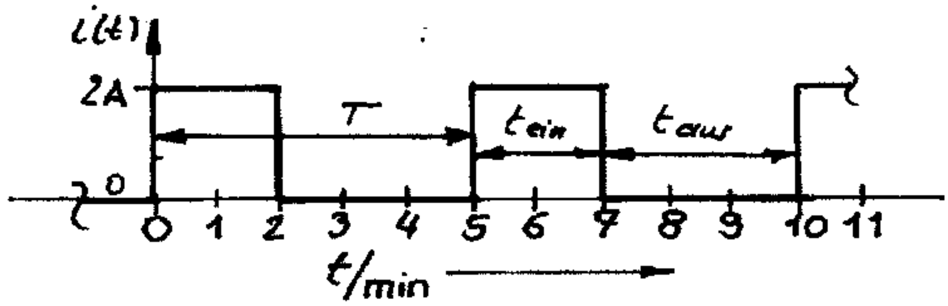
- Nach einer Minute wurde die Ladung $Q_1 = I_1 \cdot t_1 = 1\text{ A} \cdot 1\text{ min} = 1\text{ Amin}$ transportiert
- In der folgenden Zeit von 1 Minute bis 3 Minute wird die Ladung $Q_1 = I_1 \cdot (t_1 - t_2) = 3\text{ A} \cdot 2\text{ min} = 6\text{ Amin}$ transportiert. Diese Ladung addiert sich zur schtransportierten Ladung auf $Q_3 = Q_1 + Q_2 = 7$ Amin.
- In der Zeit von 3 Minuten bis 7 Minuten fließt kein Strom, die Ladung bleibt konstant.
- In der Zeit von 7 Minuten bis 9 Minuten steigt der Strom linaear an. Daher ist Ladungszunahme zunächst gering und wird dann immer stärker. In dieser Zeitspanne wird die Ladung $Q\,3 = I_{\text{max}} \cdot 2$ Minuten/2 = 2 A · 1 Minute = 2 Amin. DIese Ladung addiert sich zur Ladung Q_3 auf insgesamt 9 Amin.

  Es gilt mit $$i(t) = \frac{2\text{ A}}{2\text{ min}} \cdot t$$

  $$Q(t) = \int \frac{2\,A}{2\text{ min}} t \cdot \mathrm{d}t = \frac{1\text{ A}}{2\text{ min}} \cdot t^2$$

- Anschließend wird der Strom negativ, daher wird die Ladung $Q_{\text{ab}} = -3\text{A} \cdot 2\text{ min} = -6$ Amin abgezogen.
- Im weiteren Verlauf fließt kein Strom mehr, die Ladung bleibt nun konstant auf 3 Amin.

e)



Die Periodendauer beträgt

$T = 5 \cdot 60\,s = 300\,s.$

(Die Periodizität der Schwingung wird durch die Abrißkanten angedeutet.)

Innerhalb der Zeit $t_{ein} = 2\,min$ ist der Strom konstant. Innerhalb dieser Zeit kann er als Gleichstrom betrachtet werden, da schon nach einer sehr kurzen Zeit (ca. 100 ms) alle Ausgleichsvorgänge abgeklungen sind. Als Funktion der Zeit betrachtet, bildet er eine zeitabhängige Funktion

$$i(t) = \begin{cases} I & \text{für } 0 \le t < 0{,}4T \\ 0 & \text{für } 0{,}4T \le t < T \end{cases}$$

mit $I = 2A$.

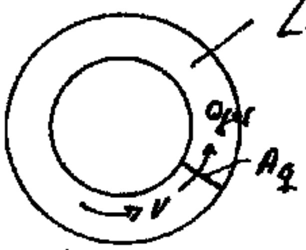
Die Einschaltdauer ist

$$\underline{\underline{ED}} = \frac{t_{ein}}{t_{ein} + t_{aus}} = \frac{2\,min}{2\,min + 3\,min} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

Man spricht auch von einem

$$\underline{\underline{\text{Tastverhältnis}}} = \frac{t_{ein}}{t_{aus}} = \frac{2}{3} = \underline{\underline{1:1{,}5}}$$

f)



Ladung im Ring beträgt:

$Q_{ges} = N \cdot e = 4 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{AS}$

$Q_{ges} = 6{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{AS}$

Nach einem Umlauf (Umlaufzeit $t_{uml.} = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$) ist die gesamte Ladung $Q_{ges} = 6{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{AS}$ durch den Querschnitt A_q getreten. Das ergibt einen Strom von

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_{ges}}{t_{uml.}} = \frac{6{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{AS}}{5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}$$

$$\underline{\underline{I = 1{,}28 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{A} = 0{,}128\,\mu\mathrm{A}}}$$

g) Bewegt sich nur ein Elektron auf der Umlaufbahn ist $Q_{ges} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{AS}$. Beträgt die Umlaufzeit $t_{uml} = 0{,}1\,\mathrm{ns}$, ergibt das einen Strom von

$$I = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{AS}}{0{,}1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 16 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{\underline{I = 1{,}6\,\mathrm{nA}}}$$

2. Aufgabe

a) Die Tabelle ist zu ergänzen

Werkstoff	Leitfähigkeit κ in Sm/mm^2	Dichte ρ in g/cm^3	Atomgewicht in g/mol	Raumladungsdichte ρ in As/mm^3	Feldstärke E in V/m bei $S = 1\ A/mm^2$	Geschwindigkeit v in mm/s bei S=1 A/mm^2
Silber	62,5	10,5	108	9,37	0,016	0,107
Kupfer	58,0	8,92	63,5	13,5	0,017	0,074
Gold	45,5	19,3	197	9,44	0,022	0,106
Aluminium	37,0	2,7	27	9,64	0,027	0,104
Eisen	10,0	7,85	55,8	13,6	0,1	0,074

b) Kupferleiter $d = 3{,}5\,mm$, $I = 30\,mA$;

$$Q = I \cdot t = 30\,mA \cdot 4s = 30 \cdot 10^{-3} A \cdot 4s$$

$$Q = 120 \cdot 10^{-3} As$$

$$N = Q/e = 120 \cdot 10^{-3} As / 1{,}9 \cdot 10^{-19} As$$

$$\underline{\underline{N = 6.23 \cdot 10^{17} \text{ Elektronen}}}$$

$$S = \frac{I}{A} = \frac{30\,mA}{3{,}5^2 \cdot mm^2 \cdot \pi/4}$$

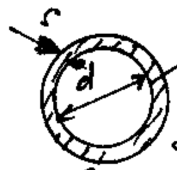
$$S = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{3{,}5^2\, \pi} \frac{A}{mm^2} = 0{,}003118 \frac{A}{mm^2}$$

$$\underline{\underline{V =}}\ S/\rho = \frac{0{,}003118\ A/mm^2}{13{,}5\ As/mm^3} = \underline{\underline{0{,}23 \cdot 10^{-3}\, mm/s}}$$

3. Aufgabe

a) $$\underline{\underline{R =}} \frac{\rho \cdot l}{A} = 0{,}96\,\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot \frac{1m}{1mm^2} = \underline{\underline{0{,}96\,\Omega}}$$

b) $$R = \frac{l \cdot \rho}{A};$$



Dies ist die leitfähige Schicht mit dem Querschnitt $A \approx d \cdot \pi \cdot s$

$$R = \frac{l \cdot \rho}{d \cdot s \cdot \pi}$$

$$\left(\frac{R}{\Omega}\right)\Omega = \frac{\left(\frac{l}{cm}\right) cm \cdot \left(\frac{\rho}{\Omega \cdot mm^2/m}\right) \cdot \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}}{\pi \cdot \left(\frac{d}{mm}\right) mm \cdot \left(\frac{s}{\mu m}\right) \mu m}$$

$$\left(\frac{R}{\Omega}\right) = \frac{(l/cm) \cdot (\rho/\Omega \cdot mm^2/m)}{(d/mm)(s/\mu m)} \cdot \underbrace{\frac{cm \cdot \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}}{\pi \cdot \Omega \cdot mm \cdot \mu m}}_{= \frac{10}{\pi}}$$

$$\left(\frac{R}{\Omega}\right) = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{(l/cm) \cdot (\rho/\Omega \cdot mm^2/m)}{(d/mm) \cdot (s/\mu m)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{l}{cm} = \frac{\pi}{10}\cdot\frac{(R/\Omega)\cdot(d/mm)(s/\mu m)}{(\rho/\Omega\cdot mm^2/m)}$$

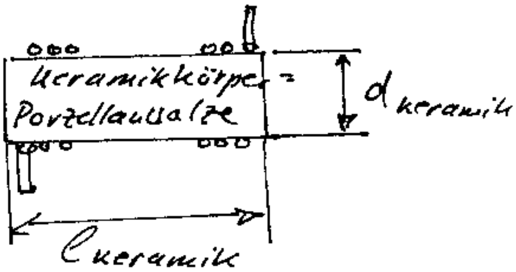
$$\frac{l}{cm} = \frac{\pi}{10}\cdot\frac{10\cdot 4\cdot 1{,}5}{10} = 1{,}88$$

$$\underline{\underline{l = 1{,}88\,cm}}$$

c)

$$R = \frac{\rho\, l}{A} \Rightarrow l = \frac{R\cdot A}{\rho} = \frac{500\,\Omega\cdot(0{,}2\,mm)^2(\pi/4)}{0{,}5\,\Omega\cdot mm^2/m}$$

$$\underline{l = 31{,}42\,m}$$



Windungen: $N = \frac{l_{ges}}{l_{umf.}} = \frac{l_{ges}}{\pi\cdot d}$

$$N = \frac{31{,}42\,m}{\pi\cdot 0{,}04\,m} = 250\ Wdg.$$

$$\underline{\underline{l_{keramik}}} = N\cdot d_{Draht} = 250\cdot 0{,}2\,mm = \underline{\underline{50\,mm}}$$

Da der Draht isoliert ist, muß zur Aufnahme der Isolation der Körper etwas länger sein.

4. Aufgabe

a) $U = R\cdot I$

$$R = \frac{\rho\, l}{A} = 0{,}96\,\frac{\Omega\cdot mm^2}{m}\cdot\frac{0{,}75\,m}{2\,mm^2} = 0{,}36\,\Omega$$

$$\underline{\underline{U}} = 0{,}36\,\Omega\cdot 1{,}8\,A = \underline{\underline{0{,}648\,V}}$$

b) $U_{Berührungsspg.} = R_{Mensch}\cdot I_{max} = 1\,k\Omega\cdot 50\,mA$

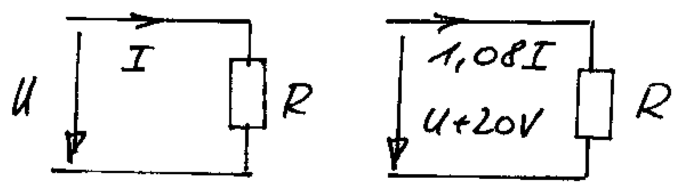
$$\underline{\underline{U_{Berührungsspg.} = 50\,V}}$$

c) $U = R\cdot I = \frac{l}{\varkappa A}\cdot I = \frac{I}{\varkappa A}\cdot l$

$$U = \frac{6\,A\cdot l}{58\,\frac{S\cdot m}{mm^2}\cdot 1\,mm^2\cdot\pi/4} = \frac{6\cdot 4}{58\cdot\pi}\left(\frac{l}{m}\right)V = 0{,}132\left(\frac{l}{m}\right)\cdot V$$

$$l = 5\,m \Rightarrow \underline{\underline{U = 0{,}132\cdot 5\,V = 0{,}66\,V}}$$

d) Das Spannungs-Stromverhältnis am Widerstand ist konstant:



$$R = \frac{U}{I} = \frac{U + 20\,V}{1{,}08\,I}$$

Daraus $U \cdot 1{,}08 = U + 20\,V$

$$\underline{\underline{U}} = \frac{20\,V}{1{,}08 - 1} = \frac{20\,V}{0{,}08} = \underline{\underline{250\,V}}$$

e) $U = const = 230\,V = I \cdot R = (I - 2A)(R + 289\,\Omega)$

Aus $230\,V = R \cdot I$ folgt $I = 230\,V / R$. Einsetzen liefert:

$$230\,V = \left(\frac{230\,V}{R} - 2A\right)(R + 289\,\Omega)$$

$$\cancel{230\,V} = \cancel{230\,V} - R \cdot 2A + \frac{230\,V}{R} \cdot 289\,\Omega - 2A \cdot 289\,\Omega$$

$$R \cdot 2A + 2A \cdot 289\,\Omega = \frac{230\,V \cdot 289\,\Omega}{R} \qquad \Big| \cdot \frac{R}{2A}$$

$$R^2 + R \cdot 289\,\Omega = 33\,235\,\Omega^2 \qquad \Big| + \left(\frac{289}{2}\Omega\right)^2 \text{ quadr. Ergänzg.}$$

$$R^2 + R \cdot 289\,\Omega + \left(\frac{289}{2}\Omega\right)^2 = \left(\frac{289}{2}\Omega\right)^2 + 33\,235\,\Omega^2$$

$$R + 144{,}5\,\Omega = \sqrt{54\,115{,}25\,\Omega^2} = \pm 232{,}63\,\Omega$$

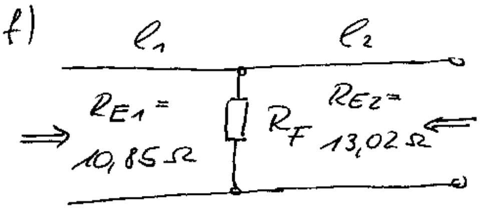
$$R_{1,2} = -144{,}5\,\Omega + 232{,}63\,\Omega$$

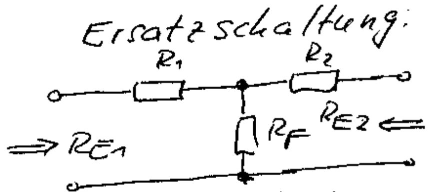
$$\underline{\underline{R = 88{,}13\,\Omega}} \quad \text{(nur pos. Widerstand!)}$$

Probe: $I_1 = \frac{U}{R} = \frac{230\,V}{88{,}13\,\Omega} = 2{,}61\,A$

$$I_2 = \frac{U}{R + 289\,\Omega} = \frac{230\,V}{(88{,}13 + 289)\,\Omega} = 0{,}61\,A$$

f)





1.) Widerstand $R_L = R_1 + R_2$ der fehlerfreien Leitung:

$$R_L = 2 \cdot \frac{l}{\varkappa A} = 2 \frac{150\,m}{58 \frac{Sm}{mm^2} \cdot 0{,}6^2 mm^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 18{,}39\,\Omega$$

2.) Nach dem Fehlerfall

$R_{E1} = R_1 + R_F$; $R_{E2} = R_2 + R_F$

Subtraktion ergibt: $R_{E1} - R_{E2} = R_1 - R_2$

3) Somit folgt:

$R_1 - R_2 = R_{E1} - R_{E2} = 10{,}85\,\Omega - 13{,}02\,\Omega$

$R_1 + R_2 = 18{,}39\,\Omega$

Addition ergibt $2R_1 = 10{,}85\,\Omega - 13{,}0\,\Omega + 18{,}39\,\Omega$

Daraus folgt $\underline{R_1 = 8{,}11\,\Omega}$

$\underline{\underline{R_2}} = R_L - R_1 = 18{,}39\,\Omega - 8{,}11\,\Omega = \underline{\underline{10{,}28\,\Omega}}$

$\underline{\underline{R_F}} = R_{E1} - R_1 = R_{E2} - R_2 = \underline{\underline{2{,}74\,\Omega}}$

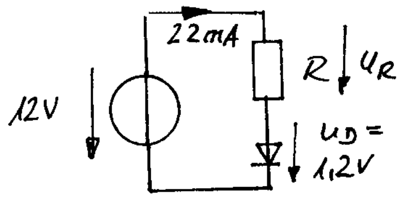
Aus R_1 wird die Länge l_1 bestimmt:

$$\underline{\underline{l_1}} = \frac{R_1 \cdot \varkappa \cdot A}{2} = \frac{8{,}11\,\Omega \cdot 58\,S \cdot m/mm^2 \cdot 0{,}6^2 mm^2 \cdot \pi/4}{2} = \underline{\underline{66{,}5\,m}}$$

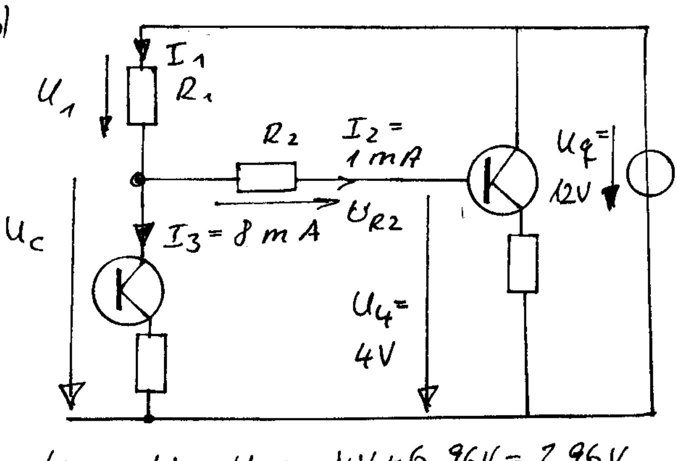
5. Aufgabe

a) $R = \frac{U_R}{I} = \frac{U_q - U_D}{I}$

$\underline{\underline{R}} = \frac{12V - 1{,}2V}{22\,mA} = \underline{\underline{490{,}9\,\Omega}}$



b)



$I_1 = I_2 + I_3 = 9\,mA$

$U_1 = R_1 \cdot I_1$

$U_1 = 560\,\Omega \cdot 9\,mA$

$\underline{\underline{U_1 = 5{,}04\,V}}$

$U_C = -U_1 + U_q$

$U_C = -5{,}04V + 12V$

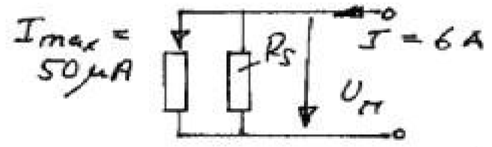
$\underline{\underline{U_C = 6{,}96\,V}}$

$U_{R2} = -U_4 + U_C = -4V + 6{,}96V = 2{,}96\,V$

$\underline{\underline{R_2}} = U_{R2}/I_2 = 2{,}96\,V/1\,mA = \underline{\underline{2{,}96\,k\Omega}}$

6. Aufgabe

a) Strommeßgerät

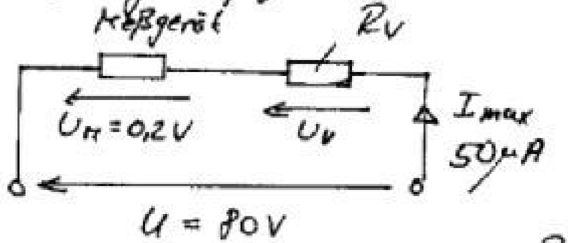


Spannung U_M zwischen den Klemmen des Meßgeräts bei Vollausschlag

$$U_M = R_{Meßw} \cdot I_{max} = 4000\,\Omega \cdot 50\,\mu A = 0{,}2\,V$$

$$\underline{\underline{R_S}} = \frac{U_M}{I - I_{max}} = \frac{0{,}2\,V}{6A - 50\,\mu A} \approx \frac{0{,}2\,V}{6A} = \underline{\underline{0{,}0333\bar{3}\,\Omega}}$$

Spannungsmeßgerät



$$R_V = \frac{U - U_M}{I_{max}}$$

$$\underline{\underline{R_V}} = \frac{80V - 0{,}2V}{50\,\mu A} = \underline{\underline{1{,}596\,M\Omega}}$$

b) Meßwerk mit maximalen Strom I_{MWmax} = 50 µA und maximaler Spannung am Meßwerk U_{MWmax} = 60 mV.

- Widerstand des Meßwerkes ist $R_{MW} = U_{Mmax}/I_{MWmax}$ = 60 mV/50 µA = 1200 Ω.
- Spannungmesser: Vorwiderstand erforderlich

$$R_V = (U - U_{MWmax})/I_{MWmax} = (10\text{ V} - 60\text{ mV})/\ 50\ \mu\text{A} = 198800\ \Omega.$$

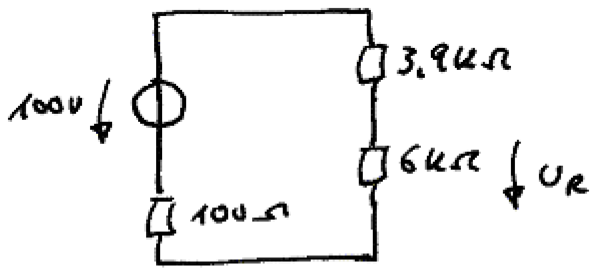
- Strommesser: Shunt bzw. Parallelwiderstand erforderlich:

$$R_S = U_{MWmax}/(I - I_{MWmax}) = 60\text{ mV}/(0{,}1\text{ A} - 50\ \mu\text{A}) = 0{,}60030\ \Omega.$$

c) Innenwiderstand oder Meßgerätewiderstand R_M des Meßgerätes

$$R_M = U_M/I_M = 60\text{ V} / 59\text{ mA} = 1{,}017\text{ k}\Omega.$$

d) Erster Teil: Spannung ohne Meßgerät

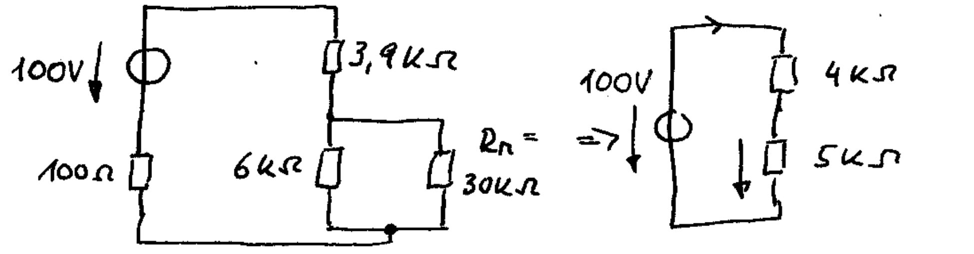


$$U_3 = \frac{6k\Omega \cdot 100V}{6k\Omega + 0{,}1k\Omega + 3{,}9k\Omega}$$

$$\underline{U_3 = 60V}$$

2) Spannungsberechnung mit Meßgerät:

$I = \frac{100V}{9k\Omega} = 11{,}11\ mA$



$U_{3\,rech} = 11{,}11\ mA \cdot 5k\Omega = 55{,}556V$

Angezeigt werden $U_{3\,meß} = 56V$.
Das Meßgerät hat einen Meßbereichsendwert von 100V und eine Klasse von $K = 1{,}5$. Dann beträgt die Meßunsicherheit $G = \pm \frac{K}{100} \cdot MBE = \pm \frac{1{,}5}{100} \cdot 100V = \pm 1{,}5V$

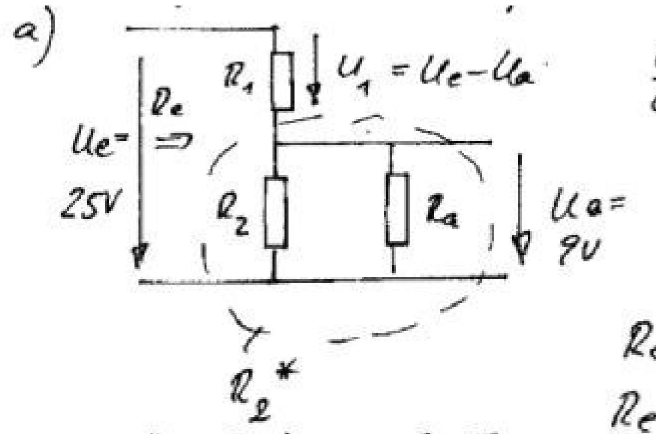
Das Meßergebnis ist

$$U = U_{meß} \pm G = 56V \pm 1{,}5V = 54{,}5V \ldots 57{,}5V$$

=> Das Ergebnis 55,556V liegt innerhalb des Bereichs, der durch die Messung bestätigt wird.

7. Aufgabe

a)



$\frac{U_a}{U_1} = \frac{9V}{25V-9V} = \frac{R_2^*}{R_1}$

$\underline{\underline{R_1}} = \frac{16}{9} \cdot R_2^* = \underline{\underline{1{,}77\bar{7} \cdot R_2^*}}$

$R_e = R_1 + R_2^*$

$R_e = 1{,}77\bar{7}\, R_2^* + R_2^* = 2{,}78\, R_2^*$

$R_2^* = R_e/2{,}78 = \frac{2000}{2{,}78}$

$R_2^* = 719{,}4\ \Omega$

$\underline{\underline{R_1}} = R_e - R_2^* = 2000 - 719{,}4\Omega = \underline{\underline{1280{,}6\Omega}}$

$$R_2^* = \frac{R_2 \cdot R_a}{R_2 + R_a}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{R_a \cdot R_2^*}{R_a - R_2^*} = \frac{1200\,\Omega \cdot 719{,}4\,\Omega}{1200\,\Omega - 719{,}4\,\Omega}$$

$$\underline{\underline{R_2 = 1796{,}3\,\Omega}}$$

Die Ströme: $\underline{\underline{I_e}} = \frac{U_e}{R_e} = \frac{25\,V}{2000\,\Omega} = \underline{\underline{12{,}5\,mA}}$

$$\underline{\underline{I_a}} = \frac{U_a}{R_a} = \frac{9\,V}{1{,}2\,k\Omega} = \underline{\underline{7{,}5\,mA}}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = I_e - I_a = 12{,}5\,mA - 7{,}5\,mA = \underline{\underline{5\,mA}}$$

Neue Belastung:

$R_a = 1000\,\Omega$; $R_1 = 1280{,}6\,\Omega$; $R_2 = 1796{,}3\,\Omega$

$$R_2^* = \frac{R_a \cdot R_2}{R_a + R_2} = \frac{1000 \cdot 1796{,}3}{1000 + 1796{,}3}\,\Omega = 642{,}4\,\Omega$$

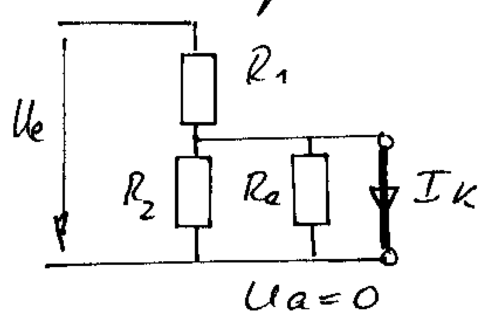
$$R_e = R_1 + R_2^* = 1280{,}6\,\Omega + 642{,}4\,\Omega = 1923\,\Omega$$

$$\underline{\underline{U_a}} = \frac{R_2^*}{R_e} U_e = \frac{642{,}4\,\Omega}{1923\,\Omega} \cdot 25\,V = \underline{\underline{8{,}35\,V}}$$

leerlaufender Teiler

$$\underline{\underline{U_a}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_e = \frac{1796{,}3}{3076{,}9} \cdot 25\,V = \underline{\underline{14{,}6\,V}}$$

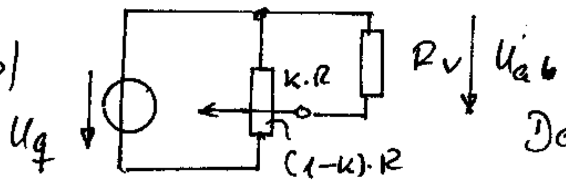
Kurzschlußstrom am Ausgang



$$I_K = \frac{U_e}{R_1} = \frac{25\,V}{1280{,}6\,\Omega}$$

$$\underline{\underline{I_K = 19{,}5\,mA}}$$

b)



$k = 0 \ldots 1$

Der Widerstand $k \cdot R$ und d. Widerstand R_V werden zum Widerstand R_1 zusammengefaßt:

$$R_1 = \frac{kR \cdot R_V}{kR + R_V}$$

Nach der Spannungsteilerregel gilt:

$$\frac{U_{ab}}{U_q} = \frac{R_1}{R_1 + (1-k)R} = \frac{\frac{kR \cdot R_V}{kR + R_V}}{\frac{k \cdot R \cdot R_V}{kR + R_V} + (1-k)R}$$

$$\frac{U_{ab}}{U_q} = \frac{kR \cdot R_V}{kR \cdot R_V + (kR + R_V)(1-k)R} = \frac{kR \cdot R_V}{kR \cdot R_V + (kR + R_V)(R - kR)}$$

$$\frac{U_{ab}}{U_q} = \frac{k\cancel{R}R_V}{\cancel{kR \cdot R_V} + kR^2 - \left(\frac{kR}{R}\right)^2 + R_V R - \cancel{kRR_V}}$$

$$\frac{U_a}{U_q} = \frac{k \cdot R_V}{kR - k^2 \cdot R + R_V} = \frac{R_V}{R - kR + R_V/k}$$

$$\underline{\underline{\frac{U_a}{U_q}}} = \frac{R_V}{R(1-k) + R_V/k} = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{R}{R_V}(1-k) + \frac{1}{k}}}}$$

8. Aufgabe

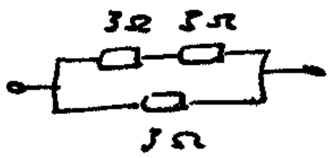
Bestimmung des Ersatzwiderstandes zwischen den Klemmen.

a) $R = 100\,\Omega + (150 \| 250)\,\Omega + (120 \| 240 \| 360)\,\Omega =$

$\underline{\underline{R = 259{,}2\,\Omega}}$

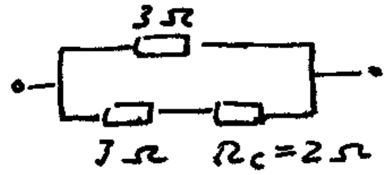
b) $$R = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

c) R_c :



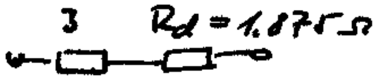
$R_c = (6 \| 3)\,\Omega = 2\,\Omega$

R_d :



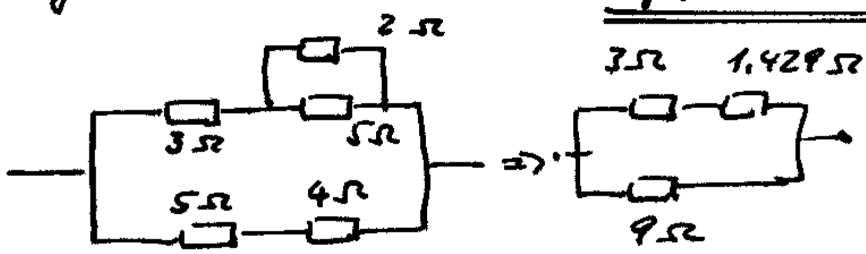
$R_d = (3 \| 5)\,\Omega = 1{,}875\,\Omega$

$R_{ges} \Rightarrow$



$\underline{\underline{R_{ges} = 4{,}875\,\Omega}}$

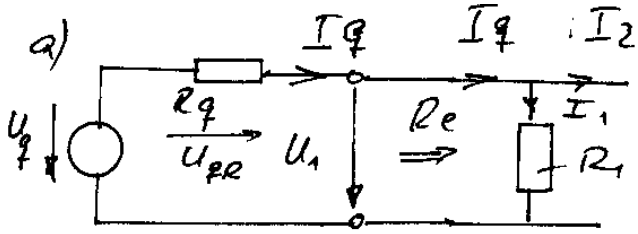
d)



$\underline{\underline{R}} = ((3 + 1{,}429) \| 9)\,\Omega = \underline{\underline{2{,}97\,\Omega}}$

9. Aufgabe

a)



Eingangswiderstand Re

$$R_e = R_1 \parallel (R_2 + R_3 \parallel R_V) = 100\,\Omega \parallel \underbrace{\underbrace{(3\,\Omega + \underbrace{100\,\Omega \parallel 10\,\Omega}_{9{,}09\,\Omega})}_{12{,}09\,\Omega}}_{10{,}8\,\Omega}$$

$$R_e = 10{,}8\,\Omega$$

$$I_q = \frac{U_q}{R_q + R_e} = \frac{115\,V}{0{,}2\,\Omega + 10{,}8\,\Omega}$$

$$\underline{\underline{I_q = 10{,}45\,A}}$$

$$\underline{\underline{U_{Rq}}} = R_q \cdot I_q = 0{,}2\,\Omega \cdot 10{,}45\,A = \underline{\underline{2{,}1\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_1}} = U_q - U_{qR} = 115\,V - 2{,}1\,V = \underline{\underline{112{,}9\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_1}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{112{,}9\,V}{100\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}129\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = I_q - I_1 = 10{,}45\,A - 1{,}129\,A = \underline{\underline{9{,}32\,A}}$$

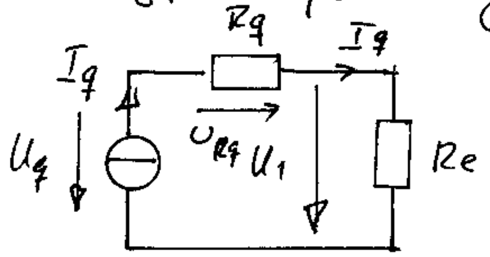
$$\underline{\underline{U_2}} = R_2 \cdot I_2 = 3\,\Omega \cdot 9{,}32\,A = 27{,}96\,V \approx \underline{\underline{28\,V}}$$

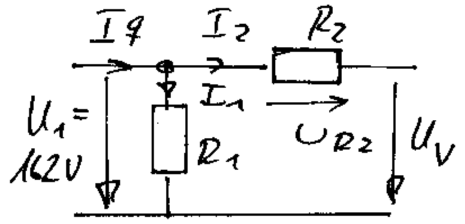
$$\underline{\underline{U_V}} = U_1 - U_2 = 112{,}9\,V - 28\,V = \underline{\underline{84{,}9\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_V}{R_3} = \frac{84{,}9\,V}{100\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}849\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_V}} = \frac{U_V}{R_V} = \frac{84{,}9\,V}{10\,\Omega} = \underline{\underline{8{,}49\,A}}$$

b) Der Stromkreis wird aus einer Stromquelle gespeist:





Es gilt

$$U_{Rq} = R_q \cdot I_q = 0{,}2\,\Omega \cdot 15\,A$$

$$\underline{\underline{U_{Rq} = 3\,V}}$$

$$U_1 = R_e \cdot I_q = 10{,}8\,\Omega \cdot 15\,A$$

$$\underline{\underline{U_1 = 162\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_q}} = U_{Rq} + U_1 = 3\,V + 162\,V = \underline{\underline{165\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_1}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{162\,V}{100\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}62\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = I_q - I_1 = 15\,A - 1{,}62\,A = \underline{\underline{13{,}3\,A}}$$

$$\underline{\underline{U_2}} = R_2 \cdot I_2 = 3\,\Omega \cdot 13{,}3\,A = \underline{\underline{39{,}9\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_V}} = U_1 - U_2 = 162\,V - 39{,}9\,V = \underline{\underline{122{,}1\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_V}{R_3} = \frac{122{,}1\,V}{100\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}221\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_V}} = \frac{U_V}{R_V} = \frac{122{,}1\,V}{10\,\Omega} = \underline{\underline{12{,}21\,A}}$$

Lösungen

1. Aufgabe

a) Leitungsverlust $P_{VL} = R_L \cdot I_L^2$

R_L ist der Widerstand des Hin- und Rückleiters.

Die Angabe der Leistung 15 kW setzt voraus, daß die Verbraucherspannung U = 230 V oder U = 2300 V eingehalten wird.

Bestimmung des Leiterstroms aus der Leistung $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = U^2/R$.

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{15.000\,VA}{230\,V} = 65{,}2\,A$$

$$I_2 = \frac{P}{U_2} = \frac{15000\,VA}{2300\,V} = 6.52\,A$$

Bestimmung des Leitungswiderstandes

$$R_{L1} = \frac{2 \cdot l}{\varkappa \cdot A_1} = \frac{2 \cdot 500\,m}{58\,\frac{S \cdot m}{mm^2} \cdot 2{,}5\,mm^2} = 6{,}9\,\Omega$$

$$R_{L2} = \frac{2\,l}{\gamma\,A_2} = \frac{2 \cdot 500\,m}{58\,\frac{S \cdot m}{mm^2} \cdot 35\,mm^2} = 0{,}49\,\Omega$$

Verluste bei 230 V; 2,5 mm²: $P_V = R_{L1} \cdot I_1^2 = 29{,}33\,kW$

Verluste bei 230 V; 35 mm²: $P_V = R_{L2} \cdot I_1^2 = 2{,}08\,kW$

Verluste bei 2300 V; 2,5 mm²: $P_V = R_{L1} \cdot I_2^2 = 293{,}3\,W$

Verluste bei 2300 V; 35 mm²: $P_V = R_{L2} \cdot I_2^2 = 20{,}8\,W$

b) zugelassene Verlustleistung

$$P_V = 0{,}06 \cdot P = 0{,}06 \cdot 4500\,W = 270\,W$$

Strom aus Leistung und Spannung:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{4500\,VA}{110\,V} = 40{,}9\,A$$

Leitungsverluste $P_V = R_L \cdot I^2$

$$\Rightarrow R_L = P_V / I^2 = 270\,W/(40{,}9\,A)^2 = 0{,}1614\,\Omega$$

$$R_L = \frac{2 \cdot l}{\varkappa \cdot A} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot l}{\varkappa R_L} = \frac{2 \cdot 400\,m}{58 \frac{S \cdot m}{mm^2} \cdot 0{,}1614\,\Omega}$$

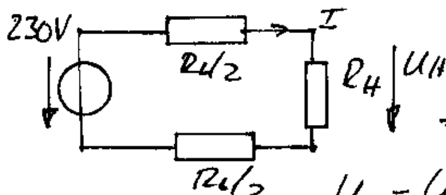
$$\underline{\underline{A = 85{,}5\,mm^2}}$$

Spannung am Verbraucher $\underline{\underline{U_V}} = U_q - R_L \cdot I = \underline{\underline{103{,}4\,V}}$

c) Heizwiderstand $R_H = \frac{U^2_{Bemessung}}{P_{Heiz}} = \frac{240^2\,V^2}{2000\,W}$

$$\underline{\underline{R_H = 28{,}8\,\Omega}}$$

Leitungswiderstand: $\underline{\underline{R_L}} = \frac{2 \cdot l}{\varkappa \cdot A} = \frac{2 \cdot 100\,m}{58 \frac{S \cdot m}{mm^2} \cdot 1{,}5\,mm^2} = \underline{\underline{2{,}3\,\Omega}}$



$$\underline{\underline{I}} = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{230\,V}{2{,}3\,\Omega + 28{,}8\,\Omega} = \underline{\underline{7{,}4\,A}}$$

$$\underline{\underline{U_H}} = U_q - I \cdot R_L = 230\,V - 7{,}4\,A \cdot 2{,}3\,\Omega = \underline{\underline{213\,V}}$$

$$\underline{\underline{P_{Netz}}} = U_N \cdot I = 230\,V \cdot 7{,}4\,A = \underline{\underline{1702\,W}}$$

$$\underline{\underline{P_H}} = U_H \cdot I = 213\,V \cdot 7{,}4\,A = \underline{\underline{1576{,}2\,W}}$$

$$\underline{\underline{P_{V_L}}} = R_L \cdot I^2 = 2{,}3\,\Omega \cdot 7{,}4^2\,A^2 = \underline{\underline{126\,W}}$$

$$\eta = \frac{W_{Heiz}}{W_{Netz}} = \frac{W/t\,|_{Heiz}}{W/t\,|_{Netz}} = \frac{P_{Heiz}}{P_{Netz}} = \frac{1576{,}2}{1702} = 0{,}926$$

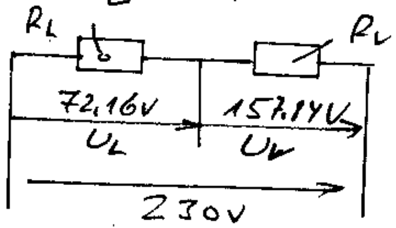
$$\underline{\underline{\eta = 0{,}926 \mathrel{\hat{=}} 92{,}6\,\%}}$$

d) Lampenwiderstand: $\underline{\underline{R_L}} = \frac{U_L}{I_L} = \frac{U_L^2}{P_L} = \frac{125^2 V^2}{60 W} = \underline{\underline{260{,}4\,\Omega}}$

Mit Vorwiderstand beträgt die Lampenleistg. 20W.

Dann liegt d. Spanng. $U_L = \sqrt{R_L \cdot P_L} = \sqrt{260{,}4\,\Omega \cdot 20\,W}$

$U_L = 72{,}16\,V$ an der Lampe. Am Vorwiderstand liegt die Spannung



$U_V = 230V - 72{,}16V = 157{,}84V$

Aus der Spannungsteilerregel folgt der Widerstand R_V: $\frac{R_V}{R_L} = \frac{157{,}84}{72{,}16}$

$$\underline{\underline{R_V}} = \frac{157{,}84}{72{,}16} \cdot 260{,}4\,\Omega = \underline{\underline{569{,}6\,\Omega}}$$

e) $1800\,U \mathrel{\hat{=}} 1\,kWh = 1\,kW \cdot 3600\,s$

$$\frac{1800\,U}{3600\,s} = \frac{1U}{2s} \mathrel{\hat{=}} 1\,kW$$

Anwendung: $\frac{1U}{2s} \mathrel{\hat{=}} 1\,kW$

$\frac{1U}{75s} \mathrel{\hat{=}} x$

$$x \cdot \frac{1U}{2s} = \frac{1U}{75s} \cdot 1\,kW$$

$$\underline{x} = \frac{2}{75}\,kW = \frac{2000}{75}\,W = \underline{\underline{26{,}67\,W}}$$

f) $\frac{600\,U}{1\,kWh} = \frac{600\,U}{1\,kW \cdot 3600\,s} = \frac{0{,}167 \cdot s^{-1}}{1\,kW}$

Bei $t = 10\,min \cdot \frac{60\,s}{min} = 600\,s$ macht der Zähler 180 Umd.

$$\Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{180}{600\,s \cdot 0{,}1667\,s^{-1}} \cdot 1\,kW = \underline{\underline{1{,}8\,kW}}$$

g)

Bestimmung der Betriebsstunden:

Winterhalbjahr: 6 Monate; Tage pro Monat: 25 Tage

Stunden pro Tag: 1,5 h, ⇒ Betriebsstunden: $6 \cdot 25 \cdot 1{,}5\,h = 225\,h$

Leistung im Gebäude

Alte Lampen: $P_{alt} = 20\,(4 \cdot 100\,W + 2 \cdot 60\,W)$

$P_{alt} = 10\,400\,W = 10{,}4\,kW$

Neue Lampen: $P_{neu} = 20 \cdot 6 \cdot 20\,W = 2{,}4\,kW$

Energie im Zeitraum

Alte Lampen: $W_{alt} = P_{alt} \cdot$ Betriebsstd. =

$W_{alt} = 10{,}4\,kW \cdot 225\,h = 2340\,kWh$

Neue Lampen: $W_{neu} = P_{neu} \cdot$ Betriebsstunden

$W_{neu} = 2{,}4\,kW \cdot 225\,h = 540\,kWh$

gesparte Energ. $\Delta W = W_{alt} - W_{neu} = 1800\,kWh$

gespartes Geld $= \Delta W \cdot \dfrac{0{,}15\,€}{kWh} = 270\,€$

Bestimmung der Amortisierungszeit t:

Bei t_A müssen Anschaffungskosten u. Betriebskosten für die alten Lampen und neuen Lampen übereinstimmen. Alte Lampen:

Anschaffungskosten $= n\,(6 \cdot 20)$ Lampen $\cdot \dfrac{1\,€}{\text{Lampe}} = n \cdot 120\,€$

n gibt an, wieviel Lampensätze in der Amortisierungszeit benötigt werden.

Betriebskosten: $P_{alt} \cdot \dfrac{0{,}15\,€}{kWh} \cdot t = \dfrac{10{,}4\,kW \cdot 0{,}15\,€}{kWh}\,t$

Gesamtkosten: $n \cdot 120\,€ + \dfrac{1{,}56\,€}{h} \cdot t$

Neue Lampen: Anschaffungsk. $= (6 \cdot 20)\,\text{Lamp} \cdot \frac{8 €}{\text{Lampe}} = 960 €$

Betriebskosten: $P_{neu} \cdot \frac{0{,}15 €}{kWh} \cdot t = \frac{2{,}4\,kW \cdot 0{,}15 € \cdot t}{kWh} = \frac{0{,}375 € t}{h}$

Gesamtkosten $= 960 € + \frac{0{,}375 €}{h} \cdot t$

Gleichsetzen liefert

$$n \cdot 120 € + \frac{1{,}56 €}{h} \cdot t = 960 € + \frac{0{,}375 €}{h} \cdot t$$

$$\frac{0{,}812 €}{h} \cdot t = 960 € - n \cdot 120 €$$

$$t = \frac{960 - n \cdot 120}{0{,}812}\,h$$

Annahme: $n = 1$ Lampensatz ergibt $t = 1034{,}48\,h$

Diese Zeit ist länger als die Brenndauer von 1000 h für die Lampen. Bei $n = 2$ (2 Lampensätze) folgt

$$\underline{\underline{t}} = \frac{960 - 240}{0{,}812}\,h = \underline{\underline{886{,}7\,h}}$$

Nach dieser Zeit ist d. Break-Even-Point erreicht. Die Kosten zu diesem Zeitpkt. sind

$$2 \cdot 120 € + \frac{1{,}56 €}{h} \cdot 886{,}7\,h = \underline{\underline{1623{,}25 €}}$$

2. Aufgabe

a) Es gilt $W = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta$

$$\Delta\vartheta = \frac{W}{m \cdot c}$$

$$W = U \cdot I = 125\,V \cdot 4\,A \cdot 15 \cdot 60\,s = 450\,000\,Ws$$

$c = 4{,}18 \frac{10^3\,Ws}{kg \cdot K}$ spezif. Wärmekapazität von Wasser

$$\underline{\underline{\Delta\vartheta}} = \frac{450 \cdot 10^3\,Ws}{2\,kg \cdot 4{,}18 \frac{10^3\,Ws}{kg \cdot K}} = \underline{\underline{53{,}8\,K}}$$

b) $W_{el} = U \cdot I \cdot t = 230\,V \cdot 10\,A \cdot 1\,h = 2{,}3\,kWh$

Die zur Erwärmung zur Verfügung stehende Energie beträgt $W_{th} = \eta\, W_{el} = 0{,}8 \cdot 2{,}3\,kWh = 1{,}84\,kWh$

Aus $W_{th} = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta$ folgt

$$\Delta\vartheta = \frac{W_{th}}{m \cdot c} = \frac{U \cdot I \cdot t \cdot \eta}{m \cdot c}$$

Mit $\Delta\vartheta = 85\,°C - 10\,°C = 75\,°C$ folgt

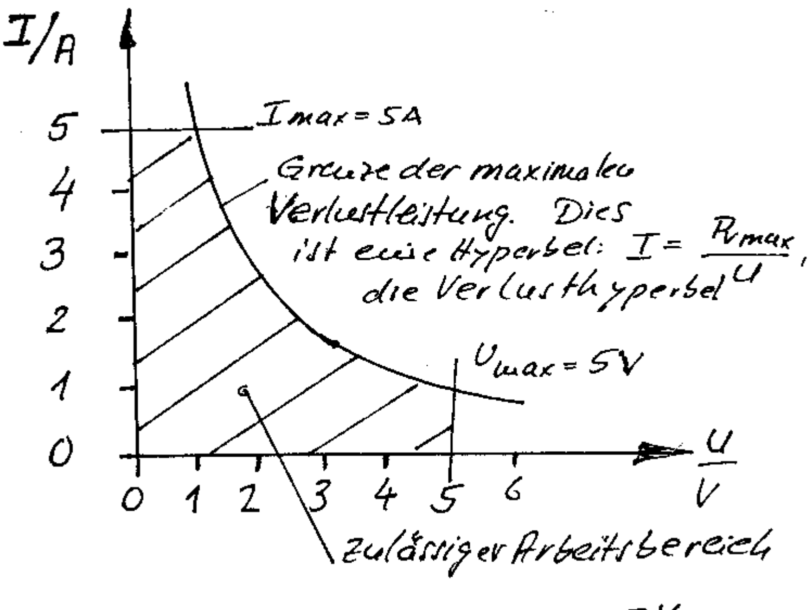
$$t = \frac{\Delta\vartheta \cdot m \cdot c}{U \cdot I \cdot \eta} = \frac{75\,K \cdot 100\,kg \cdot 4{,}18\,\frac{kWs}{kg \cdot K}}{230\,V \cdot 10\,A \cdot 0{,}8}$$

$$\underline{\underline{t = 17{,}04 \cdot 10^3\,s \mathrel{\hat{=}} 4{,}73\,h}}$$

c) $W = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta = 1{,}5\,kg \cdot 4{,}18\,\frac{kWs}{kg \cdot K} \cdot 80\,K = 501{,}6\,kWs$

$$\underline{\underline{P = \frac{W}{t} = \frac{501{,}6\,kWs}{8 \cdot 60\,s} = 1{,}045\,kW}}$$

d)



$$\underline{\underline{\Delta\vartheta}} = P \cdot R_{Ther} = 5\,W \cdot \frac{25\,K}{W} = \underline{\underline{125\,K}}$$

3. Aufgabe

a) Sternschaltung in Dreieckschaltung

oder T-Glied in π-Glied

$$R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10}\cdot R_{20}}{R_{30}} = 100\,\Omega + 200\,\Omega + \frac{100\cdot 200}{300}\,\Omega$$

$$\underline{\underline{R_{12} = 366{,}67\,\Omega}}$$

Analog: $\underline{\underline{R_{13} = 550\,\Omega}}$; $\underline{\underline{R_{23} = 1100\,\Omega}}$

Dreieckschaltung in Sternschaltung

oder π-Glied in T-Glied

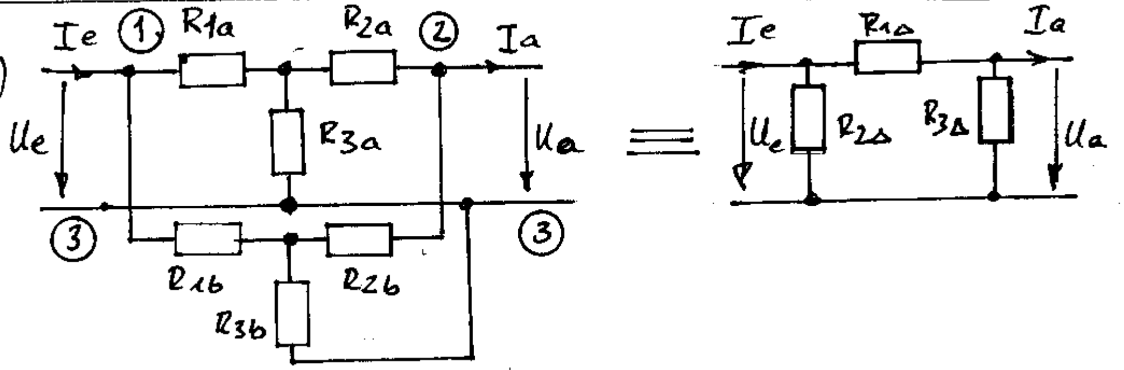
$R_{10} = R_{12}\cdot R_{13}/R$ mit $R = R_{12} + R_{13} + R_{23}$

$$\underline{\underline{R_{10}}} = \frac{100\cdot 200}{100+200+300}\,\Omega = \underline{\underline{33{,}3\overline{3}\,\Omega}}$$

Analog: $\underline{\underline{R_{20} = 50\,\Omega}}$; $\underline{\underline{R_{30} = 100\,\Omega}}$

---

b)



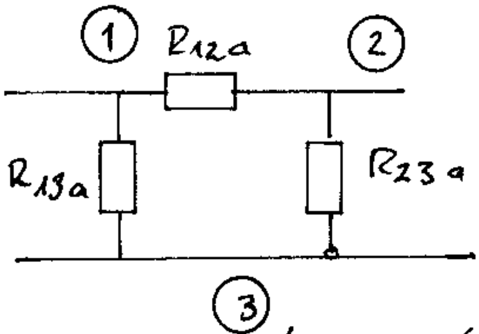
Lösung: Die beiden T-Glieder in π-Glieder umwandeln. Die beiden parallelen π-Glieder oder Dreieckschaltungen durch Zusammenfassen der parallelen Widerstände zu einer Dreieckschaltung umformen

Umwandlung von R_{1a}, R_{2a}, R_{2b} in Dreieckwiderstände:

$R_{12a} = 283,3\ \Omega$

$R_{13a} = 1700\ \Omega$

$R_{23a} = 425\ \Omega$



Da das parallel-liegende T-Glied die gleichen Widerstände hat, sind auch die Dreieckwiderstände gleich: $R_{12b} = 283,3\ \Omega$; $R_{13b} = 1700\ \Omega$; $R_{23b} = 425\ \Omega$

Da in der Dreieckschaltung die Widerstände parallel liegen und gleich sind, folgt

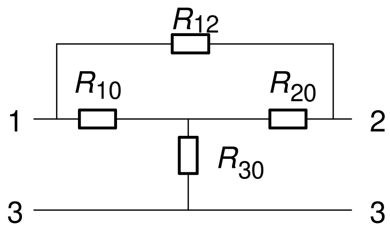
$$\underline{\underline{R_{1\Delta}}} = R_{12a} \parallel R_{12b} = \frac{283,3}{2}\ \Omega = \underline{\underline{141,65\ \Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_{2\Delta}}} = R_{13a} \parallel R_{13b} = \frac{1700}{2}\ \Omega = \underline{\underline{850\ \Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_{3\Delta}}} = R_{23a} \parallel R_{23b} = \frac{425}{2}\ \Omega = \underline{\underline{212,5\ \Omega}}$$

c)

$R_{10} = 100\ \Omega$, $R_{20} = 200\ \Omega$, $R_{30} = 300\ \Omega$, $R_{12} = 150\ \Omega$.



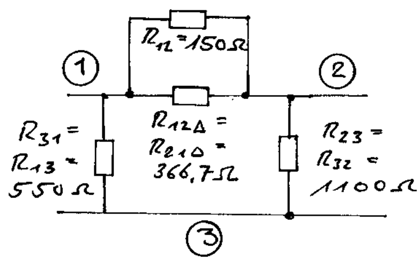
überbrücktes T - Glied

Stern in Dreieck liefert:

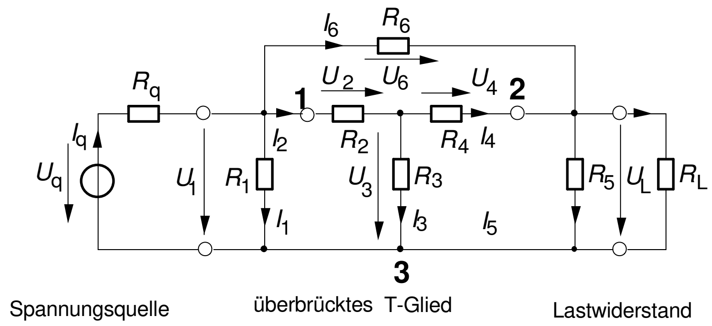
$R_{12\Delta} = 366,7\ \Omega$, $R_{23} = 1100\ \Omega$, $R_{31} = 550\ \Omega$.

v$R_{12\Delta}$ parallel R_{12}: $R_{12\Delta} \cdot R_{12} / (R_{12\Delta} + R_{12}) = 366,7\ \Omega \cdot 150\ \Omega / (366,7 + 150)\Omega = 106,45\ \Omega$.

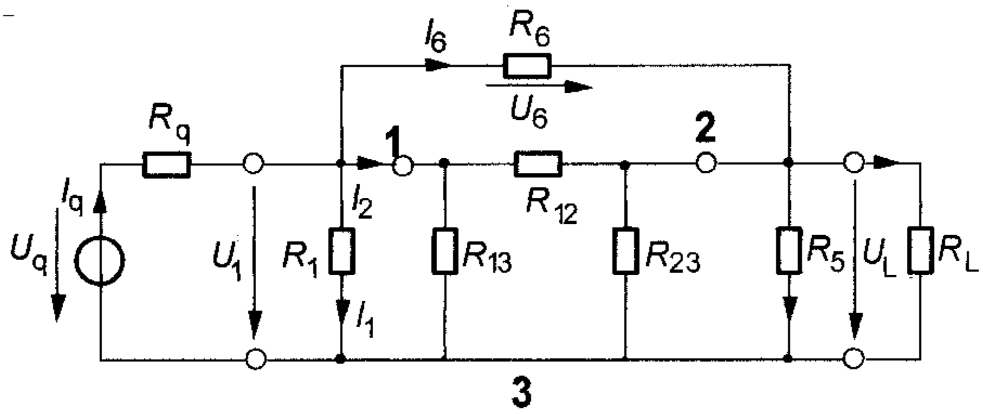
Die Ersatzschaltung:



d) Schaltung in der Aufgabenstellung**:**



Der Schaltungsteil 1-2-3 stellt eine Stern-schaltung dar die in eine Dreiecksschaltg. umgewandelt wird:



Bestimmung der Dreieckwiderstände:

$$R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{30}}$$

Mit $R_{10} = R_2$; $R_{20} = R_4$ und $R_{30} = R_3$ folgt

$$R_{12} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3} = 5k\Omega + 5k\Omega + \frac{5 \cdot 5}{10} k\Omega$$

$$\underline{\underline{R_{12} = 12{,}5 k\Omega}}$$

Analog folgt:

$$\underline{\underline{R_{13} = 25 k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_{23} = 25 k\Omega}}$$

Die Größen der Element:

$U_q = 20\,V$; $R_q = 100\,\Omega$; $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_5 = 10\,k\Omega$

$R_6 = 1\,k\Omega$; $R_L = 1\,k\Omega$; $R_{12} = 12{,}5\,k\Omega$; $R_{13} = R_{23} = 25\,k\Omega$

Zur Bestimmung der Spannungen und Ströme wird zunächst der Strom I_q der Quelle bestimmt:

$I = \frac{U_q}{R_q + R_e}$ mit R_e als Eingangswiderstand der Schaltung der Schaltung an den klemmen, an denen U_1 anliegt.

$$R_e = (R_1 \| R_{13}) \| \left((R_6 \| R_{12}) + (R_{23} \| R_5 \| R_L) \right)$$

$$R_1 \| R_3 = 10 \| 25\,k\Omega = 7{,}14\,k\Omega$$

$$R_6 \| R_{12} = 1 \| 12{,}5\,k\Omega = 0{,}93\,k\Omega$$

$$R_{23} \| R_5 \| R_L = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1}}\,k\Omega = 0{,}88\,k\Omega$$

$$R_6 \| R_{12} + (R_{23} \| R_5 \| R_L) = 0{,}93\,k\Omega + 0{,}88\,k\Omega = 1{,}81\,k\Omega$$

$$\underline{\underline{R_e}} = \frac{7{,}14 \cdot 1{,}81}{7{,}14 + 1{,}81}\,k\Omega = \underline{\underline{1{,}44\,k\Omega}}$$

$$\underline{\underline{I_q}} = \frac{U_q}{R_q + R_e} = \frac{20\,V}{(0{,}1 + 1{,}44)\,k\Omega} = \underline{\underline{12{,}99\,mA}}$$

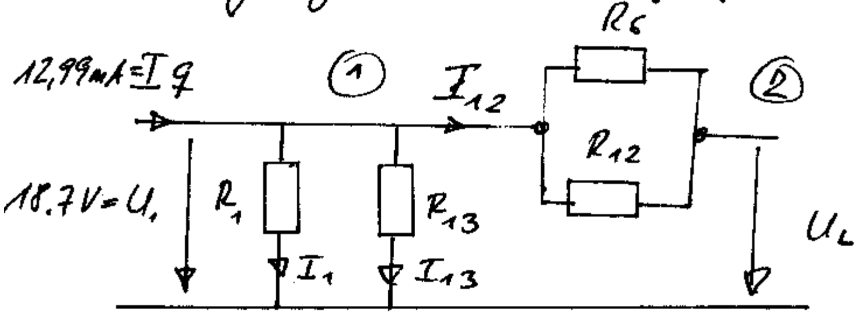
$$U_{Rq} = R_q \cdot I_q = 0{,}1\,k\Omega \cdot 12{,}99\,mA = 1{,}299\,V = \underline{\underline{1{,}3\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_1}} = U_q - U_{Rq} = 20\,V - 1{,}3\,V = \underline{\underline{18{,}7\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_1}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{18{,}7\,V}{10\,k\Omega} = \underline{\underline{1{,}87\,mA}}$$

Bestimmung der Spannung U_L:

Am Eingang der Schaltung gilt:



$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{18{,}7\,V}{10\,k\Omega} = 1{,}87\,mA$$

$$I_{13} = \frac{U_1}{R_{13}} = \frac{18{,}7\,V}{25\,k\Omega} = 0{,}75\,mA$$

$$I_{12} = I_q - I_1 - I_{13} = 12{,}99\,mA - 1{,}87\,mA - 0{,}75\,mA$$

$$I_{12} = 10{,}37\,mA$$

$$U_L = U_1 - (R_6 \parallel R_{12}) \cdot I_{12} = 18{,}7\,V - 0{,}93\,k\Omega \cdot 10{,}37\,mA$$

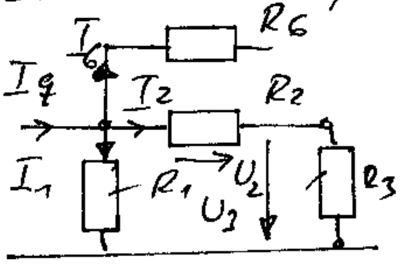
$$\underline{\underline{U_L = 9{,}06\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_L}} = \frac{U_L}{R_L} = \frac{9{,}06\,V}{1\,k\Omega} = \underline{\underline{9{,}06\,mA}}$$

$$\underline{\underline{I_5}} = \frac{U_L}{R_5} = \frac{9{,}06\,V}{10\,k\Omega} = \underline{\underline{0{,}906\,mA}}$$

$$\underline{\underline{I_6}} = \frac{U_1 - U_L}{R_6} = \frac{18{,}7\,V - 9{,}06\,V}{1\,k\Omega} = \underline{\underline{9{,}64\,mA}}$$

Ströme und Spannungen im T-Glied:



$$I_2 = I_q - I_1 - I_6$$

$$I_2 = 12{,}99\,mA - 1{,}87\,mA - 9{,}64\,mA$$

$$\underline{\underline{I_2 = 1{,}48\,mA}}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_2 = 5\,k\Omega \cdot 1{,}48\,mA$$

$$\underline{\underline{U_2 = 7{,}4\,V}}$$

Spannung $\underline{\underline{U_3}} = U_1 - U_2 = 18{,}7\,V - 7{,}4\,V = \underline{\underline{11{,}3\,V}}$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_3}{R_3} = \frac{11{,}3\,V}{10\,k\Omega} = \underline{\underline{1{,}13\,mA}}$$

$$\underline{\underline{U_4}} = U_3 - U_L = 11{,}3\,V - 9{,}06\,V = \underline{\underline{2{,}24\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_4}} = \frac{U_4}{R_4} = \frac{2{,}24\,V}{5\,k\Omega} = \underline{\underline{0{,}448\,mA}}$$

4. Aufgabe

Brücke ist abgeglichen, wenn

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

ist. $\Rightarrow \dfrac{250}{500} = \dfrac{R_3}{1000\,\Omega}$

$$\underline{\underline{R_3}} = \frac{250}{500} \cdot 1000\,\Omega = \underline{\underline{500\,\Omega}}$$

$$U_{Br} = U_2 - U_4 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right) \cdot U_e$$

5. Aufgabe

a)

$R_1 = R_3 = R_4 = 100\,\Omega$; $R_2 = 100\,\Omega + \Delta R$

$$\frac{U_{II}}{U_e} = \frac{0{,}25\,V}{25\,V} = \left(\frac{100 + \Delta R/\Omega}{100 + 100 + \Delta R/\Omega} - \frac{100}{100+100}\right)$$

$$0{,}01 = \frac{100 + \Delta R/\Omega}{200 + \Delta R/\Omega} - \frac{1}{2}$$

$$100 + \Delta R/\Omega = (200 + \Delta R/\Omega) \cdot 0{,}51 = 102 + 0{,}51 \cdot R/\Delta R$$

$$\Delta R - 0{,}51\,\Delta R = 0{,}49\,\Delta R = 102 - 100 = 2$$

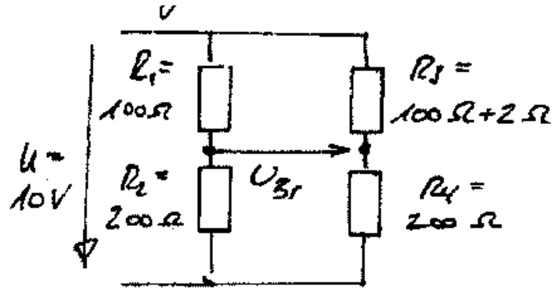
$$\Delta R = 2/0{,}49 \cdot \Omega = 4{,}08\,\Omega$$

Aus $\Delta R = R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta$

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta R}{R_0 \alpha} = \frac{4{,}08}{100 \cdot 3{,}91 \cdot 10^{-3}}\,K$$

$$\underline{\underline{\Delta\vartheta = 10{,}4\,K}}$$

b)



direkt:

$$U = \left(\frac{100}{300} - \frac{102}{302}\right) 10V$$

$$\underline{U = -0{,}0442\,V}$$

Aus Fehlerrechnung $\Delta U = \frac{\partial}{\partial R_3}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) U \cdot \Delta R_3$

Ableiten der Klammer:

$$\frac{d}{dR_3}\left(\frac{R_2}{\underbrace{R_1+R_2}_{\text{kein } R_3\text{, daher Ableit. 0!}}} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = \frac{d}{dR_3}\left(-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = -\frac{d}{dR_3}\underbrace{\left(\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)}_{\text{Quotientenregel}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2} \Rightarrow \begin{array}{l} v = R_3 + R_4 \rightarrow v' = 1 \\ u = R_3 \rightarrow u' = 1 \end{array}$$

$$\frac{d}{dR_3}\left(\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = \frac{R_3+R_4-R_3}{(R_3+R_4)^2} = \frac{R_4}{(R_3+R_4)^2}$$

$$\Delta U = \frac{-R_4}{(R_3+R_4)^2} \cdot U \cdot \Delta R_3$$

$$\underline{\underline{\Delta U}} = \frac{-200\,\Omega}{300^2\,\Omega^2} \cdot 10V \cdot 2\,\Omega = \underline{\underline{-0{,}044\overline{4}\,V}}$$

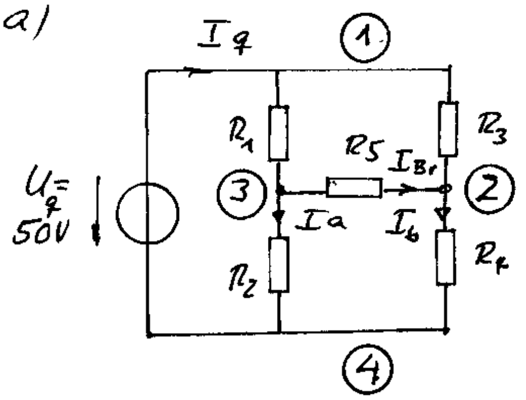
Diese einfachere Fehlerrechnung ergibt eine geringe Abweichung gegenüber der genauen Rechnung. (Das war zu erwarten). Vorteil der Fehlerrechnung: Es muß nur einmal die Ableitung gebildet werden. Dann gilt

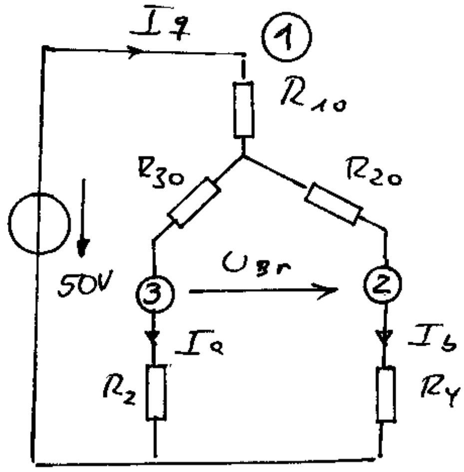
$$\Delta U_{3r} \approx \left[\frac{-R_4}{(R_3+R_4)^2} \cdot U\right] \cdot \Delta R$$

$$\underline{\underline{\Delta U_{3r} \approx -0{,}0\overline{22}\,\frac{V}{\Omega} \cdot \Delta R}}$$

6. Aufgabe

a)





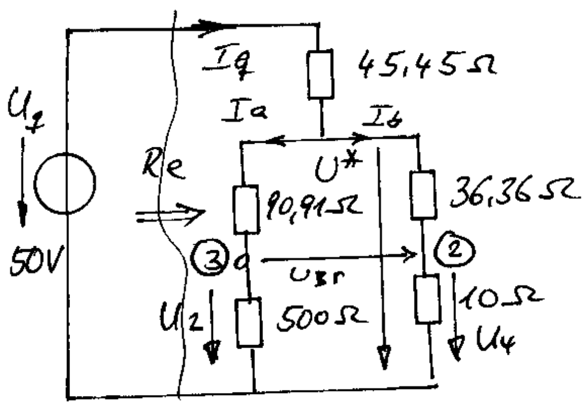
$R_1 = 250\,\Omega;\ R_2 = 500\,\Omega;$

$R_3 = 100\,\Omega;\ R_4 = 10\,\Omega;\ R_5 = 200\,\Omega$

$$R_{10} = \frac{R_{12}\cdot R_{13}}{\Sigma R} = \frac{R_3\cdot R_1}{\Sigma} = \frac{100\cdot 250\,\Omega}{250+100+200} = 45{,}45\,\Omega$$

$$R_{20} = \frac{R_{21}\cdot R_{23}}{\Sigma R} = \frac{R_3\cdot R_5}{\Sigma R} = \frac{100\cdot 200\,\Omega}{550} = 36{,}36\,\Omega$$

$$R_{30} = \frac{R_{31}\cdot R_{32}}{\Sigma R} = \frac{R_1\cdot R_5}{\Sigma R} = \frac{250\cdot 200\,\Omega}{550} = 90{,}91\,\Omega$$



$$R_e = 45{,}45\,\Omega + (90{,}91+500)\,||\,(36{,}36+10)\,\Omega$$

$$R_e = 45{,}45\,\Omega + 42{,}99\,\Omega$$

$$R_e = 88{,}44\,\Omega$$

$$I_q = \frac{U_q}{R_e} = \frac{50\,V}{88{,}44\,\Omega} = 0{,}565\,A$$

$$U^* = U_q - I_q\cdot 45{,}45\,\Omega = 50\,V - 0{,}565\,A\cdot$$

$$U^* = 24{,}32\,V$$

3(15

$$I_a = \frac{U^*}{R_{30} + R_2} = \frac{24{,}32V}{90{,}91\Omega + 500\Omega} = 0{,}0412A$$

$$I_b = \frac{U^*}{R_{20} + R_4} = \frac{24{,}32V}{36{,}36\Omega + 10\Omega} = 0{,}525A$$

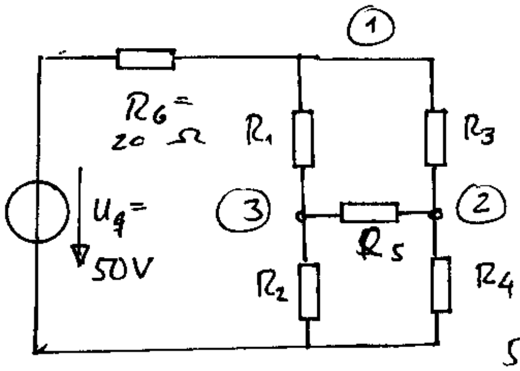
$$U_2 = R_2 \cdot I_a = 500\Omega \cdot 0{,}0412A = 20{,}6V$$

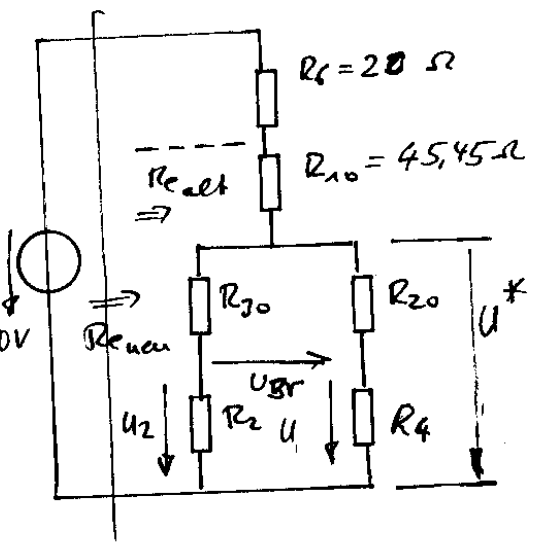
$$U_4 = R_4 \cdot I_b = 10\Omega \cdot 0{,}525A = 5{,}25V$$

$$U_{Br} = U_2 - U_4 = 20{,}6V - 5{,}25V = 15{,}35V$$

$$I_{Br} = \frac{U_{Br}}{R_5} = \frac{15{,}35V}{200\Omega} = 0{,}07675A$$

b)





$$Re_{neu} = 20\Omega + Re_{alt}$$

$$Re_{neu} = 108{,}44\Omega$$

$$I_{q\,neu} = \frac{50V}{108{,}44\Omega} = 0{,}461A$$

$$U^* = 50V - (20 + 45{,}45)\Omega \cdot 0{,}461A = 19{,}83V$$

$$I_a = 19{,}83V/(90{,}91\Omega + 500\Omega) = 90336A$$

$$I_b = 19{,}83V/(36{,}36 + 10)\Omega = 0{,}428A$$

$$U_2 = 500\Omega \cdot 0{,}0336A = 16{,}8V; \quad U_4 = 10\Omega \cdot 0{,}428A = 4{,}28V$$

$$U_{Br} = U_2 - U_4 = 16{,}8V - 4{,}28V = 12{,}52V$$

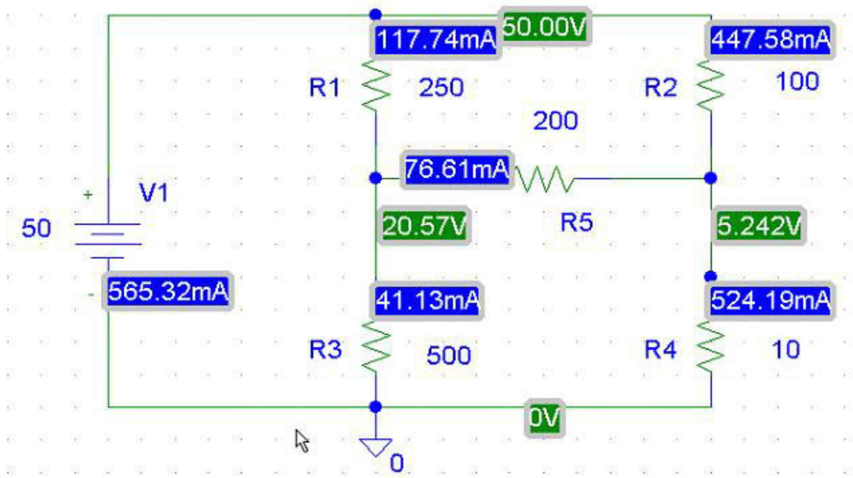
$$I_{Br} = U_{Br}/R_5 = 12{,}52V/200\Omega = 0{,}0626A$$

Hinweise: Anwendung von PSpice zur Berechnung von Gleichstromschaltungen:

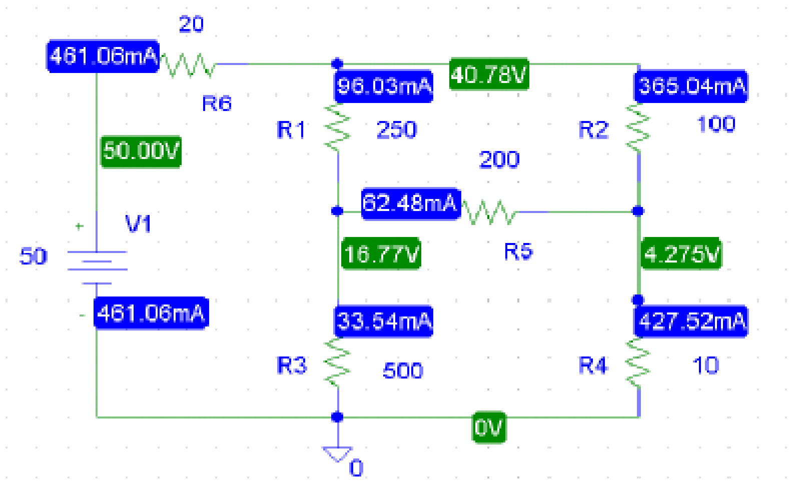
(Demo CD kann ausgeliehen werden.)

In der Praxis wird man zweckmäßigerweise die Analyse mit Hilfe eines Programms durchführen. Ein Programm, das sehr große Bedeutung gewonnen hat, ist SPICE. Dies wurde an einer amerikanischen Universität entwickelt und kann als Freeware z.B. vom Heise-Verlag bezogen werden. Das Arbeiten damit ist allerdings ziemlich aufwendig, da zunächst eine Eingabedatei erstellt werden muß. Es gibt nun Anbieter, z.B. Microsim, die das Programm durch eine graphische Oberfläche weiter entwickelt haben. Dieses Programm ist als PSpice bekannt geworden. Zu PSpice gibt es eine Demo-Version, mit der die Analyse dieser Schaltung durchgeführt wurde.

Aufgabe 6a:

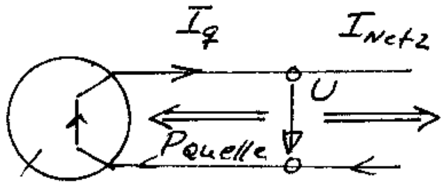


Aufgabe 6b:



Lösungen

1. Aufgabe - Quellen



$P_{Netz} = I_{Netz} \cdot U$

Gilt $P_{Quelle} = -I_q \cdot U < 0$, dann

ist $P_{Quelle} + P_{Netz} = 0$ bzw

$P_{Netz} = -P_{Quelle} = I_q \cdot U = I_{Netz} \cdot U$,

$\Rightarrow$ die Quelle liefert elektr. Energie an das Netz, sie wird dann als aktiv bezeichnet!

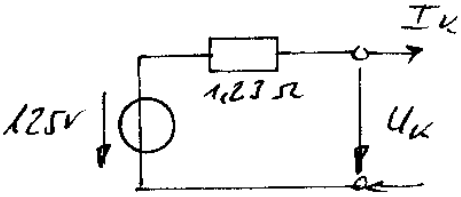
Innenwiderstand der Quelle:

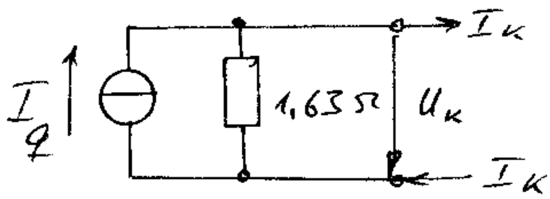
$R_i = \frac{\Delta U_q}{\Delta I_q} = \frac{U_L}{I_K}$ falls möglich.

$\Rightarrow R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I_q}$ Leerlauf $U_L = 125V, I = 0$

Belastung $U_{Bel} = 123V; I_{Bel} = \frac{123V}{100\,\Omega} = 1{,}23A$

$R_i = \frac{2V}{1{,}23A} = 1{,}63\,\Omega$





$I_q = \frac{U_L}{R_i} = \frac{U_q}{R_i} = \frac{125V}{1{,}63\,\Omega}$

$\underline{\underline{I_q = 76{,}69A}}$

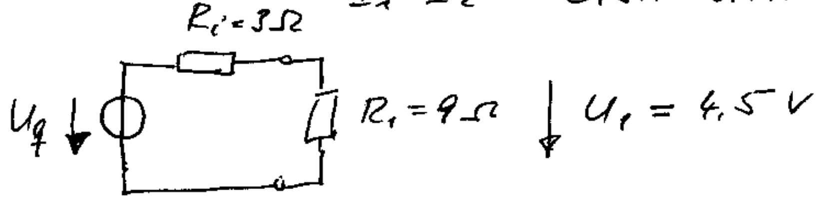
b)

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

1\. Messung: $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4{,}5\,V}{9\,\Omega} = 0{,}5\,A$

2\. Messung: $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4{,}8\,V}{12\,\Omega} = 0{,}4\,A$

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{4{,}8\,V - 4{,}5\,V}{0{,}5\,A - 0{,}4\,A} = 3\,\Omega$$



$$U_q = \frac{R_i + R_1}{R_1} \cdot U_1 = \frac{3+9}{9} \cdot 4{,}5\,V = 6\,V$$

oder $U_q = \frac{R_i + R_2}{R_2} \cdot U_2 = \frac{3+12}{12} \cdot 4{,}8\,V = 6\,V$

c)

$$U_{ges} = N \cdot U_{Zelle} = 100 \cdot 2{,}2\,V = 220\,V$$

$$R_{Last} = \frac{l}{\varkappa A} = \frac{100\,m}{58\,\frac{S \cdot m}{mm^2} \cdot 1{,}5\,mm^2} = 1{,}15\,\Omega$$

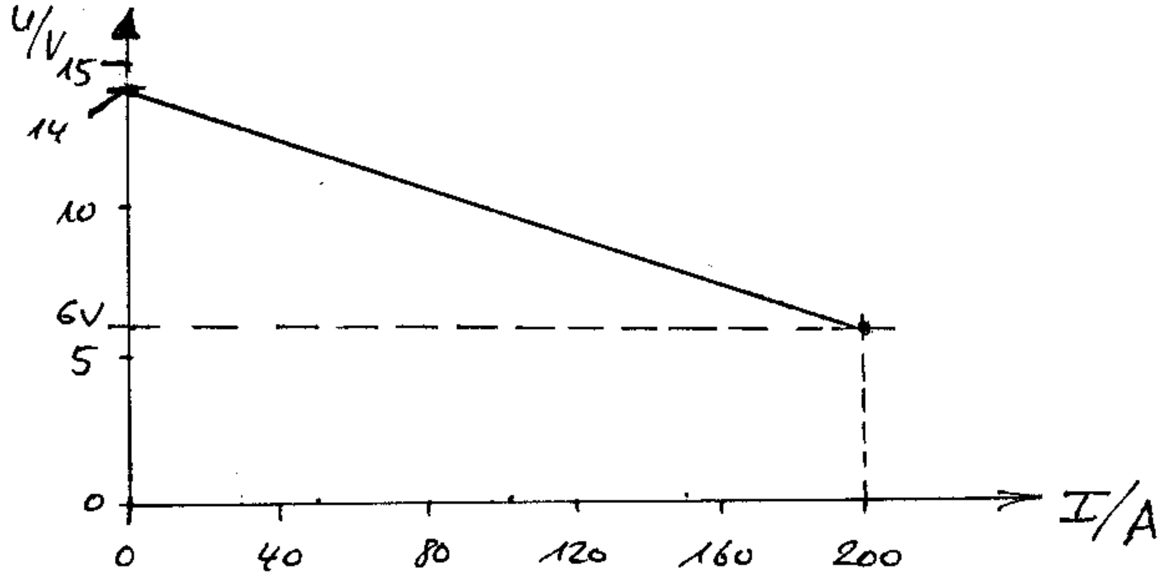
$$I_K = \frac{U_{ges}}{R_{Last} + N \cdot R_i} = \frac{220\,V}{1{,}15\,\Omega + 100 \cdot 1{,}1\,m\Omega} = \frac{220\,V}{1{,}26\,\Omega}$$

$$I_K = 174{,}6\,A$$

$$P_K = U \cdot I_K = 220\,V \cdot 174{,}6\,A = 38{,}4\,kW$$

$$W = P_K \cdot t = 38{,}4\,kW \cdot 10\,s = 384\,kWs$$

d)



$$U = f(I)$$

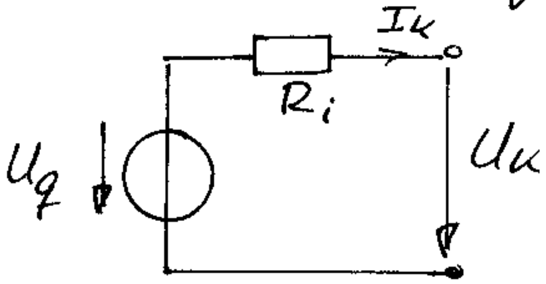
$$U = U(I) = U_0 - \frac{\Delta U}{\Delta I} \cdot I$$

$$U = 14V - \frac{14V - 6V}{200A} \cdot I$$

$$\underline{\underline{U = 14V - 0{,}04\Omega \cdot I}}$$

z.B.: $I = 100A \rightarrow U = 14V - 0{,}04\Omega \cdot 100A = 10V$

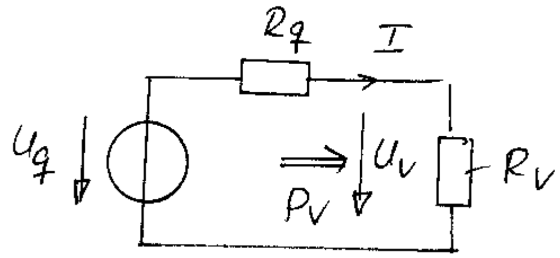
Übereinstimmung mit Tabelle



$$U_q = 14V$$

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 0{,}04\Omega$$

e)



$$P_V = U_V \cdot I = R_V \cdot I^2 \quad ; \quad I = \frac{U_q}{R_q + R_V} \rightarrow I^2 = \frac{U_q^2}{(R_q+R_V)^2}$$

$$P_V = \frac{R_V}{(R_q+R_V)^2} \cdot U_q^2$$

$$\frac{dP_V}{dR_V} = U_q^2 \cdot \frac{d}{dR_V}\left(\frac{R_V}{(R_q+R_V)^2}\right)$$

Quotientenregel $(u/v)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

$u = R_V \rightarrow u' = 1$

$v = (R_q+R_V)^2 \rightarrow v' = 2(R_q+R_V)$

$$\frac{d}{dR_V}\left(\frac{R_V}{(R_q+R_V)^2}\right) = \frac{(R_q+R_V)^2 - R_V \cdot 2 \cdot (R_q+R_V)}{(R_q+R_V)^4}$$

$$= \frac{R_q + R_V - 2R_V}{(R_q+R_V)^3}$$

P_V ist max für R_V aus d. Gleichung

$$\frac{dP_V}{dR_V} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_q + R_V - 2R_V}{(R_q+R_V)^3} \cdot U_q^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_q - R_V = 0 \longrightarrow \underline{\underline{R_q = R_V}}$$

Leistungsanpassung, wenn $R_q = R_V$.
Der Wirkungsgrad bei Leistungsanpassung:
Wirkungsgrad ist $\eta = P_{Nutz}/P_{elektr.}$

Bei Leistungsanpassung ist, da $R_V = R_q$ ist,
$U_V = U_q/2$. Dann folgt für die Nutzleistung

$$P_{Nutz} = P_V = U_V^2/R_V = \frac{(U_q/2)^2}{R_q} = \frac{U_q^2}{4R_q}$$

Leistung der Quelle:

$$P_q = P_{elektr} = \frac{U_q^2}{2R_q} \Rightarrow \eta = \frac{P_V}{P_q} = \frac{U_q^2/4R_q}{U_q^2/2R_q} = \frac{1}{2} \mathrel{\hat{=}} 50\%$$

Bei Leistungsanpassung beträgt der Wirkungsgrad nur 50%. Leistungsanpassung ist bei der Energieübertragung <u>nicht</u> wirtschaftlich. In der Nachrichtentechnik wird allerdings zwischen Antenne und Empfängereingang Leistungsanpassung gewählt, da dann die von d. Antenne aufgenommene Leistg. am besten zum Empfänger geleitet wird.

Bei Energienetzen wählt man Spannungsanpassung, daher haben alle Geräte eine übereinstimmende Bemessungsspannung z.B. 400V in Niederspannungsnetzen.

In Sonderfällen wie bei d. Christbaumbeleuchtung, haben alle Elemente den gleichen Bemessungsstrom. Dann liegt Stromanpassung vor.

2. Aufgabe -Ersatzquellen

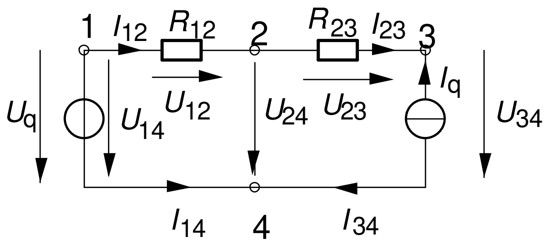
Ersatzspannungsquelle (Hemholtzsche-Ersatzspannungsquelle, Norten-Theorem)

Ersatzstromquelle (Helmholtzsche-Ersatzstromquelle, Thevenion-Theorem)

Bestimmung der Ersatzquellen

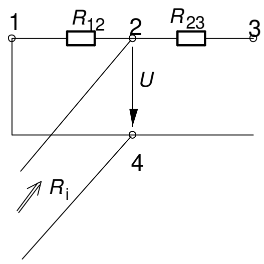
Jedes lineare Netz kann bezüglich eines Klemmenpaares durch eine reale Spannungsquelle oder eine reale Stromquelle ersetzt werden. Dazu bestimmt man an dem Klemmenpaar den Innenwiderstand R_i des passiv gemachten Netzes und die Leerlaufspannung U_L oder den Kurzschlußstrom I_K.

Beispiel: Gegeben ist das Netz



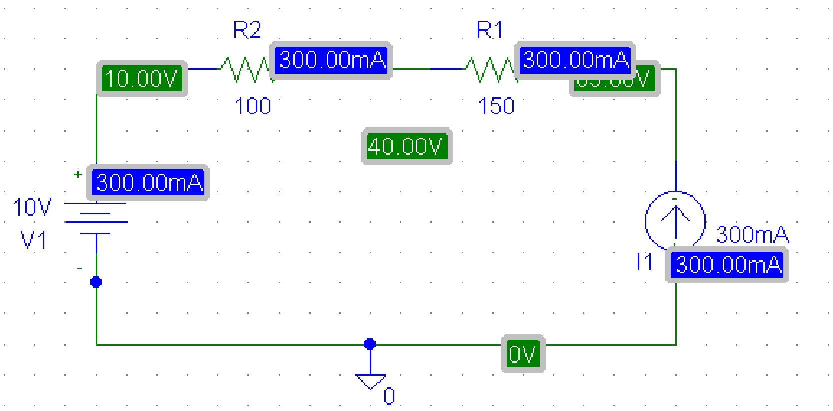
Bezüglich der Klemmen 4-5 ist für das Netz die Ersatzspannungsquelle oder die Ersatzstromquelle anzugeben:

Bestimmung des Innenwiderstandes: Dazu wird das Netz passiv gemacht:



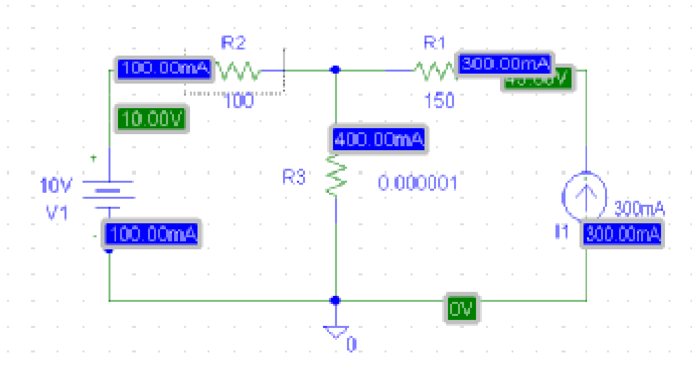
Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluß, Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt. In diesem Fall ist der Innenwiderstand des Netzes gleich dem Widerstand R_{12}.

Bestimmung der Leerlaufspannung: Dies ist die Spannung zwischen den Knoten oder Polen 3 und 4. Diese beträgt, wie man der PSpice-Analyse entnimmt, U_L = 40 V (Berechnung in Aufgabe 3).



Damit ist die Ersatzspannungsquelle bestimmt: U_L = 40 V, R_i =100 Ω.

Für die Ersatzstromquelle wird der Kurzschlußstrom benötigt. Er kann aus der Schaltung analytisch bestimmt werden:



Damit PSpice diesen Strom berechnet, wird statt eines Kurzschlusses ein sehr geringer Widerstand von 0,000001 Ω in den Pfad gelegt. Die Analyse ergibt I_K = 400 mA.

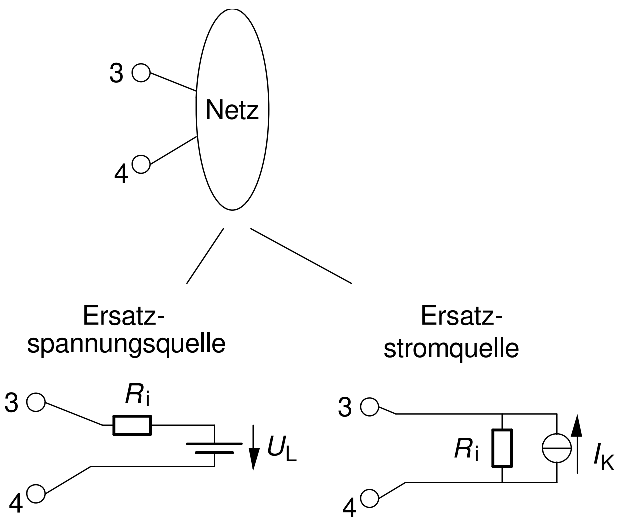
Man kann den Kurzschlußstrom in diesem Fall auch sehr einfach auf folgendem Weg bestimmen:

$$I_K = I_q + U_p/R_{12} = 300\text{ mA} + 10\text{ V}/100\ \Omega = 400\text{ mA}.$$

Eine andere Methode besteht darin, daß bei bekannter Leerlaufspannung und Innenwiderstand der Kurzschlußstrom durch

$$I_K = U_L/R_i = 40\text{V}/100\ \Omega = 400\text{ mA}$$

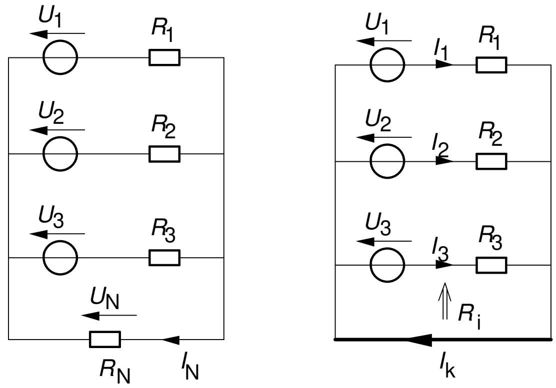
bestimmt werden kann. Damit ergeben sich folgende Ersatzschaltbilder:



Anwendung der Ersatzquellenmethode

Die Methode der Ersatzquellen läßt sich besonders gut in komplizierten Netzen anwenden, wenn Strom und Spannung **an einem Bauelement** gesucht ist. Dazu wird zunächst das Bauelement entfernt und bezüglich seiner Klemmen die geeignete Ersatzquelle bestimmt. Anschließend wird das Bauelement mit der Ersatzquelle zusammengeschaltet und dann entweder rechnerisch oder graphisch der Strom-pannungszusammenhang am Bauelement bestimmt.

a) Gesucht sind Strom und Spannung am Widerstand R_N.



Links im Bild ist die Schaltung dargestellt. Die Größen sind $U_1 = 150$ V, $U_2 = 300$ V, $U_3 = 50$ V, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 0{,}1\ \Omega$. Der Widerstand R_N habe den Wert 5,5 Ω.

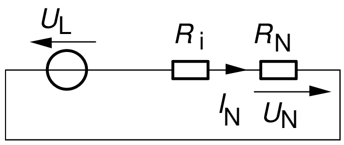
Hier empfiehlt sich eine Lösung mit der Ersatzstromquelle.

Bestimmung des Kurzschlußstroms

$$I_K = U_1/R_1 + U_2/R_2 + U_2/R_3 = 150\ \text{V}/1\ \Omega + 300\ \text{V}/4\ \Omega + 50\ \text{V}/0{,}1\ \Omega = 725\ \text{A}.$$

Bestimmung des Innenwiderstandes:

$$1/R_i = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 1/\ 1\ \Omega + 1/\ 4\ \Omega + 1/\ 0{,}1\ \Omega = 11{,}25\ /\ \Omega = 1/0{,}08889\ \Omega$$



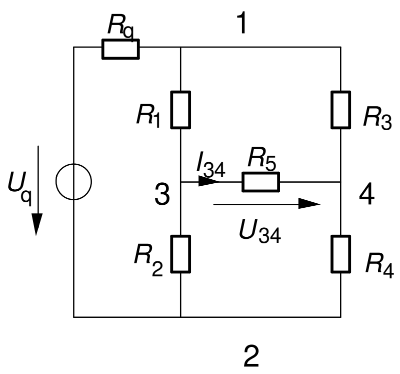
Bestimmung der Leerlaufspannung

$$U_L = R_i I_K = 0{,}088889\ \Omega \cdot 725\ \text{A} = 64{,}444\ \text{V}.$$

Dann ist der Strom durch den Widerstand R_N

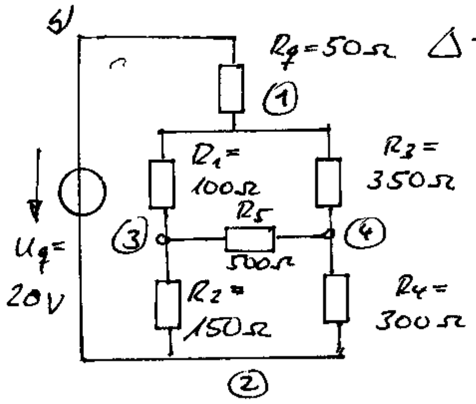
$$I_{RN} = U_L/(R_i + R_N) = 64{,}444\ \text{V}/\ (\ 0{,}08889\ \Omega + 5{,}5\ \Omega\ ) = 11{,}53\ \text{A}.$$

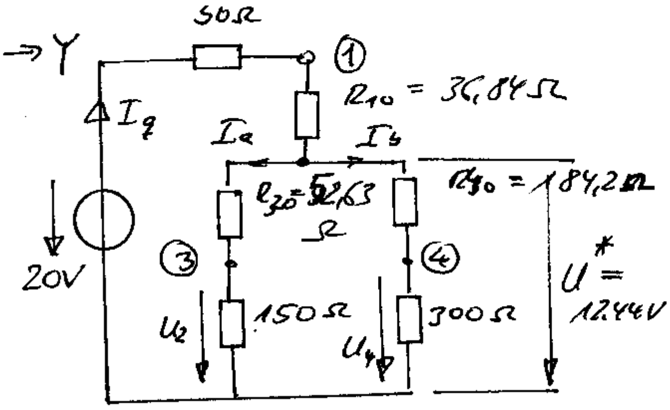
b)



$R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 350\ \Omega$, $R_4 = 300\ \Omega$, $R_5 = 500\ \Omega$, $R_q = 50\ \Omega$, $U_q = 20$ V, Diese Schaltung wird zunächst nach den Knoten- und Maschenregeln berechnet. Da eine Verkopplung der Ströme in den beiden Zweigen der Brücke über den Brückenwiderstand R_5 vorliegt, ist zunächst eine Δ-Y-Umwandlung vorzunehmen.

Anschließend werden Brückenspannung und Brückenstrom mittels der Helmholtzschen-Ersatzspannungsquelle berechnet.





$$I_q = \frac{20\,V}{50\,\Omega + 36{,}84\,\Omega + (52{,}63\,\Omega + 150\,\Omega) \| (184{,}2\,\Omega + 300\,\Omega)}$$

$$I_q = 0{,}0871\,A$$

$$U^* = U_q - (50\,\Omega + 36{,}84) \cdot 0{,}0871\,A = 12{,}44\,V$$

$$I_a = \frac{U^*}{52{,}63\,\Omega + 150\,\Omega} = 0{,}0614\,A$$

$$I_b = \frac{U^*}{184{,}2\,\Omega + 300\,\Omega} = 0{,}0257\,A$$

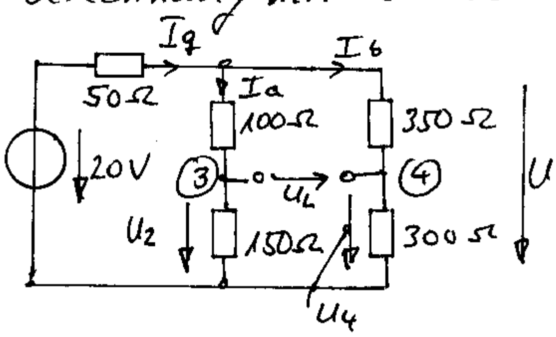
$$U_2 = R_2 \cdot I_a = 150\,\Omega \cdot 0{,}0614\,A = 9{,}21\,V$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_b = 300\,\Omega \cdot 0{,}0257\,A = 7{,}71\,V$$

$$\underline{\underline{U_{Br}}} = U_2 - U_4 = 9{,}21\,V - 7{,}71\,V = \underline{\underline{1{,}5\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_{Br}}} = \frac{U_{Br}}{R_5} = \frac{1{,}5\,V}{500\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}003\,A}}$$

Berechnung mittels Ersatzspannungsquelle:



$$I_q = \frac{20\,V}{50\,\Omega + 250\,\Omega \| 650\,\Omega}$$

$$I_q = \frac{20\,V}{(50 + 180{,}56)\,\Omega}$$

$$I_q = 0{,}0867\,A$$

$$U^* = 20V - 50\Omega \cdot I_q = 20V - 50\Omega \cdot 0{,}0867A$$

$$U^* = 15{,}67\,V$$

$$I_a = \frac{U^*}{(100+250\Omega)} = \frac{15{,}67V}{350\,\Omega} = 0{,}0627A$$

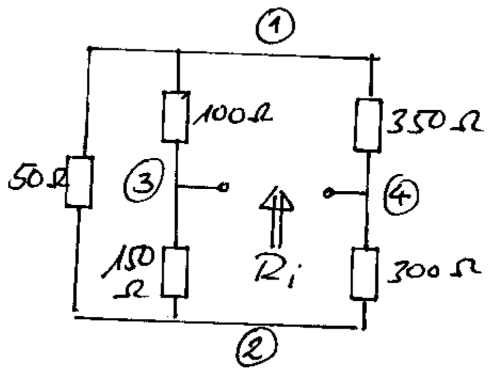
$$I_b = \frac{U^*}{(350+300)\Omega} = \frac{15{,}67V}{650\,\Omega} = 0{,}0241A$$

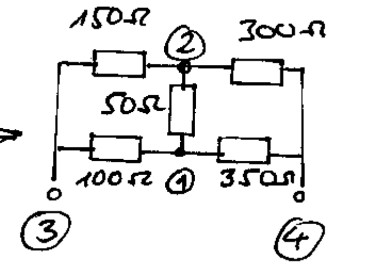
$$\underline{\underline{U_2}} = R_2 \cdot I_a = 150\Omega \cdot 0{,}0627\,A = \underline{\underline{9{,}405V}}$$

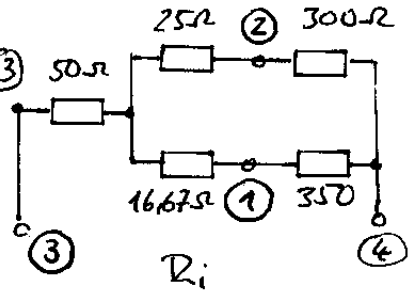
$$\underline{\underline{U_4}} = R_4 \cdot I_b = 300\Omega \cdot 0{,}0241A = \underline{\underline{7{,}23\,V}}$$

$\underline{\underline{U_L}} = 9{,}405V - 7{,}23\,V = \underline{\underline{2{,}175V}}$ ist d. Leerlaufspannung.

Der Innenwiderstand:





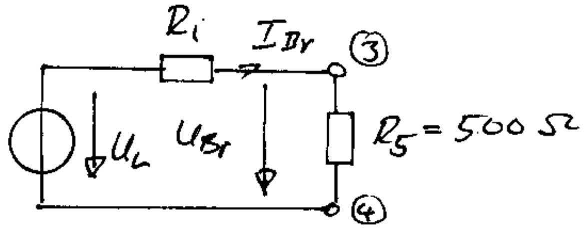


Δ-Y-Umwandlung

$$R_i = 50\Omega + 325\Omega \parallel 366{,}67\Omega$$

$$R_i = 222{,}29\Omega$$

Neues Ersatzschaltbild



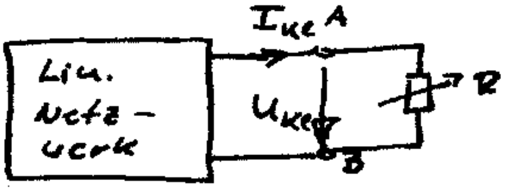
$$I_{Br} = \frac{U_L}{R_i + R_5} = \frac{2{,}175V}{(222{,}29+500)\Omega}$$

$$\underline{\underline{I_{Br} = 0{,}003\,A}}$$

$$U_{Br} = R_5 \cdot I_{Br} = 500\Omega \cdot 0{,}003A$$

$$\underline{\underline{U_{Br} = 1{,}5V}}$$

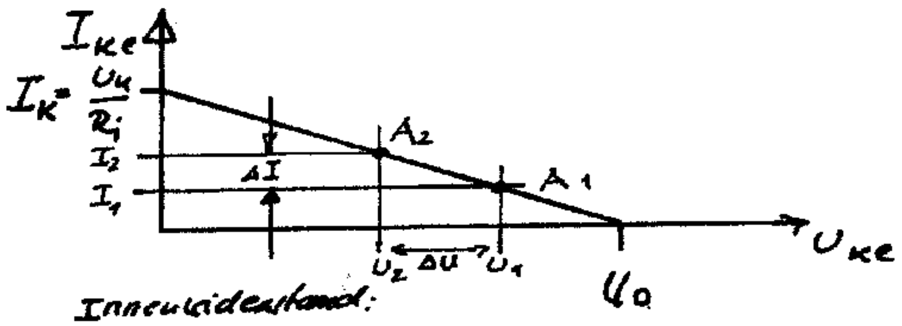
c)



a) $R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{90V}{10A} = 9\Omega$

$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{80V}{20A} = 4\Omega$

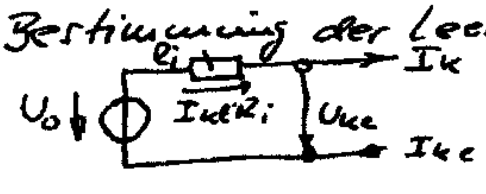
Um ein lineares Netzwerk durch eine ideale Spannungsquelle und Innenwiderstand zu ersetzen, müssen Leerlaufspannung U_0 oder Kurzschlußstrom I_K und der Innenwiderstand bekannt sein. Diese Größen lassen sich aus 2 Arbeitspunkten bestimmen. Diese liegen vor A1: U_1 und I_1, A2: U_2 und I_2. Aus diesen Arbeitspunkten gewinnt man die gesuchten Größen:



Innenwiderstand:

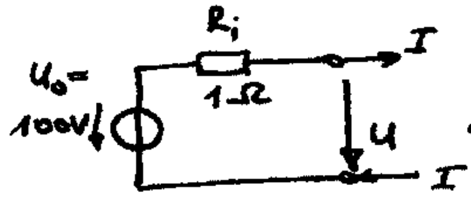
$$R_i = \left|\frac{\Delta U}{\Delta I}\right| = \left|\frac{90V - 80V}{10A - 20A}\right| = \frac{10V}{10A} = 1\Omega$$

Bestimmung der Leerlaufspg.: $U_0 = I_{KL} \cdot R_i + U_{KL}$

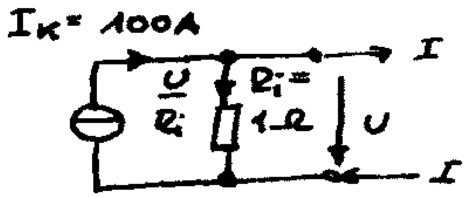


$U_0 = 10A \cdot 1\Omega + 90V = 100V$

$I_K = \frac{U_0}{R_i} = \frac{100V}{1\Omega} = 100A$



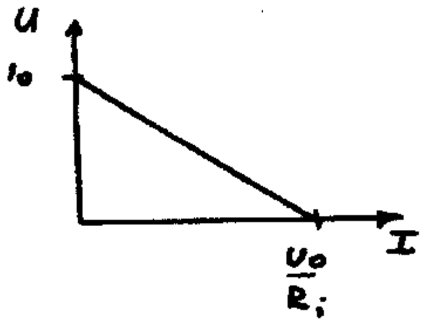
oder

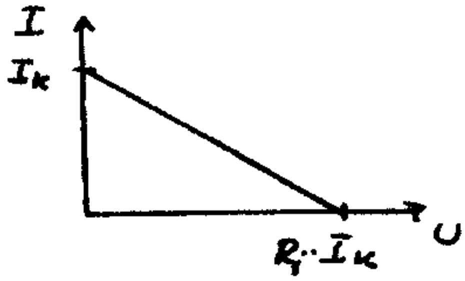


Ersatzspannungsquelle Ersatzstromquelle

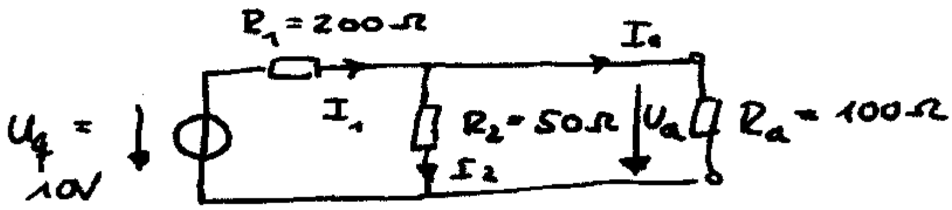
$$\underline{\underline{U = U_0 - I \cdot R_i}}$$

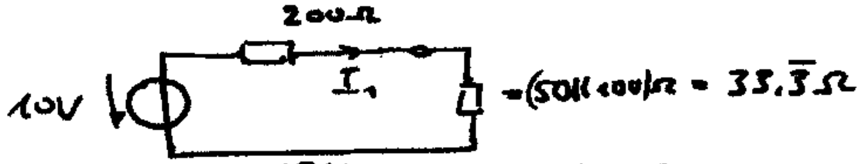
$$\underline{\underline{I = I_K - \frac{U}{R_i}}}$$





d)





$$I_1 = \frac{10V}{(200 + 33,3)\Omega} = 42,9\,mA$$

$$U_a = U_q - I_1 \cdot R_1 = 10V - 42,9\,mA \cdot 200\Omega = 1,42V$$

$$I_2 = \frac{U_a}{R_2} = \frac{1,42V}{50\Omega} = 28,4\,mA$$

$$I_a = \frac{U_a}{R_a} = 14,2\,mA$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= R_1 \cdot I_1^2 = 200\Omega \cdot 0,04286^2 A^2 = 0,3674W \\ P_2 &= R_2 \cdot I_2^2 = 50\Omega \cdot (28,5\,mA)^2 = 0,0408W \\ P_3 &= R_3 \cdot I_3^2 = 100\Omega \cdot (14,28\,mA)^2 = 0,0204W \end{aligned}\right\} = 0,4284W$$

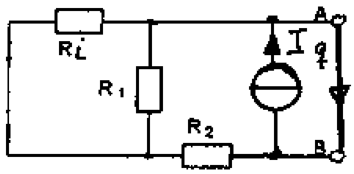
$$P_{Ges} = U_G \cdot I_1 = 10V \cdot 42,86\,mA = 0,4286\,W$$

Lösung e)

Lösung mit den Ersatzquellen

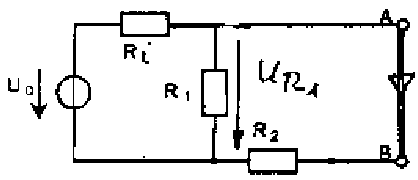
Es wird der Kurzschlußstrom an den Klemmen A-B bestimmt. Da zwei Quellen vorhanden sind, ist der Überlagerungssatz anzuwenden.

a) Spannungsquelle passiv



$$I_{Ka} = I_q = 2\,A$$

b) Stromquelle passiv



I_{Kb}

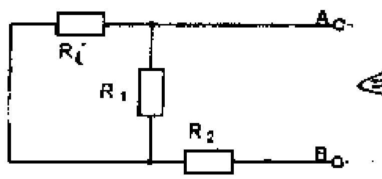
$$I_{Kb} = \frac{U_{R1}}{R_2}$$

$$U_{R1} = \frac{R_1 \| R_2}{R_i + R_1 \| R_2} \cdot U_0 = \frac{4 \| 4}{1 + 4 \| 4} \cdot 10\,V$$

$$I_{Kb} = \frac{2}{1+2}\, 10\,V = 1{,}667\,A$$

$$\underline{\underline{I_K}} = I_{Ka} + I_{Kb} = \underline{\underline{3{,}667\,A}}$$

c) Bestimmung des Innenwiderstandes Ri



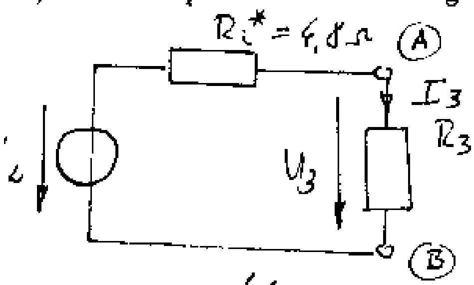
R_i^*

$$R_i^* = R_2 + R_1 \| R_i$$

$$R_i^* = 4\,\Omega + (4 \| 1)\,\Omega$$

$$\underline{\underline{R_i^* = 4{,}8\,\Omega}}$$

d) Die Ersatzquelle und Berechnung der Spannung und des Strom am Widerstand R3:



$$U_L = R_i^* \cdot I_K$$

$$U_L = 4{,}8\,\Omega \cdot 3{,}667\,A$$

$$\underline{\underline{U_L = 17{,}6\,V}}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_L}{R_i^* + R_3} = \frac{17{,}6\,V}{4{,}8\,\Omega + 5\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}8\,A}}$$

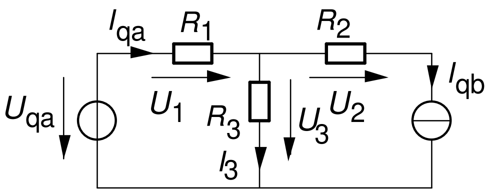
$$\underline{\underline{U_3}} = R_3 \cdot I_3 = 5\,\Omega \cdot 1{,}8\,A = \underline{\underline{9\,V}}$$

3. Aufgabe - Überlagerung

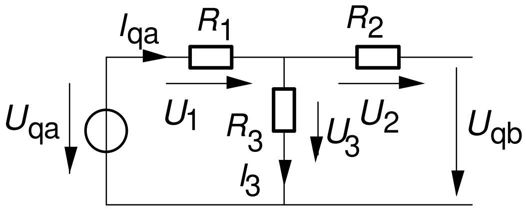
a) Die Aufgabe wird zuerst nach dem Überlagerungsverfahren und anschließend mit der Methode der Ersatzspannungsquelle gelöst.

1. Methode - Überlagerungsverfahren

Die Schaltung: $U_{qb} = 10$ V, $I_{qb} = 200$ mA, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$.



1. Schritt: Spannungsquelle aktiv, Stromquelle inaktiv - entfernt



$U_{qa} = 10V \;;\; I_{qb} = 0$

$$U_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot U_{qa} = \frac{300\Omega}{(100+300)\Omega} \cdot 10V$$

$U_3 = 7{,}5V$

$$I_{qa} = \frac{U_{qa}}{R_1 + R_3} = \frac{10V}{100\Omega + 300\Omega} = 0{,}025A$$

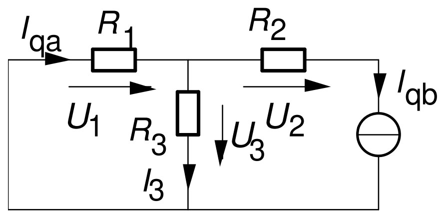
$I_3 = I_{qa} = 0{,}025A$

$I_{qb} = 0 ; \quad U_{qb} = U_3 \quad (\text{da } I_{qb} = 0)$

$U_1 = R_1 \cdot I_{qa} = 100\Omega \cdot 0{,}025A = 2{,}5V$

$U_2 = R_2 \cdot I_{qb} = 200\Omega \cdot 0A = 0V$

2. Schritt: Spannungsquelle inaktiv -kurzgeschlossen, Stromquelle aktiv



$U_{qa} = 0 \quad ; \quad I_{qb} = 0{,}2\,A$

$$U_3 = -\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot I_{qb} = -\frac{100 \cdot 300}{100 + 300}\,\Omega \cdot 0{,}2\,A = -15\,V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{-15\,V}{300\,\Omega} = -0{,}05\,A$$

$$I_{qa} = I_{qb} + I_3 = 0{,}2\,A - 0{,}05\,A = 0{,}15\,A$$

$$U_{qb} = U_3 - U_2 = -15\,V - R_2 \cdot I_{qb} = -15\,V - 200\,\Omega \cdot 0{,}2\,A$$

$$U_{qb} = -55\,V$$

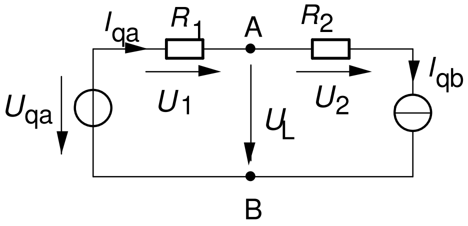
$$U_{R1} = R_1 \cdot I_{qa} = 100\,\Omega \cdot 0{,}15\,A = 15\,V$$

$$U_{R2} = R_2 \cdot I_{qb} = 200\,\Omega \cdot 0{,}2\,A = 40\,V$$

3. Schritt: Ergebnisse Überlagern

	1. Schritt	2. Schritt	Summe
U_{qa}	10 V	0	10 V
U_{qb}	7,5 V	−55 V	−47,5 V
U_{R1}	2,5 V	15 V	17,5 V
U_2	0 V	40 V	40 V
U_3	7,5 V	−15 V	−7,5 V
I_{qa}	0,025 A	0,15 A	0,175 A
I_{qb}	0	0,2 A	0,2 A
I_3	0,025 A	−0,05 A	−0,025 A

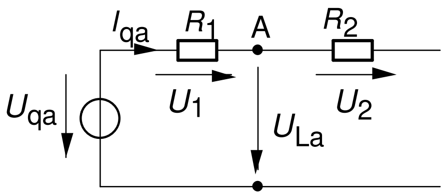
2. Methode: Anwendung der Ersatzspannungsquelle



Bezüglich der Klemmen A–B wird die Ersatzspannungsquelle bestimmt.

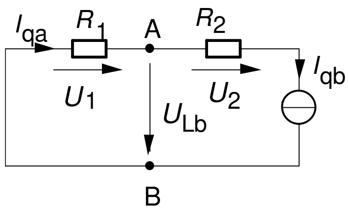
1. Schritt: Bestimmung der Leerlaufspannung. Dazu ist wieder der Überlagerungssatz anzuwenden.

Spannungsquelle aktiv, Stromquelle inaktiv liefert U_{La}:



$$U_{La} = U_{qa} = 10\text{ V}$$

Spannungsquelle inaktiv, Stromquelle aktiv liefert U_{Lb}

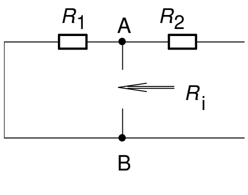


$$U_{Lb} = -R_1 \cdot I_{qb} = -20\text{ V}$$

Dann ist die Leerlaufspannung

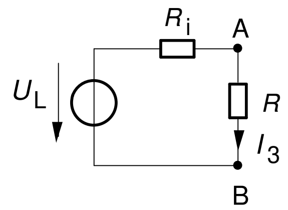
$$U_L = U_{La} + U_{Lb} = 10\text{ V} - 20\text{ V} = -10\text{ V}$$

Bestimmung des Innenwiderstandes



$$R\text{i} = R_1 = 100\ \Omega$$

Die Ersatzschaltung



$$I_3 = \frac{U_L}{R_1 + R_3} = \frac{-10V}{(100+300)\,\Omega} = -0{,}025A$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3 = 300\,\Omega(-0{,}025A) = -7{,}5V$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_{qb} = 200\,\Omega \cdot 0{,}2\,A = 40V$$

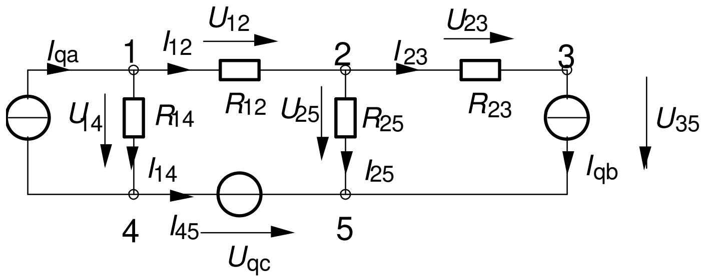
$$U_{qb} = -U_2 + U_3 = -40V - 7{,}5V = -47{,}5V$$

$$I_{qa} = \frac{U_{qa} - U_3}{R_1} = \frac{10V + 7{,}5V}{100\,\Omega} = 0{,}175A$$

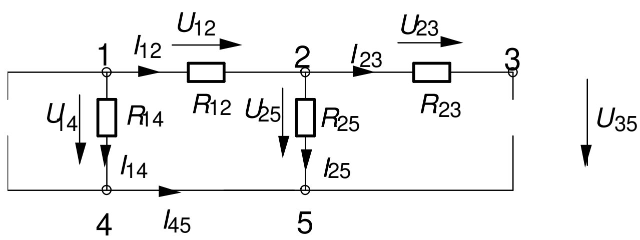
$$U_1 = R_1 \cdot I_{qa} = 100\,\Omega \cdot 0{,}175A = 17{,}5A$$

b) Hier wird ganz ausführlich das Überlagerungsverfahren beschrieben

Das im Bild dargestellte Netzwerk wird aus einer Spannungsquelle und zwei Stromquellen gespeist. Für jeden Zweig sind die Ströme und Spannungen gesucht.



Das passive Netz (Stromquellen und Spannungsquelle sind nicht vorhanden)



Zur besseren Übersicht werden zwei Tabellen angelegt: die Tabelle der Ströme und die Tabelle der Spannungen.

Die Tabelle der Ströme

Erregung	I_{12}	I_{14}	I_{23}	I_{25}	I_{35}	I_{45}
I_{qa} = 10 A						
I_{qb} = 5 A						
U_{qc} =20 V						
Summe						

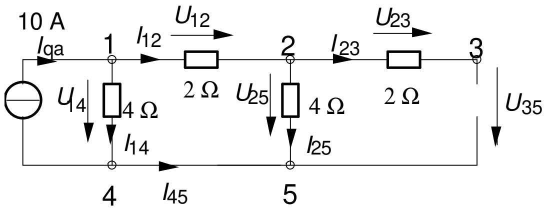
Die Tabelle der Spannungen

Erregung	U_{12}	U_{14}	U_{23}	U_{25}	U_{35}	U_{45}
I_{qa} = 10 A						
I_{qb} = 5 A						
U_{qc} =20 V						
Summe						

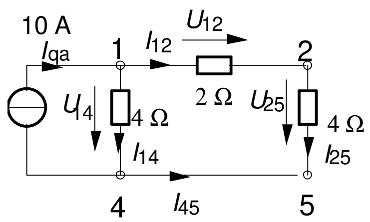
<u>Die Berechnungen</u>

Die Werte: I_{qa} = 10 A, I_{qb} = 5 A, U_{qc} = 20 V, R_{12} = 2 Ω, R_{14} = 4 Ω, R_{23} = 2 Ω, R_{25} = 4 Ω

<u>Erste Quelle I_{qa} = 10 A ist aktiv:</u>



Neues Ersatzschaltbild:



Am Knoten 1 gilt: $I_{qa} = I_{12} + I_{14}$ und der Strom I_{qa} teilt sich folgendermaßen zwischen den Knoten 1 und 4 auf:

$$\frac{I_{qa}}{I_{14}} = \frac{G_{14}+G_{15}}{G_{14}} = \frac{\frac{1}{R_{14}}+\frac{1}{R_{15}}}{\frac{1}{R_{14}}} = \frac{R_{14}}{R_{14}}+\frac{R_{14}}{R_{15}} = 1+\frac{R_{14}}{R_{15}} = \frac{R_{14}+R_{15}}{R_{15}}$$

Der Widerstand zwischen den Knoten 1 und 5 besteht aus der Reihenschaltung der Widerstände R_{12} und R_{25}, also ist

$$R_{15} = R_{12} + R_{25} = 2\ \Omega + 4\ \Omega = 6\ \Omega.$$

Dann folgt $$\frac{I_{qa}}{I_{14}} = \frac{R_{14}+R_{15}}{R_{15}} = \frac{4\ \Omega + 6\ \Omega}{6\ \Omega} = \frac{10}{6}.$$

Daraus folgt $$I_{14} = I_{qa} / 1{,}333 = 10\ \text{A} / (10/6) = 6\ \text{A}$$

$$I_{12} = I_{aq} - I_{14} = 10\ \text{A} - 6\ \text{A} = 4\ \text{A}$$

Außerdem ist wegen der Reihenschaltung der Zweige zwischen den Knoten 1 und 4

$$I_{25} = I_{12} = -I_{45} = 4\ \text{A}.$$

Der Strom zum Knoten 3 ist null:

$$I_{23} = 0 = I_{35}$$

Die Spannungen sind dann:

$$U_{14} = R_{14} \cdot I_{14} = 4\ \Omega \cdot 6\ \text{A} = 24\ \text{V}$$

$$U_{12} = R_{12} \cdot I_{12} = 2\ \Omega \cdot 4\ \text{A} = 8\ \text{V}$$

$$U_{25} = R_{25} \cdot I_{25} = 4\ \Omega \cdot 4\ \text{A} = 16\ \text{V}$$

Die Ströme:

Da $I_{23} = 0$ ist, ist auch $U_{23} = 0$.

Da $U_{23} = 0$ ist, ist $U_{35} = U_{25}$.

Da $R_{45} = 0$ ist, ist $U_{45} = R_{45} \cdot I_{45} = 0$.

Eintragen der Teilergebnisse in die Tabellen:

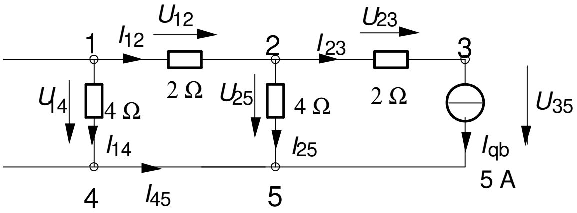
Die Ströme

Erregung	I_{12}	I_{14}	I_{23}	I_{25}	I_{35}	I_{45}
I_{qa} = 10 A	4 A	6 A	0	4 A	0	–4 A

Die Spannungen

Erregung	U_{12}	U_{14}	U_{23}	U_{25}	U_{35}	U_{45}
I_{qa} = 10 A	8 V	24 V	0	16 V	16	0

Zweite Quelle I_{qb} = 5 A ist aktiv:



Am Knoten 3 gilt aufgrund der Reihenschaltung von Quelle und Widerstand R_{23} $I_{23} = I_{qb} = 5$ A. Dann ist die Spannung $U_{23} = R_{23} \cdot I_{23} = 2\ \Omega \cdot 5\ \text{A} = 10\ \text{V}$.

Am Knoten 2 teilt sich der Strom I_{23} in die Ströme I_{12} und I_{25} auf. Die Stromaufteilung wird wieder durch die Widerstände bestimmt. Es gilt in diesem Fall:

$$\frac{I_{25}}{-I_{23}} = \frac{I_{25}}{-I_{qb}} = -\frac{R_{24}}{R_{24}+R_{25}} = -\frac{6\ \Omega}{6\ \Omega + 4\ \Omega} = -0{,}6$$

wobei $R_{24} = R_{12} + R_{14} = 2\ \Omega + 4\ \Omega = 6\ \Omega$ und $R_{25} = 4\ \Omega$ ist. Mit $I_{qb} = I_{23}$= 5 A folgt für den Strom

$$I_{25} = -0{,}6 \cdot I_{23} = -0{,}6 \cdot 5\ \text{A} = -3\ \text{A}.$$

Der Strom I_{12} berechnet sich zu

$$I_{12} = I_{23} \cdot I_{25} = 5\ \text{A} - 3\ \text{A} = 2\ \text{A}$$

Der Strom I_{14} ist negativ zum Strom I_{12} und der Strom I_{45} ist gleich dem Strom I_{14}. Daher folgt

$$I_{14} = -I_{12} = -2\ \text{A} \quad \text{und} \quad I_{45} = I_{14} = -2\ \text{A}$$

Der Strom I_{35} ist gleich dem Strom der Stromquelle I_{qb}: $I_{35} = I_{qb} = 5$ A.

Die Spannung zwischen den Knoten 2 und 5 ist

$$U_{25} = R_{25} \cdot I_{25} = 4\ \Omega \cdot (-3\ \text{A}) = -12\ \text{V}$$

Die Spannung zwischen den Knoten 2 und 3 ist

$$U_{23} = R_{23} \cdot I_{23} = 2\ \Omega \cdot 5\ \text{A} = 10\ \text{V}$$

Die Spannung zwischen den Knoten 2 und 5 ist die Addition der Spannungen über die Widerstände R_{23} und R_{25}:

$$U_{35} = -U_{23} + U_{25} = -10\ \text{V} + (-12\ \text{V}) = -22\ \text{V}$$

Die Spannung zwischen den Knoten 1 und 2 ist

$$U_{12} = R_{12} \cdot I_{12} = 2\ \Omega \cdot 2\ \text{A} = 4\ \text{V}$$

Die Spannung zwischen den Knoten 1 und 4 ist

$$U_{14} = R_{14} \cdot I_{14} = 4\ \Omega \cdot (-2\ \text{A}) = -8\ \text{V}$$

Die Spannung zwischen den Knoten 4 und 5 ist

$$U_{45} = R_{45} \cdot I_{45} = 0\ \Omega \cdot (-2\ \text{A}) = 0\ \text{V}$$

Eintragen der Teilergebnisse in die Tabellen:

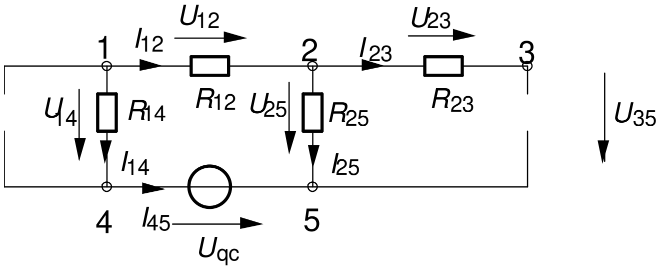
Die Ströme

Erregung	I_{12}	I_{14}	I_{23}	I_{25}	I_{35}	I_{45}
I_{qb} = 5 A	2 A	–2 A	5 A	–3 A	5 A	–2 A

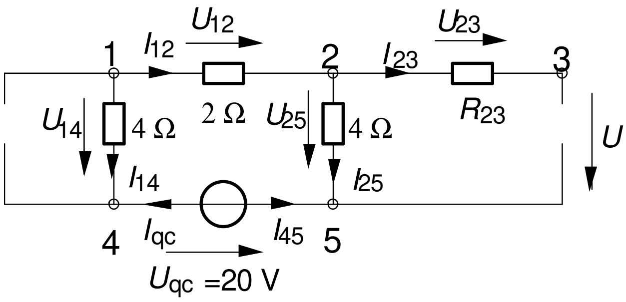
Die Spannungen

Erregung	U_{12}	U_{14}	U_{23}	U_{25}	U_{35}	U_{45}
I_{qb} = 5 A	4 V	–8 V	10 V	-12 V	–22 V	0

<u>Dritte Quelle U_{qb} = 20 V ist aktiv:</u>



In diesem Fall tritt nur ein Strom über die Zweige 1-2, 1-4, 2-5 und 4-5 auf. Der Strom wird von der Quelle U_{qc} geliefert und hat die entgegengesetzte Richtung zur Stromrichtung I_{45}.



Es gilt
$$I_{qc} = \frac{U_{qc}}{R_{12} + R_{14} + R_{25}} = -I_{45}\,.$$

Einsetzen liefert:

$$I_{qc} = \frac{20\text{ V}}{2\,\Omega + 4\,\Omega + 4\,\Omega} = 2\text{ A} = -I_{45}$$

Aus der Zeichnung entnimmt man folgende Zusammenhänge:

$$I_{45} = -I_{qc} = -2\text{ A}$$

$$I_{14} = I_{45} = -2\text{ A}$$

$$I_{12} = I_{25} = I_{qc} = 2\text{ A}$$

und
$$I_{23} = I_{35} = 0$$

Die Spannungen

$$U_{45} = U_{qc} = 20\text{ V}$$

$$U_{12} = R_{12} \cdot I_{12} = 2\ \Omega \cdot 2\ \mathrm{A} = 4\ \mathrm{V}$$

$$U_{14} = R_{14} \cdot I_{14} = 4\ \Omega \cdot -2\ \mathrm{A} = -8\ \mathrm{V}$$

$$U_{25} = R_{25} \cdot I_{25} = 4\ \Omega \cdot 2\ \mathrm{A} = 8\ \mathrm{V}$$

$$U_{23} = R_{23} \cdot I_{23} = 4\ \Omega \cdot 0\ \mathrm{A} = 0\ \mathrm{V}$$

und $U_{35} = U_{25} = 8\ \mathrm{V}$ (da $U_{23} = 0$ ist)

Eintragen der Teilergebnisse in die Tabellen:

Die Ströme

Erregung	I_{12}	I_{14}	I_{23}	I_{25}	I_{35}	I_{45}
$U_{qc} = 20$ V	2 A	–2 A	0 A	2 A	0 A	–2 A

Die Spannungen

Erregung	U_{12}	U_{14}	U_{23}	U_{25}	U_{35}	U_{45}
$U_{qc} = 20$ V	4 V	–8 V	0	8 V	8 V	20 V

<u>Letzter Teil: Ausfüllen der Tabellen und Überlagerung der Teilergebnisse:</u>

Die Ströme

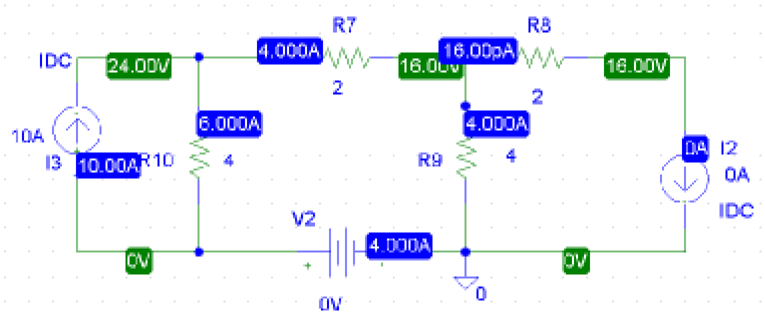
Erregung	I_{12}	I_{14}	I_{23}	I_{25}	I_{35}	I_{45}
$I_{qa} = 10$ A	4 A	6 A	0	4 A	0	–4 A
$I_{qb} = 5$ A	2 A	–2 A	5 A	–3 A	5 A	–2 A
$U_{qc} = 20$ V	2 A	–2 A	0 A	2 A	0 A	–2 A
Summe	8 A	2 A	5 A	3 A	5 A	–8 A

Die Spannungen

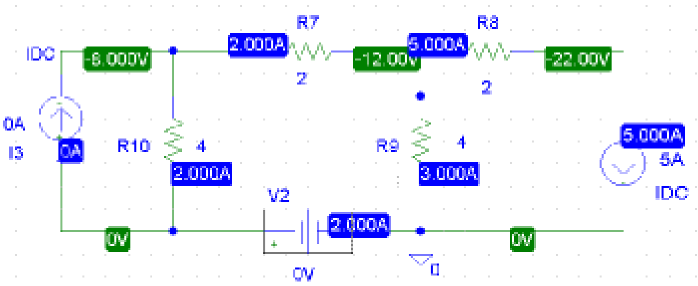
Erregung	U_{12}	U_{14}	U_{23}	U_{25}	U_{35}	U_{45}
$I_{qa} = 10$ A	8 V	24 V	0	16 V	16 V	0
$I_{qb} = 5$ A	4 V	–8 V	10 V	-12 V	–22 V	0
$U_{qc} = 20$ V	4 V	–8 V	0	8 V	8 V	20 V
Summe:	16 V	8 V	10 V	12 V	2 V	20 V

Die folgenden Bilder zeigen die mit PSpice gewonnenen Ergebnisse:

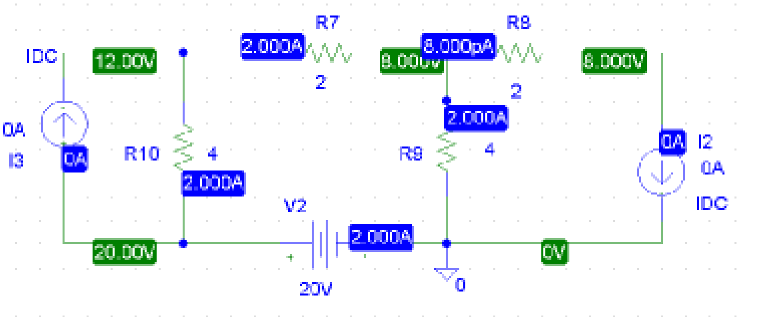
Stromquelle mit *I* = 10 A ist aktiv:



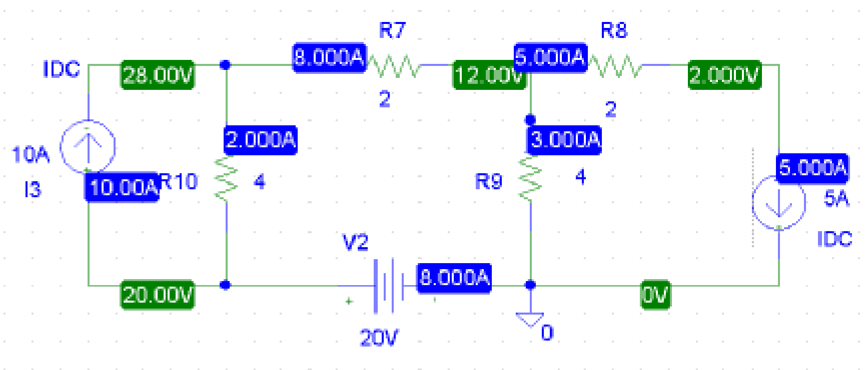
Stromquelle mit *I* = 5 A ist aktiv:



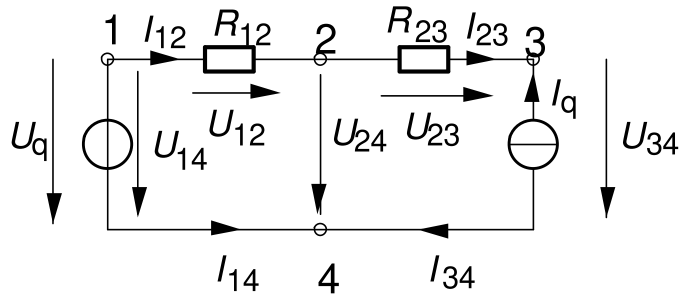
Spannungsquelle mit *U* = 20 V ist aktiv:



Alle Quellen sind aktiv:



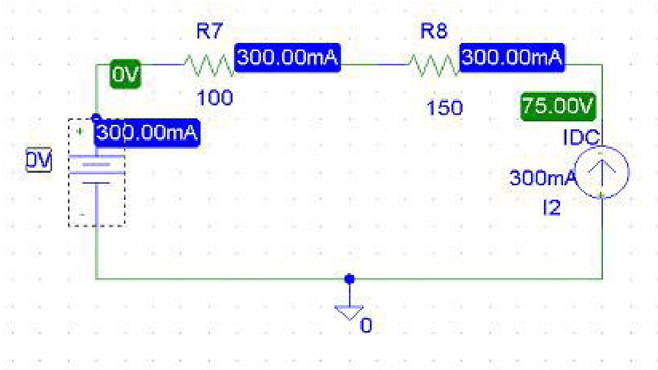
c)



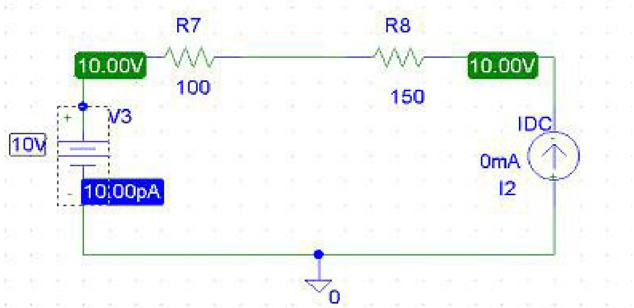
R_{12} = 100 Ω, R_{23} = 150 Ω, U_q =10 V, I_q = 300 mA.

Lösung nur mit PSpice

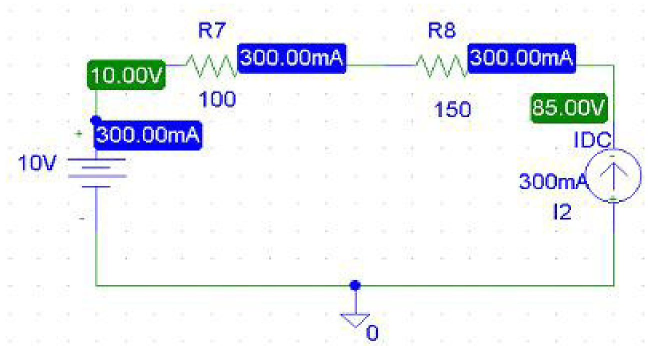
<u>Nur die Stromquelle ist aktiv</u>



<u>Nur die Spannungsquelle ist aktiv</u>

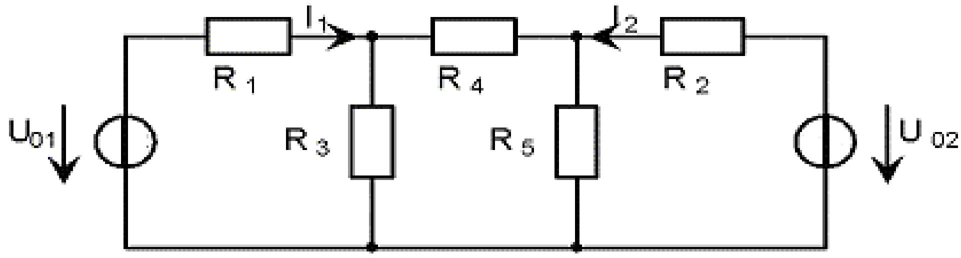


<u>Strom- und Spannungsquelle ist aktiv</u>

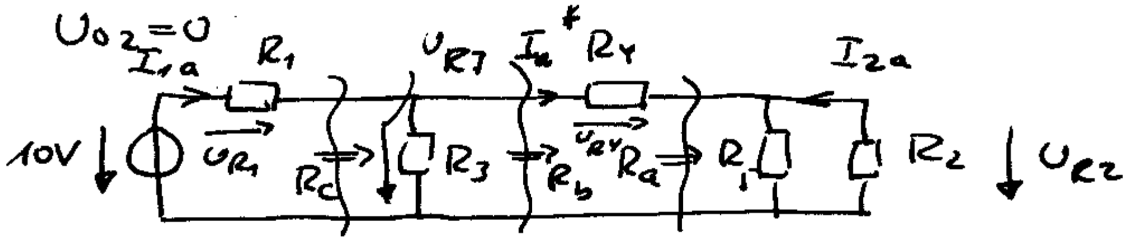


d)

Die Schaltung



1 . Teil: $U_{01} = 10$ V, $U_{02} = 0$



$$R_a = R_5 \parallel R_2 = \frac{4 \cdot 14}{4+14}\,\Omega = 3{,}111\,\Omega$$

$$R_b = R_4 + R_a = 28\,\Omega + 3{,}111\,\Omega = 31{,}111\,\Omega$$

$$R_c = R_3 \parallel R_b = \frac{7 \cdot 31{,}111}{7+31{,}111}\,\Omega = 5{,}7143\,\Omega$$

$$I_{1a} = \frac{10\,V}{R_1 + R_c} = \frac{10\,V}{(2+5{,}7143)\,\Omega} = 1{,}2963\,A$$

$$U_{R1} = I_{1a} \cdot R_1 = 1{,}2963\,A \cdot 2\,\Omega = 2{,}593\,V$$

$$U_{R3} = 10\,V - 2{,}593\,V = 7{,}407\,V$$

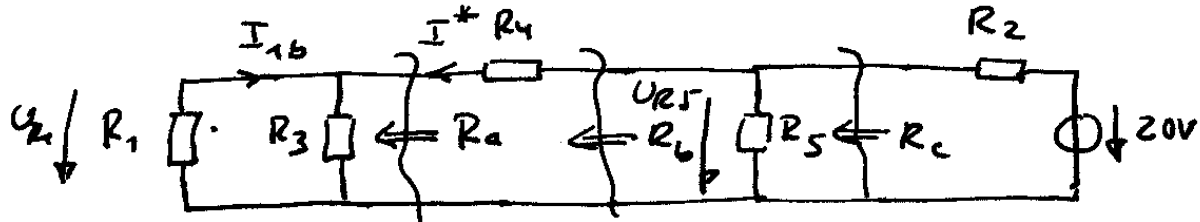
$$I_a^* = \frac{U_{R3}}{R_b} = \frac{7{,}407\,V}{31{,}111\,\Omega} = 0{,}2381\,A$$

$$U_{R2} = U_{R3} - I_a^* \cdot R_4 = 7{,}407\,V - 0{,}2381\,A \cdot 28\,\Omega$$

$$U_{R2} = 0{,}74\,V$$

$$I_{2a} = -\frac{0{,}74\,V}{R_2} = -\frac{0{,}74\,V}{4\,\Omega} = -0{,}1852\,A$$

2 . Teil: $U_{01} = 0$, $U_{02} = 20$ V



$$R_a = R_1 \| R_3 = \frac{2 \cdot 7}{9}\,\Omega = 1{,}555\,\Omega$$

$$R_b = R_4 + R_a = 28\,\Omega + 1{,}555\,\Omega = 29{,}555\,\Omega$$

$$R_c = R_5 \| R_b = \frac{14 \cdot 29{,}555}{14 + 29{,}555}\,\Omega = 9{,}5\,\Omega$$

$$I_{2b} = \frac{20\,V}{R_2 + R_c} = \frac{20\,V}{(4 + 9{,}5)\,\Omega} = 1{,}4815\,A$$

$$U_{R2} = R_2 \cdot I_{2b} = 4\,\Omega \cdot 1{,}4815\,A = 5{,}926\,V$$

$$U_{R5} = 20\,V - U_{R2} = 20\,V - 5{,}926\,V = 14{,}074\,V$$

$$U_{R1} = U_{R5} - I^* \cdot R_4$$

$$I^* = \frac{U_{R5}}{R_b} = \frac{14{,}074\,V}{29{,}555\,\Omega} = 0{,}4762\,A$$

$$U_{R1} = 14{,}074\,V - 0{,}4762\,A \cdot 28\,\Omega = 0{,}74\,V$$

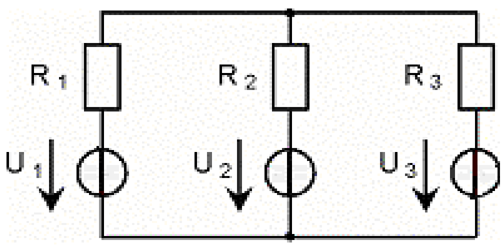
$$I_{1b} = -\frac{0{,}74\,V}{2\,\Omega} = -0{,}37\,A$$

Überlagern der Teilergebnisse:

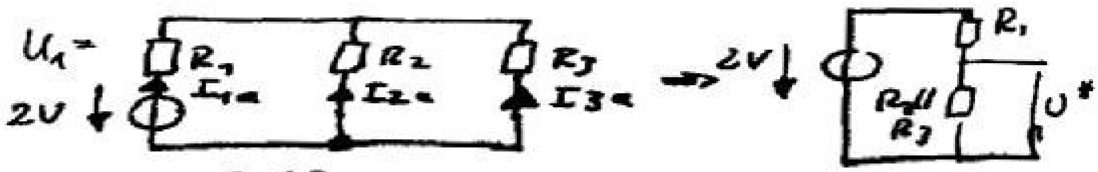
$$\underline{\underline{I_1}} = I_{1a} + I_{1b} = 1{,}2963\,A - 0{,}37\,A = \underline{\underline{0{,}9263\,A}}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = I_{2a} + I_{2b} = -0{,}1852\,A + 1{,}4815\,A = \underline{\underline{1{,}2963\,A}}$$

e) Die Schaltung:



1 . Teil: $U_1 = 2$ V, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$



$$U^* = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \cdot 2V \Rightarrow \qquad R_2 \parallel R_3 = \frac{2\Omega \cdot 2\Omega}{4\Omega} = 1\Omega$$

$$R_1 = 1\Omega$$

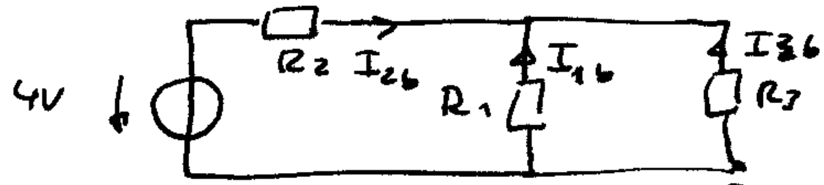
$$I_{1a} = \frac{2V}{2\Omega} = 1A$$

Der Strom teilt sich gleichmäßig auf R_2, R_3 auf, da beide Widerstände gleich groß sind

$$I_{2a} = I_{3a} = -0{,}5A$$

(neg. Vorzeichen, da I_{2a}, I_{3a} entgegengesetzte Pfeilrichtungen haben, wie der Strom fließt!)

2 . Teil: $U_1 = 0$, $U_2 = 4$ V, $U_3 = 0$



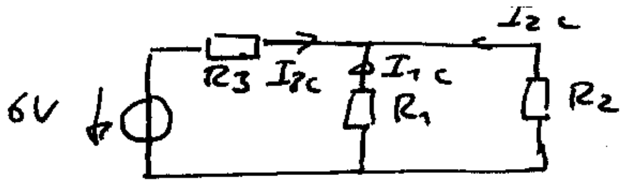
$R_1 = 1\Omega$; $R_3 = 2\Omega$; $R_1 \parallel R_3 = \frac{2}{3}\Omega$

$$I_{2b} = \frac{4V}{(2 + 2/3)\Omega} = 1{,}5A$$

Der Strom teilt sich in $R_1 : R_3$ wie $2:1$ auf!

$$I_{1b} = -\frac{2}{3} 1{,}5A = -1A; \quad I_{3b} = -\frac{1}{3} I_{2b} = -0{,}5A$$

3 . Teil: $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 6$ V



$$I_{3c} = \frac{6V}{R_3 + R_1 \| R_2} = \frac{6V}{2\Omega + 2/3\,\Omega} = 2{,}25A$$

Strom teilt sich wieder 1 : 2 auf $R_1 : R_2$ auf

$$I_{1c} = -\frac{2}{3}\, 2{,}25A = -1{,}5A$$

$$I_{2c} = -\frac{1}{3}\, 2{,}25A = -0{,}75A$$

Überlagern der Ströme liefert:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} + I_{1c} = 1A - 1A - 1{,}5A = -1{,}5A$$

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} + I_{2c} = -0{,}5A + 1{,}5A - 0{,}75A = 0{,}25A$$

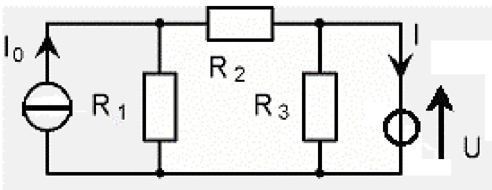
$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} + I_{3c} = -0{,}5A - 0{,}5A + 2{,}25A = 1{,}25A$$

Probe: Summe aller Ströme ist Null:

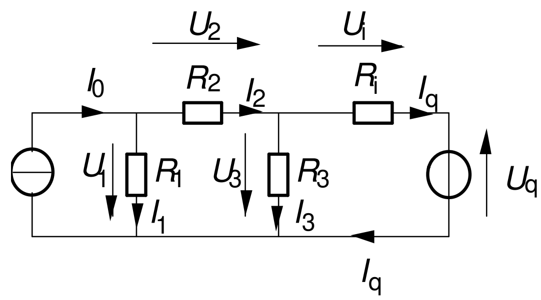
$$I_1 + I_2 + I_3 = (-1{,}5 + 0{,}25 + 1{,}25)A = 0$$

f)

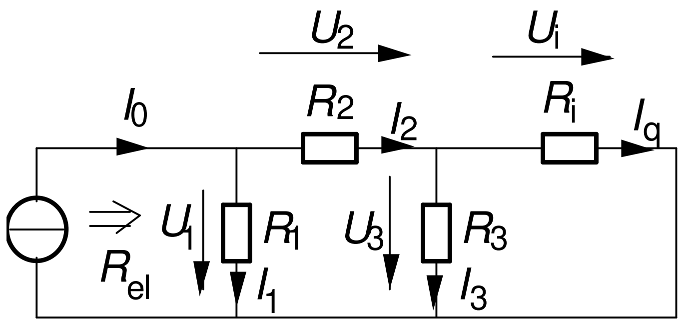
Die Schaltung



Zunächst den Innenwiderstand der Quelle berücksichtigen ($I_0 = 2$ A, Uq = 10 V):



1 . Teil: I_0 = 2 A, Uq = 0 V



$$R_{el} = R_1 \| (\underbrace{R_2 + \underbrace{R_3 \| R_i}_{1{,}429\,\Omega}}_{6{,}429\,\Omega}) = 5 \| (5 + 2 \| 5)\,\Omega = \frac{5 \cdot 6{,}429}{5 + 6{,}429}\,\Omega = 2{,}813\,\Omega$$

$$U_1 = R_{el} \cdot I_0 = 2{,}813\,\Omega \cdot 2\,A = 5{,}625\,V$$

$$I_1 = U_1/R_1 = 5{,}625\,V/5\,\Omega = 1{,}125\,A$$

$$I_2 = I_0 - I_1 = 2\,A - 1{,}125\,A = 0{,}875\,A$$

$$U_2 = R_2\,I_2 = 5\,\Omega \cdot 0{,}875\,A = 4{,}375\,V$$

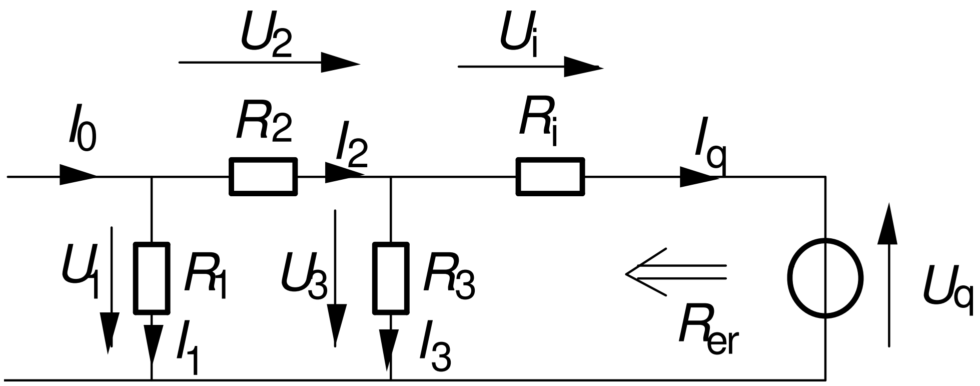
$$U_3 = U_1 - U_2 = 5{,}625\,V - 4{,}375\,V = 1{,}25\,V$$

$$I_3 = U_3/R_3 = \frac{1{,}25\,V}{2\,\Omega} = 0{,}625\,A$$

$$I_q = I_2 - I_3 = 0{,}875\,A - 0{,}625\,A = 0{,}25\,A$$

$$U_i = R_i \cdot I_q = 5\,\Omega \cdot 0{,}25\,A = 1{,}25\,V$$

2 . Teil: I_0 = 0 A, Uq = 10 V



$$R_{er} = R_i + R_3 \| (R_1 + R_2) = 5 + 2 \| (5+5)\,\Omega = (5 + \frac{2 \cdot 10}{12})\,\Omega = 6{,}667\,\Omega$$

$$I_q = U_q / R_e = 10\,V / 6{,}667\,\Omega = 1{,}5\,A; \quad U_i = R_i I_q = 5\,\Omega \cdot 1{,}5\,A = 7{,}5\,V$$

$$U_3 = R_i \cdot I_q - U_q = 5\,V \cdot 1{,}5\,A - 10\,V = -2{,}5\,V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{-2{,}5\,V}{2\,\Omega} = -1{,}25\,A$$

$$I_2 = I_3 + I_q = -1{,}25\,A + 1{,}5\,A = 0{,}25\,A$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_2 = 5\,\Omega \cdot 0{,}25\,A = 1{,}25\,V$$

$$I_1 = -I_2 = -0{,}25\,A$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 5\,\Omega\,(-0{,}25\,A) = -1{,}25\,V$$

	U_1	U_2	U_3	U_i
1:	5,625V	4,375V	1,25 V	1,25V
2:	-1,25V	1,25V	-2,5V	7,5V
Σ	4,375V	5,625V	-1,25V	8,75V

	I_1	I_2	I_3	I_q
1:	1,125A	0,875A	0,625A	0,25A
2:	-0,25A	0,25A	-1,25A	1,5A
Σ	0,875A	1,125A	-0,625A	1,75A

gesuchter Strom:

$$\underline{\underline{I_q = 1{,}75\,A}}$$

g)

Die Ergebnisse für die Ströme:

	I_1	I_2	I_3	I_4
Ströme in A	5 A	-2,188 A	-0,469 A	2,344 A

Spannungen an den Widerständen:

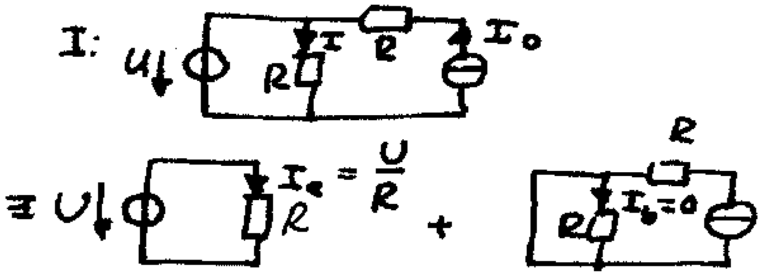
	U_{R1}	U_{R2}	U_{R3}	U_{R4}
Spannungen in V	10 V	-8,75 V	-3,752 V	18,752 V

Spannung U_I an der Stromquelle:

$$U_I = 28{,}752\ \text{V}$$

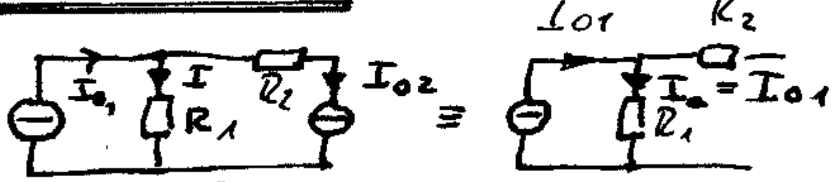
h)

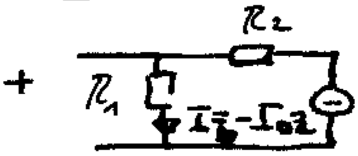
I:



$$\underline{\underline{I = I_a + I_b = U/R}}$$

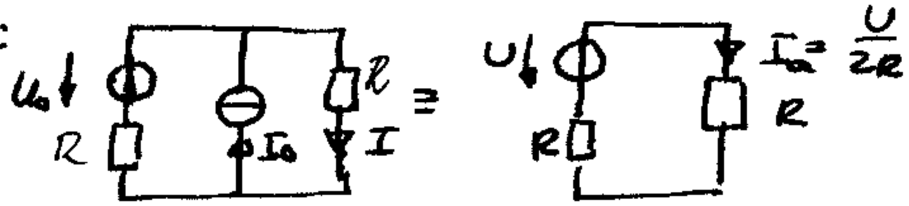
II:

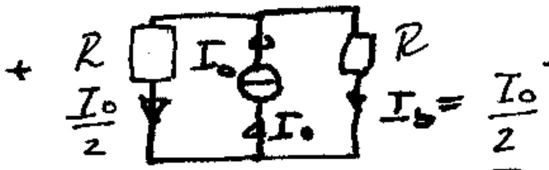




$$I = I_a + I_b = I_{01} - I_{02}$$

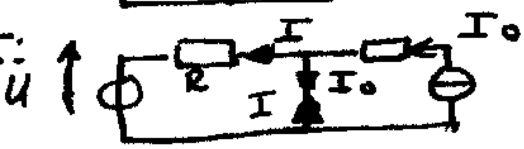
III:





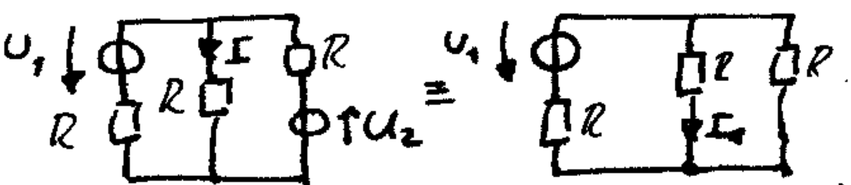
$$I = I_a + I_b = \frac{U}{2R} + \frac{I_0}{2}$$

IV:



$$I = + \frac{U}{R}$$

V:



$$I_a = \frac{U_1}{R + R/2}$$

$$I = I_a + I_b = \frac{U_1 - U_2}{R + R/2}$$

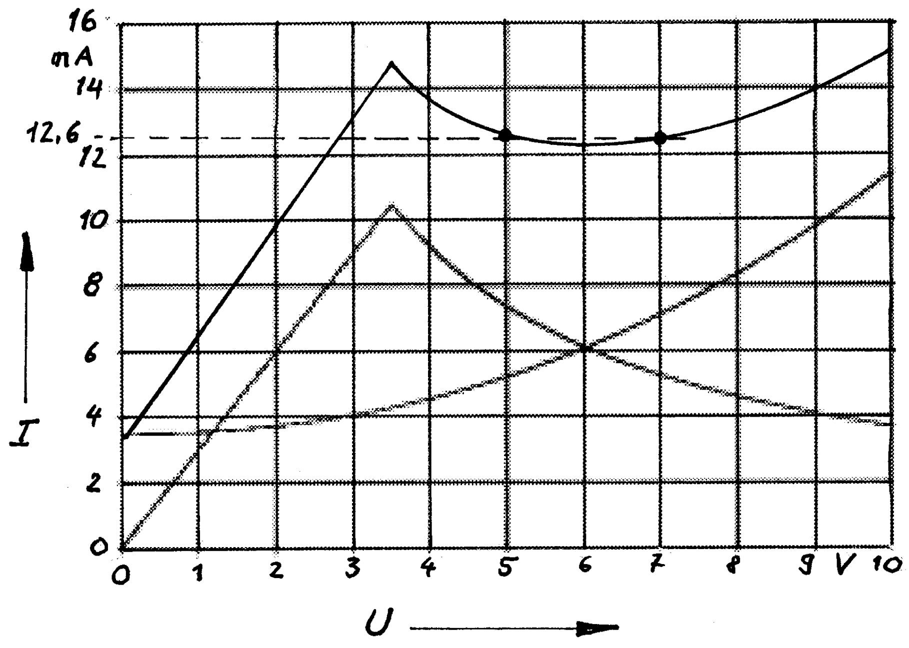
$$I_b = -\frac{U_2}{R + R/2}$$

5.8 Lösungen

5.8.1 Überlagerung von Kennlinien

1. Ausgabe

Elemente parallel geschaltet: Bei gleicher Spannung addieren sich die Ströme für die neue Kennlinie

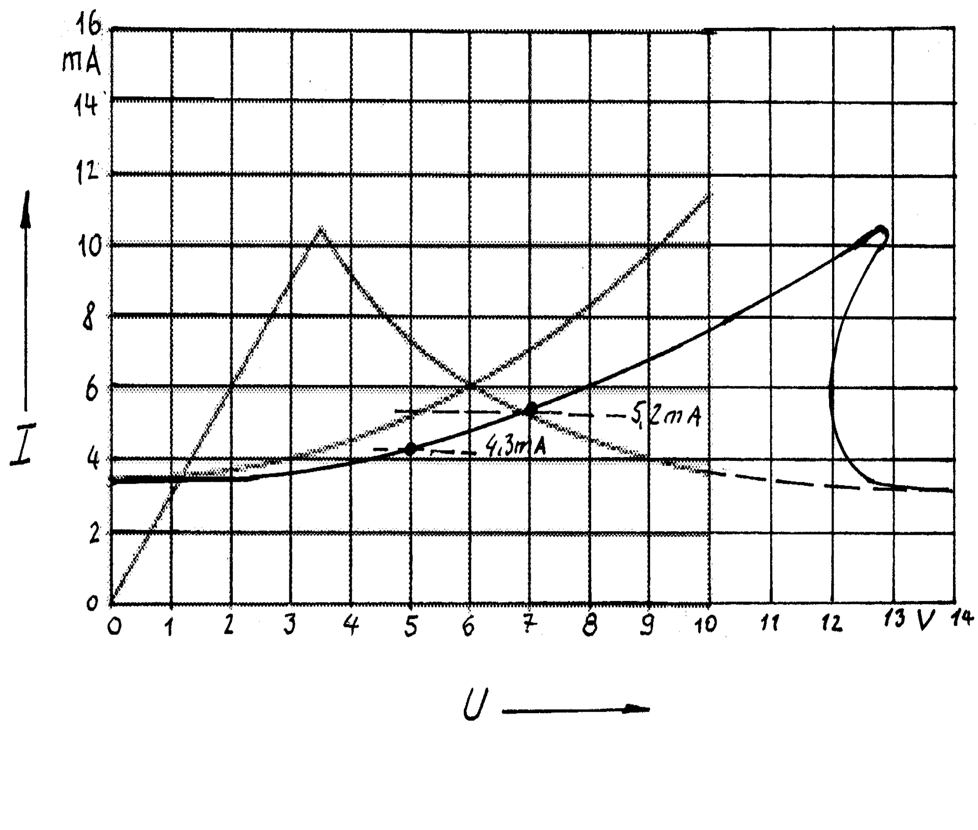


Die gesuchten Gleichstromwiderstände:

Arbeitspunkt A1: U = 5 V, I = 12,6 mA, R =U/I = 5V/12,6 mA = 396,8 Ω

Arbeitspunkt A2: U = 7 V, I = 12,6 mA, R =U/I = 5V/12,6 mA = 555,56 Ω

Elemente in Reihe geschaltet: Bei gleichem Strom addieren sich die Spannungen für die neue Kennlinie



Die gesuchten Gleichstromwiderstände:

Arbeitspunkt A1: $U = 5$ V, $I = 4{,}3$ mA, $R = U/I = 5\text{V}/4{,}3\text{ mA} = 1162{,}79\ \Omega$

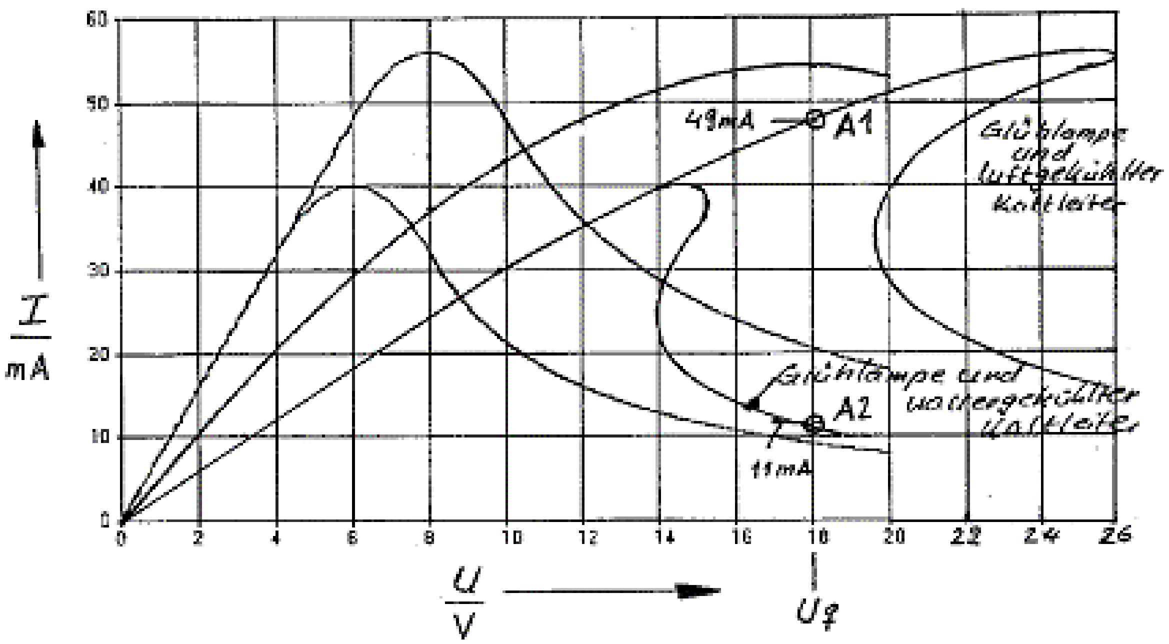
Arbeitspunkt A2: $U = 7$ V, $I = 5{,}2$ mA, $R = U/I = 5\text{V}/5{,}2\text{ mA} = 961{,}54\ \Omega$

2. Aufgabe

Als erstes wird die Kennlinie der Glühlampe mit in die Graphik eingetragen, die die Kennlinien des wassergekühlten und luftgekühlten Kaltleiters enthält.

Da anfangs das Wasser noch nicht hoch genug gestiegen ist, liegt im ersten Betriebsfall der Kaltleier in Luft. Um den Betriebszustand (Strom-, Spannungs-Arbeitspunkt) von Kaltleiter und Glühlampe zu finden, wird die Kennlinie aus der Reihenschaltung von Glühlampe mit Kaltleiter in Luft gebildet. Aufgrund der Reihenschaltung, bei der der Strom konstant ist und die Spannungen sich addieren, ergibt sich die gemeinsame Kennlinie aus Glühlampe und Kaltleiter in Luft durch Addition der Spannung der Glühlampe mit der Spannung des Ableiters in Luft bei einem gemeinsamen Strom. Diese Kennlinie ist im folgenden Bild bezeichnet.

Es wird auch die gemeinsame Kennlinie aus Glühlampe mit wassergekühltem Ableiter benötigt. Sie wird genau so wie die vorherige gewonnen. Sie ist ebenfalls im Bild gekennzeichnet.

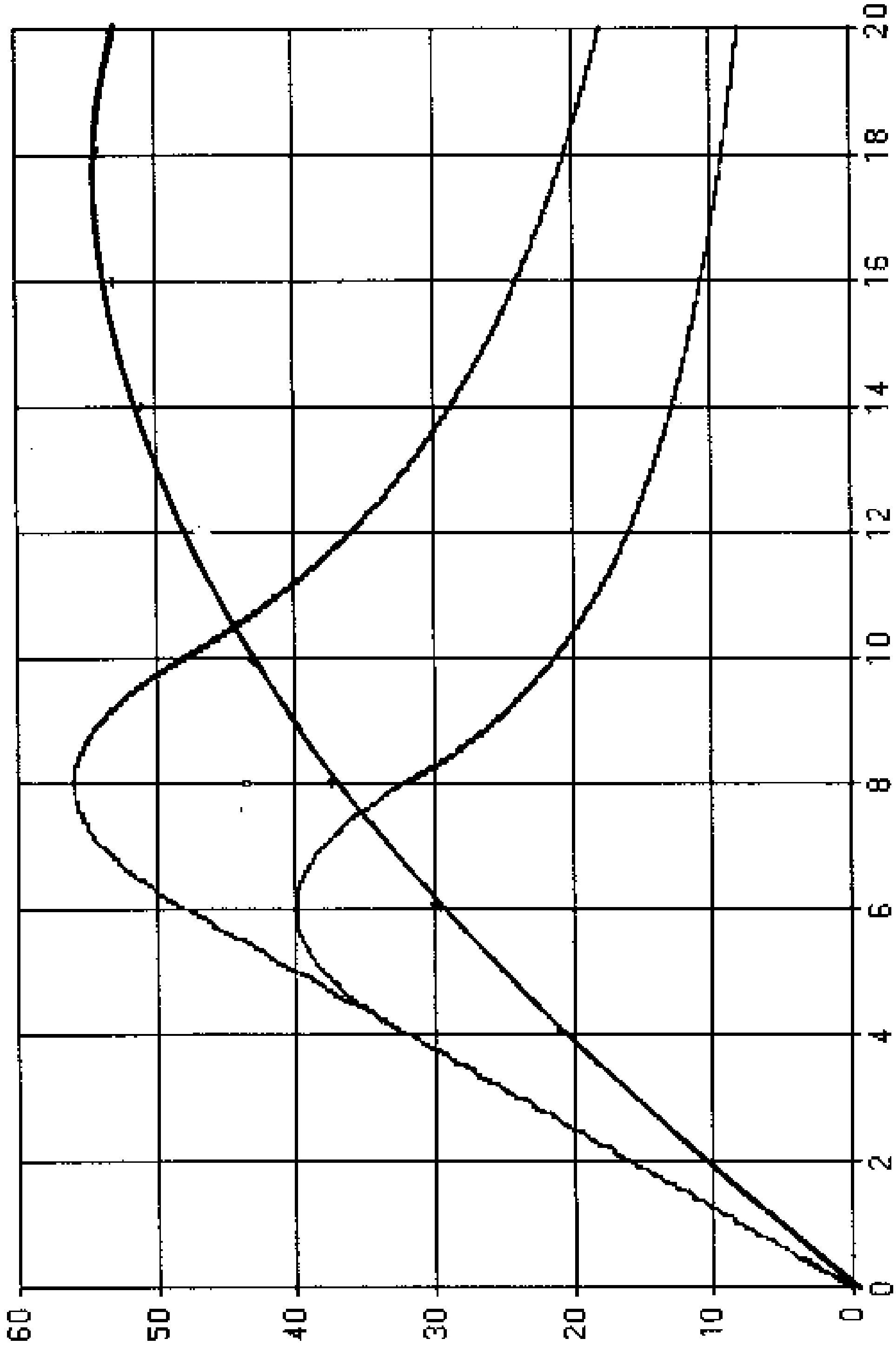


Kennlinien der beiden Kaltleiter und der Glühlampe in einer Darstellung

Ordinate: Strom in mA, Abszisse: Spannung in Volt

Da die Schaltung aus einer idealen Spannungsquelle gespeist wird, liegt die Arbeitsgrade senkrecht über der Betriebsspannung von $U_q = 18$ Volt. (Die Spannungsquelle kann als ideale Quelle jeden beliebigen Strom liefern.) Der Schnittpunkt der Arbeitsgraden mit den beiden Kennlinien liefert die beiden Arbeitspunkte:

- A1 ist der Arbeitspunkt des luftgekühlten Ableiters. Spannung im Arbeitspunkt ist 18 Volt, Strom ist 49 mA, Glühlampe leuchtet.
- A2 ist der Arbeitspunkt des wassergekühlten Ableiters. Spannung am Arbeitspunkt ist 18 Volt, Strom ist 11 mA, Glühlampe leuchtet nicht.



Kennlinien von Glühlampe und der beiden Kaltleiter

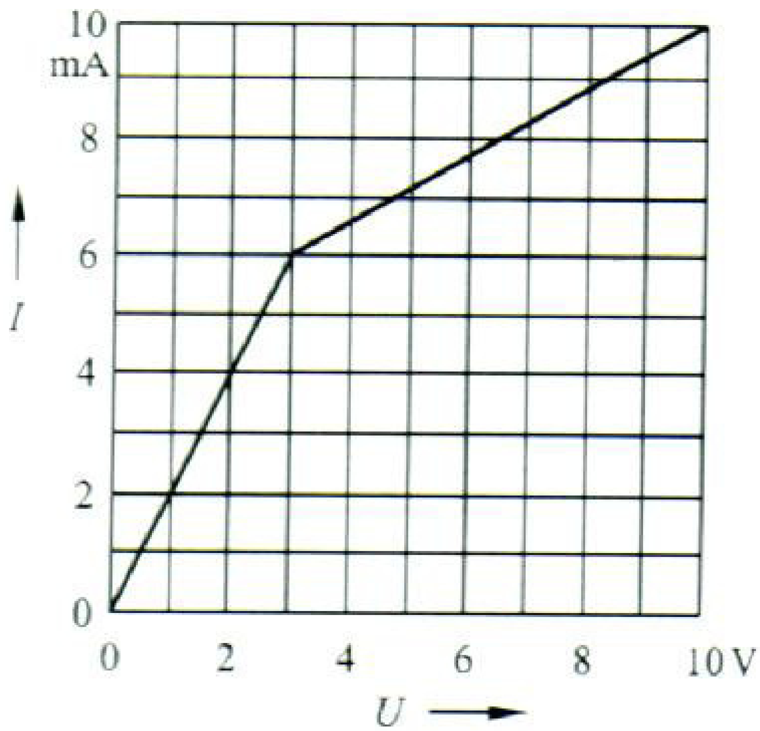
Ordinate: Strom in mA, Abszisse: Spannung in Volt

Kennlinien zur eigenen Konstruktion der Lösung

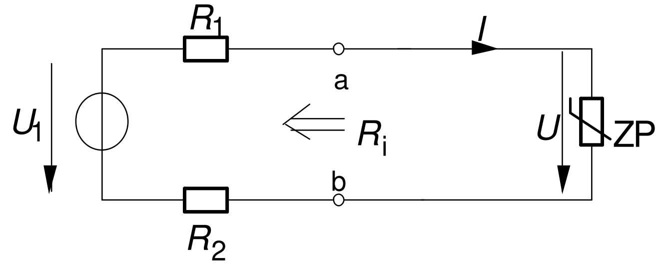
5.8.2 Arbeitspunkt im Kennlinienfeld

3. Aufgabe

Vorlage zur Erarbeitung der eigenen Lösung



Schaltung in anderer Darstellung:



a) Spannung am Zweipol ist

$$U = U_1 - (R_1 + R_2)I \;= - R_i\, I$$

$$U = 6\text{ V} - (500 + 500)\ \Omega \cdot I$$

Dies ist eine Geradengleichung, die Arbeitsgerade. Sie wird durch zwei Punkte im *I/U*-Diagramm des Zweipols festgelegt

Erster Punkt für $I = 0$ liefert $U = 6\text{V}$

Zweiter Punkt für $U = 0$ liefert $I = 6\text{ V}/1000\ \Omega = 6\text{ mA}$.

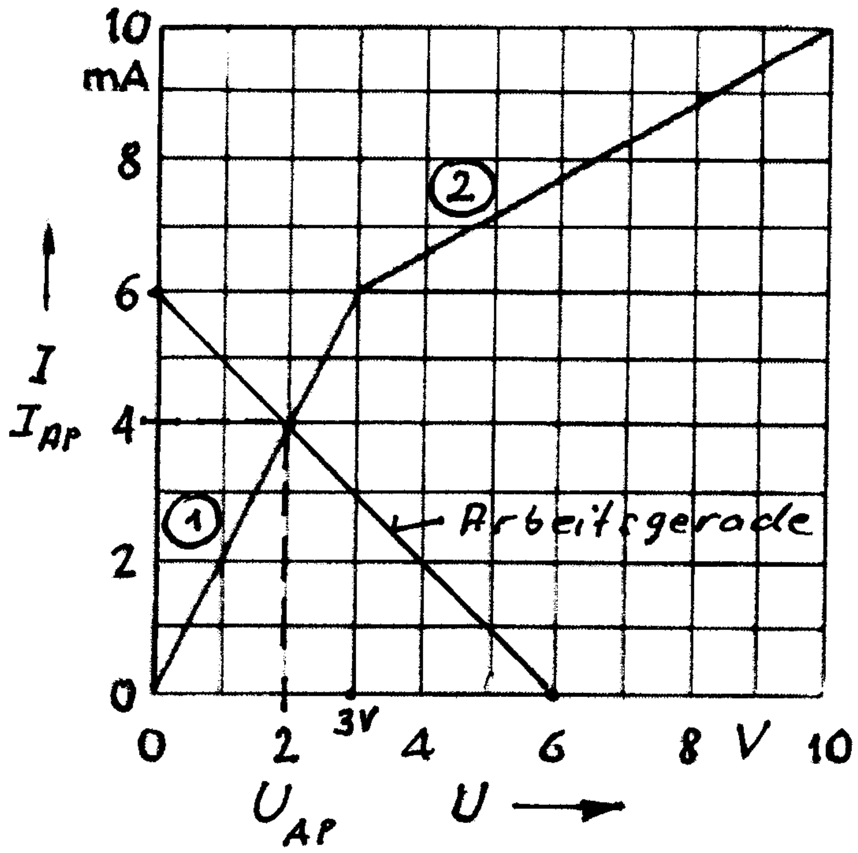
Schnittpunkt der Geraden mit der Kennlinie des Zweipols ZP liefert den

Arbeitspunkt $U_{AP}= 2\text{ V}$ und $I_{AP} = 4\text{ mA}$.

Im Stromkreis fließt ein Strom von 4 mA, der am Widerstand R_2 die

Spannung $U_2 = R_2 I = 500\ \Omega \cdot 4\text{ mA} = 2\text{ V}$ hervorruft.

Kennlinie mit Arbeitsgerade



b) Gleichung der Kennlinie und die Ersatzschaltbilder

Die Kennline ist stückweise linear, sie verläuft für Spannungen von 0 bis 3 Volt steiler als für Spannungen von mehr als 3 Volt.

1. Teil der Kennlinie für Spannungen von 0 Volt bis 3 Volt:

$$I_1 = U/(\Delta U_{\max 1}/\Delta I_{\max 1}) = U/(3\text{ V}/ 6\text{ mA}) = U/500\ \Omega$$

2. Teil der Kennlinie für Spannungen von mehr als 3 Volt:

Bei 3 Volt fließt schon ein Strom von I_0 = 6 mA. Der Strom erhöht sich, wenn die Spannung größer wird. Die Steilheit der Stromkennlinie ist durch

$$(\Delta U_{\max 2}/\Delta I_{\max 2}) = (10\text{ V} - 3\text{ V})/(10\text{ mA} - 6\text{ mA})$$

oder $$7\text{ V} / 4\text{ mA} = 1{,}75\text{ k}\Omega$$

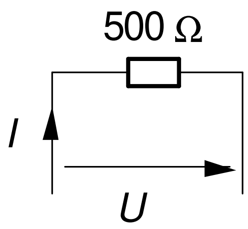
gegeben. Daher gilt für den zweiten Teil der Kennlinie die Gleichung:

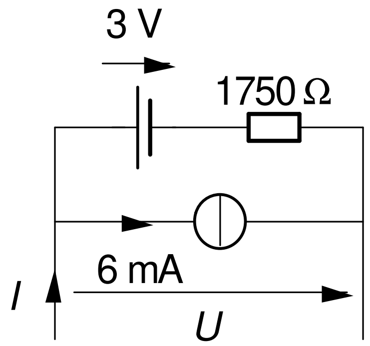
$$I_2 = I_0 + (U - 3\text{ V}) / (\Delta U_{\max 2}/\Delta I_{\max 2}) = 6\text{ mA} + (U - 3\text{ V})/1{,}75\text{ k}\Omega.$$

Die Ersatzschaltbilder

links: Ersatzschaltbild für den ersten Teil der Kennlinie von 0 bis 3 Volt

rechts: Ersatzschaltbild für den zweiten Teil der Kennlinie von mehr als 3 Volt





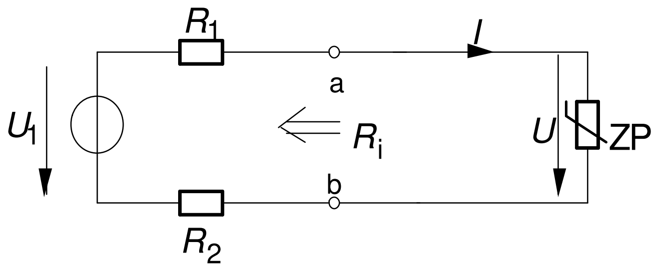
c) Spannung U_2 als Funktion von U_1

Die Spannung U_2 stellt das Produkt aus Strom am Widerstand R_2 dar:

$$U_2 = R_2 \cdot I,$$

sie ist also proportional den soeben hergeleiteten Strömen.

Aus dem Schaltbild



erkannt man den Zusammenhang

$$U_1 = \ R_1 \cdot I + U(\mathrm{f}(I)) + R_2 \cdot I = \ R_1 \cdot I + U(\mathrm{f}(I)) + U_2$$

I) $I = 0$: In der Schaltung fließt kein Strom, daher ist sowohl U_1 als auch U_2 null.

II) Im Knickpunkt der Kennlinie fließt der Strom $I = 6$ mA. Am nichtlinearen Bauelement tritt die Spannung U= 3 V auf.. Die Spannungen am Widerstand R_1 stimmt mit der am Widerstand R_2 überein, da beide Widerstände den gleichen Wert von 500 Ohm aufweisen. Die Spannung U_2 am Widerstand R_2 bestimmt sich zu

$$U_2 = R_2 \cdot I = 500\ \Omega \cdot 6\ \text{mA} = \ 3\ \text{V}.$$

Die Spannung am nichtlinearen Bauelement weist für $I = 6$ mA den Wert von $U = 3$ V auf.

Die Spannung am Widerstand R_1 beträgt ebenfalls 3 Volt (da sie gleich U_2 ist). Daher ist die Eingangsspannung

$$U_1 = R_1 \cdot I + U + U_{R2} = 9\ \text{V}.$$

III) I = 8 mA. Die Spannung

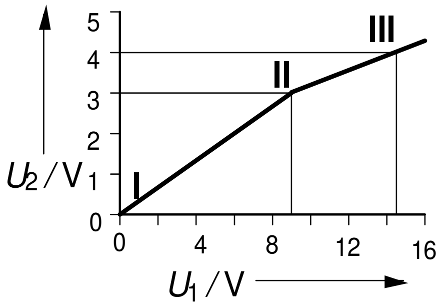
$$U_2 = 500\ \Omega \cdot 8\ \text{mA} = 4\ \text{V}.$$

Dies ist auch die Spannung am Widerstand R1.

Die Spannung am nichtlinearen Bauelement weist für $I = 8$ mA den Wert von $U = 6{,}5$ V auf.

Dann ist die Eingangsspannung

$U_1 = 2 \cdot 4\text{ V} + 6{,}5\text{ V} = 14{,}5\text{ V}.$



5.8.3 Temperaturabhängige Bauelemente

4. Aufgabe

a) Definition des Temperaturkoeffizienten einer temperaturabhängigen Funktion $f(\vartheta)$:

$$TK = \frac{1}{f(\delta)} \cdot \frac{\mathrm{d}f(\delta)}{\mathrm{d}\delta}\bigg|_{\delta_0}$$

b) Die Entwicklung des Temperaturkoeffizienten aus der Taylor-Reihe:

Die Taylor-Reihe einer Funktion mit der unabhängigen Variablen x lautet:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \ldots$$

Werden alle Glieder der Reihe ab der zweiten Ableitung vernachlässigt, folgt

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

Da die Temperaturabhängigkeit gesucht ist, ist die Temperatur die unabhängige Variable und nicht x. Daher sind in der Formel alle x durch ϑ zu ersetzen:

$$f(\vartheta+\Delta\vartheta) = f(\vartheta) + \frac{\Delta\vartheta}{1!} \cdot \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{\Delta\vartheta^2}{2!} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2} + \ldots$$

Werden alle Glieder der Reihe ab der zweiten Ableitung vernachlässigt, folgt

$$f(\vartheta+\Delta\vartheta) \approx f(\vartheta) + \Delta\vartheta \cdot \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\Delta f = f(\vartheta+\Delta\vartheta) - f(\vartheta) \approx \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot \Delta\vartheta$$

Durch Erweitern mit dem Funktionswert an f_0, dem Bezugswert, an der Stelle x_0, der Bezugsgröße, folgt

$$TK = \frac{1}{f_0} \cdot \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\bigg|_0\,.$$

Er stellt also die auf den Funktionswert $f_0 = f(\vartheta_0)$ bezogene Tangente der Funktion $f(\vartheta)$ bei der Bezugstemperatur ϑ_0 dar.

Mit Hilfe des Temperaturkoeffizienten kann die neue Funktion in der Umgebung der Bezugstemperatur bestimmt werden:

Die neue Temperatur sei $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$.

Der neue Funktionswert ist dann $f(\vartheta) = f(\vartheta_0) + \Delta f$.

Die Abweichung Δf des Funktionswertes vom Bezugswert $f(\vartheta_0)$ bestimmt sich zu

$$\Delta f = \frac{1}{f(\vartheta_0)} \left.\frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\right|_0 \cdot f(\vartheta_0) \cdot \Delta\vartheta = TK \cdot f(\vartheta_0) \cdot \Delta\vartheta$$

Für den Funktionswert bei der Temperatur $\vartheta_1 = \vartheta_0 + \Delta\vartheta = \ \vartheta_1 - \vartheta_0$ gilt dann

$$f(\vartheta_1) = f(\vartheta + \Delta\vartheta) = f(\vartheta_0) + f(\vartheta_0) \cdot TK \cdot \Delta\vartheta = f(\vartheta_0) \cdot (1 + TK \cdot \Delta\vartheta) = f(\vartheta_0) \cdot \left(1 + TK \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_0)\right)$$

oder kürzer:

$$f(\vartheta_1) = f(\vartheta_0) \cdot (1 + TK \cdot \Delta\vartheta)$$

c) Bei Widerständen wird der Temperaturkoeffizient als α bezeichnet. Dann gilt für den Widerstand bei der Temperatur ϑ_1 :

$$R(\vartheta_1) = R(\vartheta_0) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta) = R(\vartheta_0) \cdot \left(1 + \alpha \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_0)\right)$$

(Es ist darauf zu achten, daß der Temperaturkoeffizient ebenfalls temperaturabhängig ist. Sein Wert muß also für die Bezugstemperatur ϑ_0 vorliegen.)

$R(\vartheta_0) = R_0$ ist der Bezugswiderstand bei der Bezugstemperatur ϑ_0. In der Messtechnik, insb. bei den Pt-100 Widerständen zur Temperaturmessung ist die Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0$ °C, sonst beträgt sie meist 20 °C. Mit der Schreibweise R_0 gilt ebenso

$$R_0 = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

d) Da mit Hilfe des Temperaturkoeffizienten nur lineare Abweichungen berechnet werden, ist die Bestimmung der Widerstände für Temperaturen, die weit ab von der Bezugstemperatur liegen zu ungenau. Es wurde daher ein zweiter Koeffizient β eingeführt, der die quadratische Abhängigkeit von der Temperatur berücksichtigt. Dann gilt

$$R_0 = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta + \beta \cdot \Delta\vartheta^2)$$

e) Gegeben sind die Koeffizienten für Platin:

$$\alpha = 3{,}91 \cdot 10^{-3} / \mathrm{K} \text{ und } \beta = -0{,}58 \cdot 10^{-6} / \mathrm{K}^2.$$

Der genormte Platinwiderstand hat bei der Bezugstemperatur 0 °C den Wert von $R_0 = 100\ \Omega \pm 0{,}3\ \Omega$. Wie groß ist dann der Widerstand bei 20 °C, 50 °C, 100 °C, 200 °C, 300 °C, 500 °C, 750 °C und 1000 °C? Die Abhängigkeit des Widerstandes ist zu zeichnen.

Da bei PT-100 Widerständen die Bezugstemperatur 0 °C und $\Delta\vartheta = \vartheta$

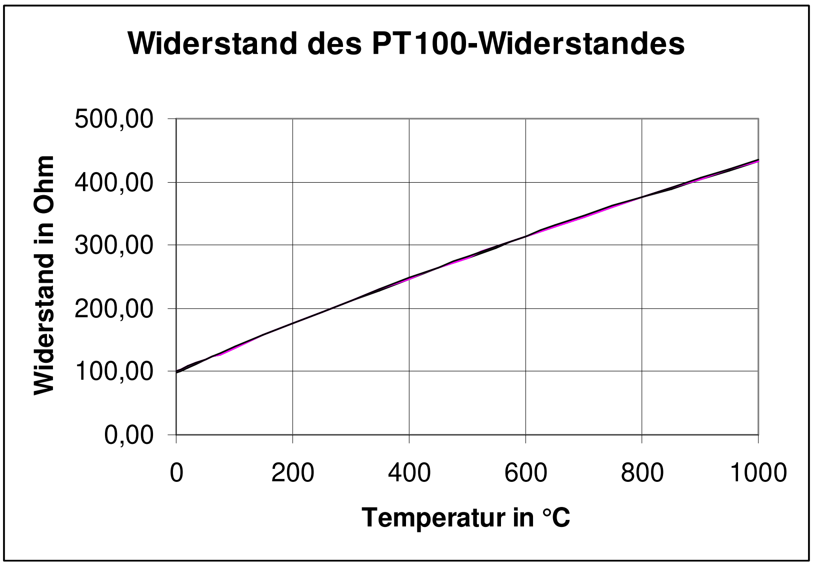
R_{min}: $R_0 = 99{,}7\ \Omega$: $\quad R_0 = 99{,}7\ \Omega\ (1 + 0{,}00391 \cdot \vartheta - 0{,}00000058 \cdot \vartheta^2)$

R: $\quad R_0 = 99{,}7\ \Omega$: $\quad R_0 = 100\ \Omega\ (1 + 0{,}00391 \cdot \vartheta - 0{,}00000058 \cdot \vartheta^2)$

R_{max}: $R_0 = 100{,}3\ \Omega$: $\quad R_0 = 100{,}3\ \Omega\ (1 + 0{,}00391 \cdot \vartheta\ - 0{,}00000058 \cdot \vartheta^2)$

Die folgende Tabelle und die graphische Darstellung wurde mit Excel erstellt.

Temp. in °C	R_{min} in Ω	R in Ω	R_{max} in Ω
0	99,70	100,00	100,30
20	107,47	107,80	108,12
50	119,05	119,41	119,76
100	138,10	138,52	138,94
150	156,87	157,35	157,82
200	175,35	175,88	176,41
250	193,54	194,13	194,71
300	211,44	212,08	212,72
350	229,06	229,75	230,43
400	246,38	247,12	247,86
450	263,41	264,21	265,00
500	280,16	281,00	281,84
550	296,61	297,51	298,40
600	312,78	313,72	314,66
650	328,66	329,65	330,63
700	344,24	345,28	346,32
750	359,54	360,63	361,71
800	374,55	375,68	376,81
850	389,27	390,45	391,62
900	403,71	404,92	406,13
950	417,85	419,11	420,36
1000	431,70	433,00	434,30



f) Bestimmung des Temperaturkoeffizienten einer Reihenschaltung und einer Parallelschaltung zweier Widerstände.

Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung ist durch $R_S = R_1 + R_2$ gegeben. Der Temperaturkoeffizient des Ersatzwiderstandes R_S ist gesucht.

Die Gleichung für den TK lautet:

$$TK = \frac{1}{f_0} \cdot \left. \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \right|_0$$

f_0 ist die Funktion, für die der TK gesucht ist.

Reihenschaltung

Bei der Reihenschaltung bestimmt sich die Funktion f_0 zu:

$$f_0 = R_S = R_1 + R_2$$

Die Funktion f ist nach der Temperatur abzuleiten. Da die Funktion von zwei Variablen abhängt, gilt

$$\frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot f(\vartheta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot \left(R_1(\vartheta) + R_2(\vartheta)\right) = \frac{\mathrm{d}R_1(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{\mathrm{d}R_2(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}$$

Mit den Zusammenhängen

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1(\vartheta)} \cdot \frac{\mathrm{d}R_1(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \qquad \text{und} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{R_2(\vartheta)} \cdot \frac{\mathrm{d}R_2(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}$$

$$\frac{\mathrm{d}R_1(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_1 \cdot R_1(\vartheta) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}R_2(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_2 \cdot R_2(\vartheta)$$

Einsetzen liefert

$$\frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_1 \cdot R_1(\vartheta) + \alpha_2 \cdot R_2(\vartheta)$$

Einsetzen in die Definitionsgleichung des TK

$$TK = \frac{1}{f_0} \cdot \left. \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \right|_0$$

liefert
$$TK = \frac{1}{f_0} \cdot \left. \frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \right|_0 = \frac{1}{R_1(\vartheta) + R_2(\vartheta)} \left(\alpha_1 \cdot R_1(\vartheta) + \alpha_2 \cdot R_2(\vartheta)\right)$$

und weiter
$$TK = \alpha_1 \frac{R_1(\vartheta)}{R_1(\vartheta) + R_2(\vartheta)} + \alpha_2 \frac{R_2(\vartheta)}{R_1(\vartheta) + R_2(\vartheta)}$$

oder in Kurzschreibweise
$$TK = \alpha_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \alpha_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Parallelschaltung

Bestimmung der Funktion f_0:

$$f_0 = R_P = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Ableiten der Funktion nach der Temperatur

Die Funktion hängt sowohl an R_1 als auch von R_2 ab. Daher muß in diesem Fall folgendermaßen vorgegangen werden (partielle Differentiation):

$$\frac{\mathrm{d}R_P}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\partial R_P}{\partial R_1}\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}\vartheta} + \frac{\partial R_P}{\partial R_2}\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}\vartheta}$$

Die Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{d}R_1(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_1 \cdot R_1(\vartheta) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}R_2(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_2 \cdot R_2(\vartheta)$$

sind bekannt. Es müssen also nur die Ableitungen $\frac{\partial R_P}{\partial R_1}$ und $\frac{\partial R_P}{\partial R_2}$ gebildet werden:

$$\frac{\partial R_P}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

und $$\frac{\partial R_P}{\partial R_2} = \frac{\partial}{\partial R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Dann ist $$\frac{\mathrm{d}R_P}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha_1 \cdot \frac{R_2^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_2)^2} + \alpha_2 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Einsetzen in die Gleichung des TK liefert:

$$TK = \frac{1}{R_P} \cdot \frac{\mathrm{d}R_P}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{1}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}R_P}{\mathrm{d}\vartheta}$$

$$TK = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}R_P}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \frac{R_2^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_2)^2} + \alpha_2 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right)$$

$$TK = \alpha_1 \cdot \frac{R_2^2 \cdot R_1}{(R_1 + R_2)^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot + \alpha_2 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

$$TK = \alpha_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \alpha_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

g) Der Temperaturkoeffizient des Leitwertes

Der Leitwert G ist der Kehrwert des Widerstandes: $G = 1/R$. Dann ist die Funktion $f = 1/R$ und die Gleichung zur Bestimmung des TK für den Leitwert lautet

$$TK = \frac{1}{f_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\right|_0 = \frac{1}{1/R} \cdot \frac{\mathrm{d}\,1/R}{\mathrm{d}\vartheta} = R \cdot \frac{\mathrm{d}\left(R^{-1}\right)}{\mathrm{d}\vartheta} = R \cdot \frac{-1}{R^2} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\vartheta}$$

Mit $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\vartheta} = \alpha \cdot R$

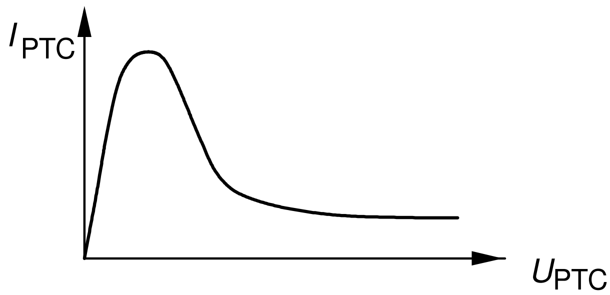
folgt weiter $TK = \frac{-1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{-1}{R} \cdot \alpha \cdot R = -\alpha$.

Der Temperaturkoeffizient des Leitwertes ist der negative Temperaturkoeffizient des Widerstandes. (Ist auch einfach zu erklären: Wenn der Widerstand mit der Temperatur zunimmt, muß der Leitwert mit der Temperatur abnehmen.)

NTC- und PTC-Widerstand

5. Aufgabe

Es gibt besonders gezüchtete Widerstände, deren Werte mit der Temperatur stark fallen. Sie haben einen großen negativen Temperaturkoeffizienten und werden daher als NTC-Widerstände (negativ temperatur coeffizient) bezeichnet. Da sie im warmen Zustand besser als im kalten Zustand leiten, werden sie auch als Warmleiter bezeichnet. Ein Einsatzgebiet dieser Widerstände ist die Unterdrückung von Einschaltstromstößen:



Wird z.B. ein Transformator eingeschaltet, dann tritt der Rush-Strom auf. Das ist ein starker Einschaltstoßstrom, der eine Sicherung zum Ansprechen bringen kann. Ist im Leitungszug ein NTC-Widerstand vorhanden, bedämpft er den Stoßstrom. Durch den Strom entstehen in ihm Stromwärmeverluste (I^2R), aufgrund der er sich erwärmt. Dadurch nimmt sein Widerstand ab und der Strom wird stärker. Im warmen Zustand kann dann der gewünschte Strom fließen.

Die I-U-Kennlinie des PTC steigt daher bei geringen Spannungen linear an, da in diesem Bereich der Strom und damit die Stromwärmeverluste noch gering sind. Erst bei Erreichen einer bestimmten Spannung wird der Strom und damit die Stromwärmeverluste so groß, dass der Widerstand des PTC zunimmt und der Strom geringer wird.

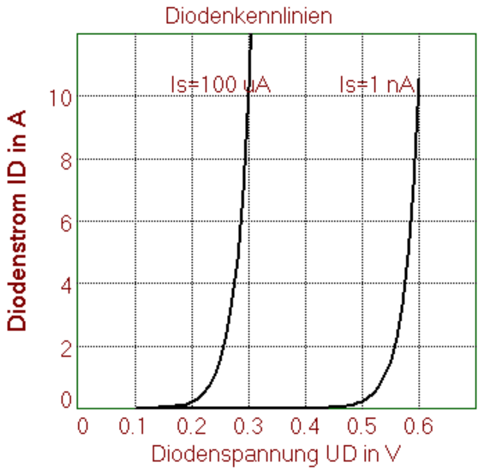
Das Gegenstück zum NTC-Widerstand ist der PTC-Widerstand, dessen Widerstand bei Erwärmung ansteigt. Er stellt daher einen Kaltleiter dar. Mit PTC-Widerständen können Schaltungen gegen das Führen eines zu großen Stroms geschützt werden. Sie können natürlich ähnlich wie die NTC-Widerstände auch zur Temperaturüberwachung eingesetzt werden.

5.8.4 Diodenkennlinien

6. Aufgabe - Graphiken mit EULR erstellt

a) Darstellung der Diodenkennlinien $I_D = f(U_D)$

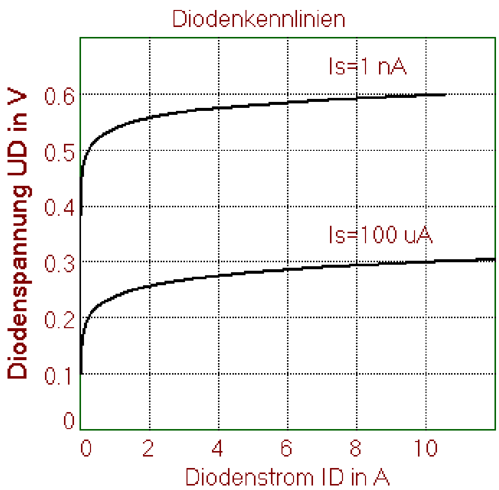
$$I_D = I_S(e^{U_D / 26\mathrm{mV}} - 1)$$



Der EULER-Code dazu:

```
>reset; clg
>ud=0.1:.01:.6;
>setplot(0,0.7,0,12);
>is=1e-9;
>id=is*(exp(ud/0.026)-1);
>linewidth(2);
>xplot(ud,id);
>is=100e-6;
>id=is*(exp(ud/0.026)-1);
>hold on;
>linewidth(2);
>plot(ud,id);
>hold off;
>xleft;
>ydown;
>title("Diodenkennlinien");
>xlabel("Diodenspannung UD in V");
>ylabel("Diodenstrom ID in A");
>text("Is=1 nA",650,150);
>text("Is=100 uA",350,150);
```

Darstellung $U_D = f(I_D)$



Um die Diodenspannung als Funktion des Diodenstroms darzustellen, müssen nur die Anweisungen an die Plotfunktion umgestellt werden.

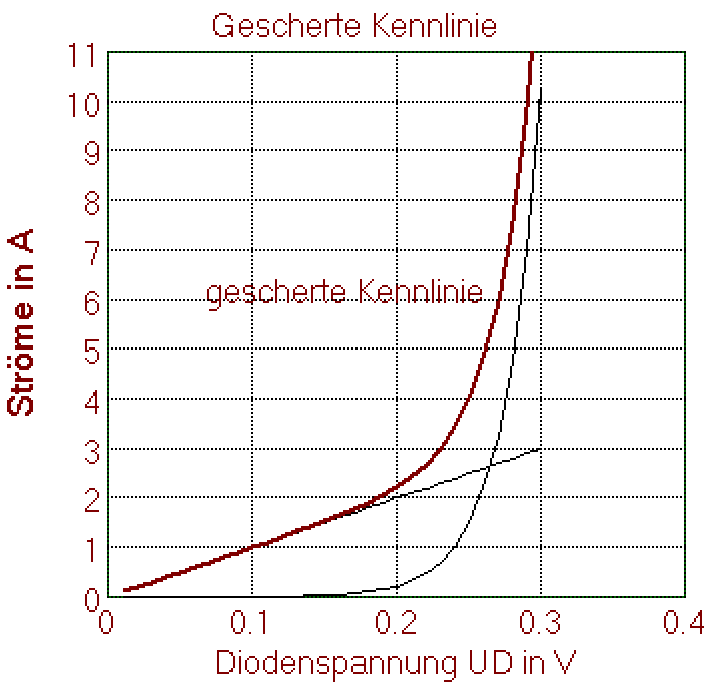
Der Euler-Code

```
>reset; clg
>ud=0.1:.01:.7;
>setplot(0,2000,0,0.7);
>is=1e-9;
>id=is*(exp(ud/0.02)-1);
>linewidth(2);
>xplot(id,ud);
>is=100e-6;
>id=is*(exp(ud/0.02)-1);
>hold on;
>linewidth(2);
>xplot(id,ud);
>hold off;
>xleft;
>ydown;
>title("Diodenkennlinien");
>ylabel("Diodenspannung UD in V");
>xlabel("Diodenstrom ID in mA");
>text("Is=1 nA",650,150);
>text("Is=100 uA",650,450);
```

b) Parallelschaltung: Widerstand 0,1 Ω parallel zur Diode mit I_S = 100 μA.

Zur Diode mit I_0 = 100 μA wird der Widerstand von 0.1 Ω parallel geschaltet. Bei der Parallelschaltung ist die Spannung konstant Die neue Kennlinie erhält man, indem zuerst die Kennlinie $I_R = f(U_D)$ gezeichnet wird. Anschließend werden beide Kennlinie addiert:

$$\text{Iges} = I_R + I_D = f(U_D)$$



EULER-Code

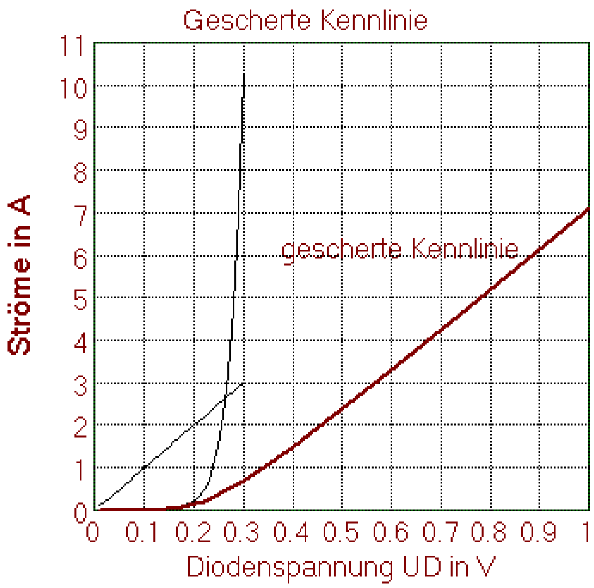
```
>is=100e-6;
>id=is*(exp(ud/0.026)-1);
>plot(ud,id);
>xgrid(0:0.1:.4,1);
>ygrid(0:1:11,1);
>title("Gescherte Kennlinie");
>xlabel("Diodenspannung UD in V");
>ylabel("Ströme in A");
>hold on;
>ir=ud/0.1;
>plot(ud,ir);
>ig=id+ir;
>color(2);linewidth(2);
>plot(ud,ig);
>color(1);
>hold off;
>text("gescherte Kennlinie",300,400);
```

c) Reihenschaltung: Widerstand 0,1 Ω in Reihe mit Diode

Zur Diode mit I_0 = 100 µA wird der Widerstand von 0.1 Ωin Reihe geschaltet. Bei der Reihenschaltung ist der Strom konstant Die neue Kennlinie erhält man, indem zuerst die Kennlinie $I_R = f(U_D)$ bestimmt wird und anschließend der Gesamtstrom bestimmt wird:

$$\text{Iges} = I_R + I_D = f(U_D)$$

Die Kennlinie ist dann $I_{ges} = f(U_D)$.

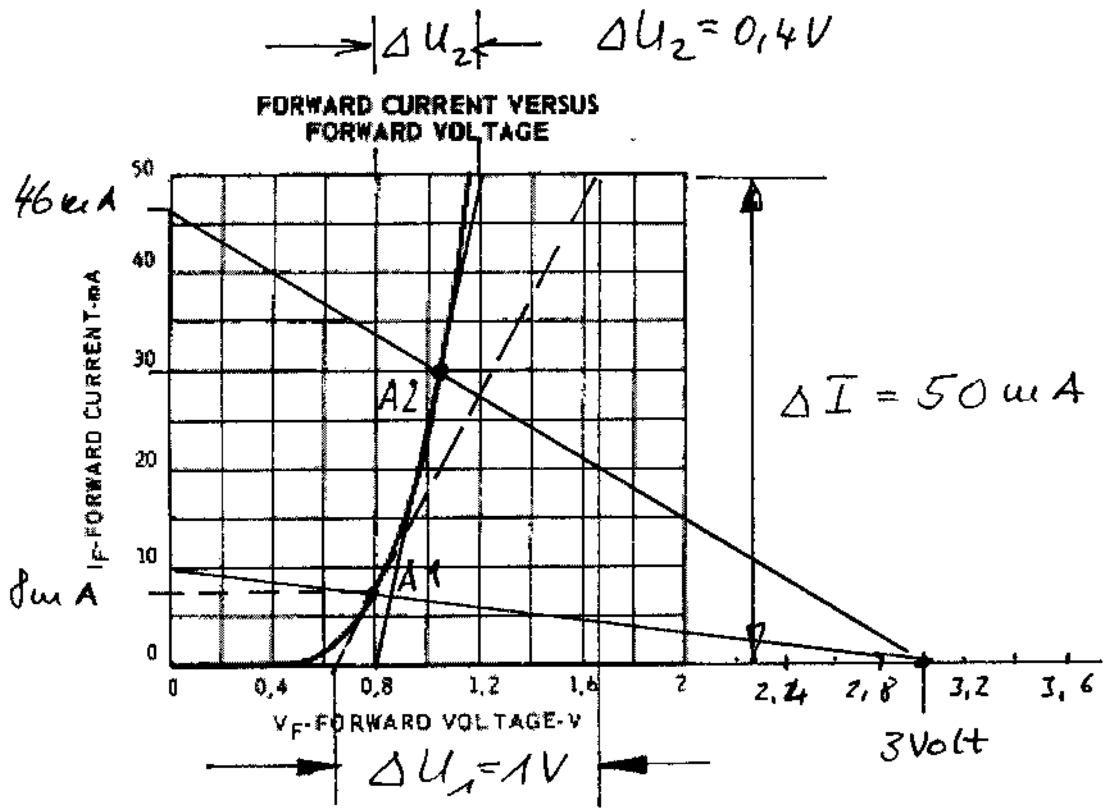


EULER-Code

```
>reset; clg; linewidth(1);
>ud=0.01:.01:.3;
>setplot(0,1,0,11);
>is=100e-6;
>id=is*(exp(ud/0.026)-1);
>plot(ud,id);
>xgrid(0:0.1:1,1);
```

```
>ygrid(0:1:11,1);
>title("Gescherte Kennlinie");
>xlabel("Diodenspannung UD in V");
>ylabel("Ströme in A");
>hold on;
>ir=ud/0.1;ur=0.1*ir;
>plot(ud,ir);
>u=ud+ur;
>color(2);linewidth(2);
>plot(ud+0.1*id,id);
>color(1);
>hold off;
>text("gescherte Kennlinie",470,400);
```

d) Linearisierung.



Der *erste Arbeitspunkt* A1 soll bei der Diodenspannung 0,8 Volt sein. Die Arbeitsgerade beginnt bei U_q = 3 Volt auf der Spannungsachse, geht durch den Punkt 0,8 Volt der Diodenkennlinie und wird bis zur Stromachse verlängert. Die Gerade schneidet die Stromachse bei 10 mA. Daraus läßt sich der Arbeitswiderstand R_{AP1} bestimmen: Aus $I = U_q/R_{AP1}$ folgt

$$R_{AP1} = U_q/I = 3\text{ V}/\ 10\text{ mA} = 300\ \Omega.$$

Im Arbeitspunkt liegt die Diodenspannung U_D = 0,8 V und der Diodenstrom I_D = 7,5 mA vor.

Der dynamische Widerstand berechnet sich zu

$$R_{dyn} = \Delta U/\Delta I = 1\text{ V}/\ 50\text{ mA} = 20\ \Omega.$$

Der zweite *Arbeitspunkt* soll bei dem Diodenstrom 30 mA liegen. Die Arbeitsgerade beginnt bei U_q = 3 Volt auf der Spannungsachse, geht durch den Punkt 30 mA der Diodenkennlinie und wird bis zur Stromachse verlängert. Die Gerade schneidet die Stromachse bei 46 mA. Daraus lässt sich der Arbeitswiderstand R_{AP2} bestimmen: Aus $I = U_q/R_{AP2}$ folgt

$$R_{AP2} = U_q/I = 3\ \text{V}/\ 46\ \text{mA} = 65{,}2\ \Omega.$$

Im Arbeitspunkt A2 liegt die Diodenspannung $U_D = 1{,}08$ V und der Diodenstrom $I_D = 30$ mA vor. Das ergibt einen Gleichstromwiderstand von

Der dynamische Widerstand berechnet sich zu

$$R_{dyn} = \Delta U/\Delta I = 0{,}4\ \text{V} / 50\ \text{mA} = 8\ \Omega.$$

Im Arbeitspunkt A2 liegt eine Wechselspannung mit der Amplitude von 0,5 V an. An der Diode tritt dann die Wechselspannung mit einer Amplitude von

$$U_{D\sim} = R_{dyn}/(R_{dyn} + R_{AP2}) \cdot 0{,}5\ \text{V} = 8/(8 + 65{,}2) \cdot 0{,}5\ \text{V} = 0{,}055\ \text{V}$$

auf.

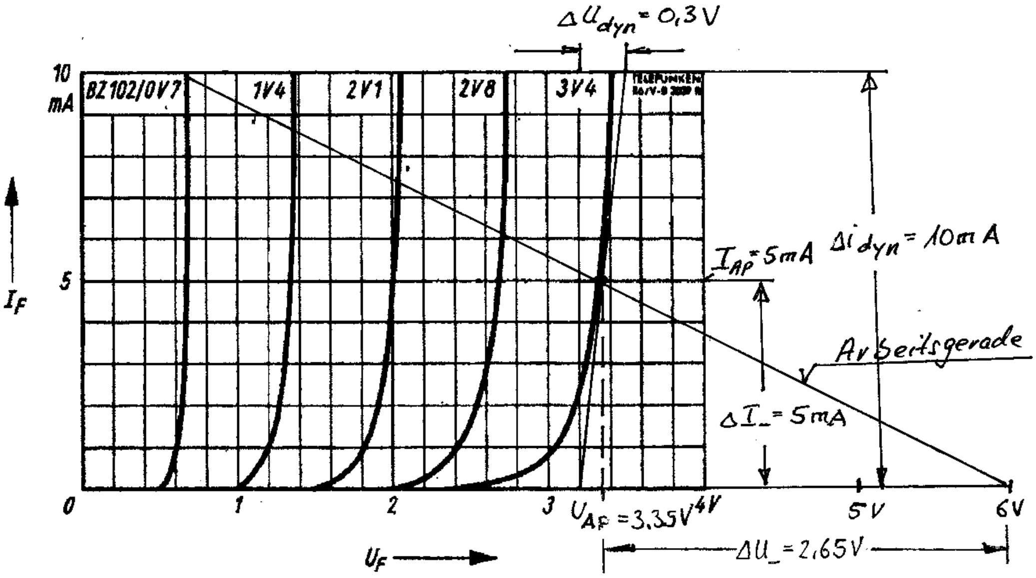
Die Spannung an der Diode ist dann

$$u_D(t) = U_D + u_{D\sim} = 1{,}08\ \text{V} + 0.056\ \text{V} \cdot \sin(\omega\, t).$$

5.8.5 Spannungsabhängige Bauelemente - Zener-Diode und Varistor

7. Aufgabe

a) Zenerdiode



Arbeitspunkt der Diode BZ 102 / 3V4 sei 5 mA. Aus dem Kennlinienfeld entnimmt man für diese Diode die Spannung 3,35 V.

Daraus bestimmt sich der Gleichstromwiderstand für den Arbeitspunkt zu

$$R_{AP} = U_{AP}/I_{AP} = 3{,}35\ \text{V} / 5\ \text{mA} = 670\ \Omega$$

Der Widerstand R_1 bestimmt sich zu

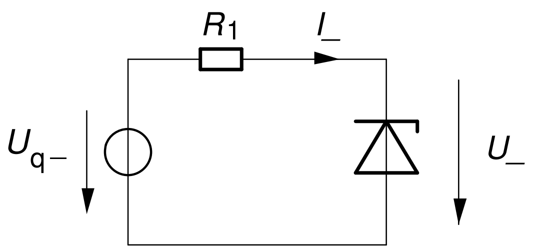
$$R_1 = (U_{q-} - U_{AP})/I_{\_} = (6\ \text{V} - 3{,}35\ \text{V}) / 5\ \text{mA} = 530\ \Omega$$

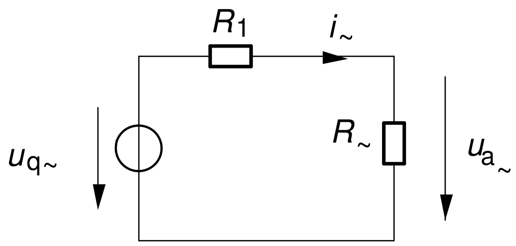
Der dynamische Widerstand bestimmt sich zu

$$R_{dyn} = \Delta u_{dyn}/\Delta i_{dyn} = 0{,}3\text{ V} / 10\text{ mA} = 30\ \Omega.$$

An der Diode tritt folgende Leistung auf

$$P = U_{AP}I_{AP} = 3{,}35\text{ V}\cdot 5\text{ mA} = 16{,}75\text{ mW}$$





Die Wechselspannung an der Diode ist:

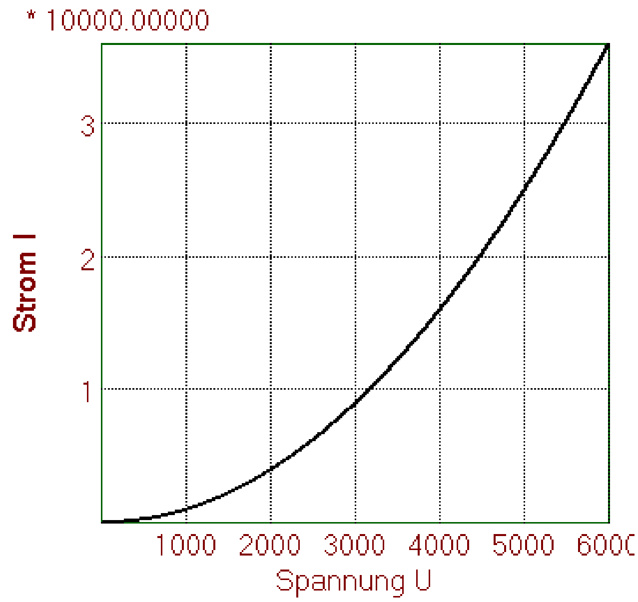
$$u_{a\sim} = \frac{R_{dyn}}{R_1 + R_{dyn}} \cdot u_{q\sim} = \frac{30}{530+30} \cdot 2\text{ V} = 0{,}107\text{ V}$$

Die Wechselspannung wurde auf 5,35 % reduziert!

b) Varistor

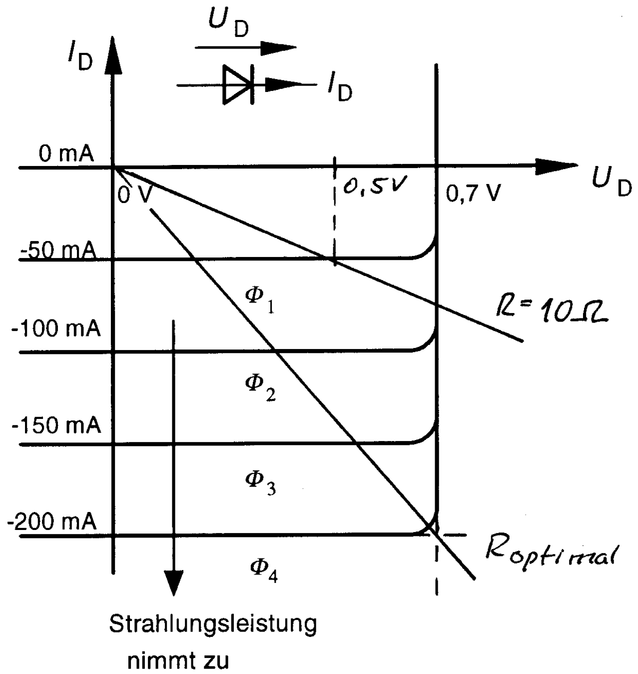
Lösung mit EULER:

```
>..Varistorkennlinie
>alpha=2;
>K=0.001;
>U=0.5:0.1:6000;
>I=K*U^alpha;
>xplot(U,I);
```

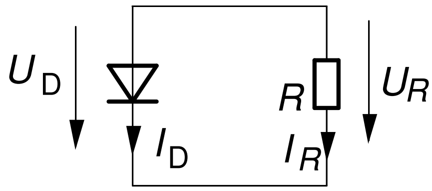


5.8.6 Photodiode und Solarzellen

8. Aufgabe



Kennlinienfeld



Ersatzschaltung

In die Zeichnung ist die Arbeitsgerade für R =10 Ω eingetragen Sie geht durch den Ursprung und durch den Punkt $U_R = U_D$= 0,5 Volt und $I_R = -I_D = -50$ mA.

Die maximale Leistung, die von der Diode geliefert werden kann, ist der Schnittpunkt des Stroms für die Strahlungsleistung Φ_4 mit der maximalen Spannung von 0,7 Volt der Diode. Dies ist dann der Fall, wenn die Diode mit dem optimalen Widerstand $R_{Optimal}$ = 0,7 V/ 200 mA = 3,5 Ω belastet ist.

5.8.7 Transistor und Operationsverstärker

9. Aufgabe

Es gilt die Gleichung $U_q = R_C I_{CE} + U_{CE}$.

Umstellen liefert die Geradengleichung

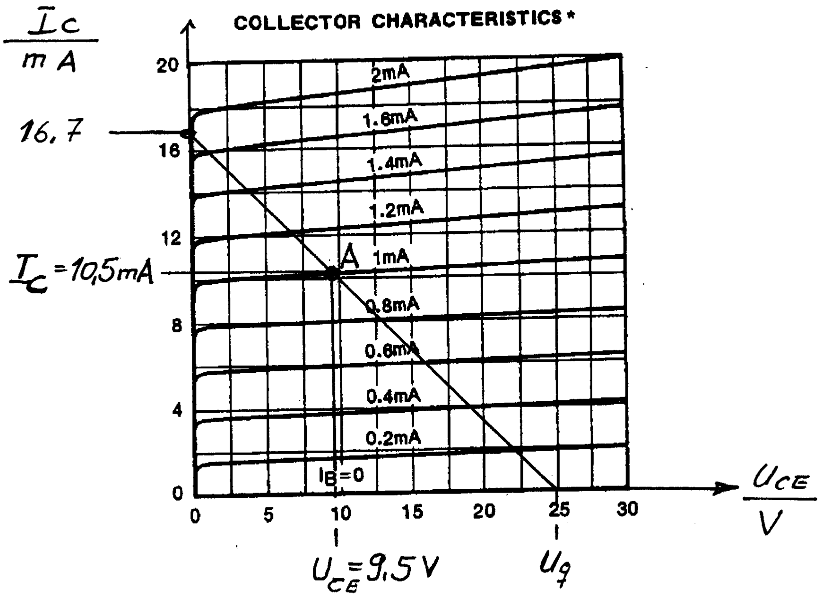
$$U_{CE} = U_q - R_C I_{CE} = 25 \text{ V} - 1{,}5 \text{ k}\Omega \cdot I_{CE}$$

Bestimmung zweier Punkte für die Geradengleichung:

U_{CE} ist U_q = 25 V für $I_{CE} = 0$ und $I_{CE} = U_q/R_C$ = 25 V / 1,5 kΩ = 16,7 mA

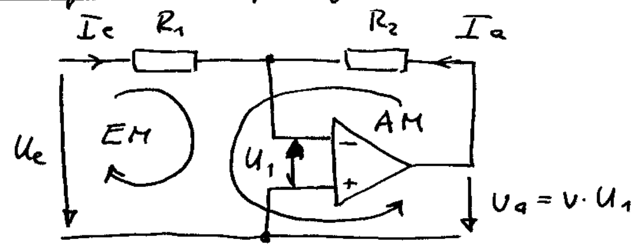
Eintragen der Arbeitsgraden in das Kennlinienfeld. Arbeitspunkt dort, wo die Arbeitsgerade die Kennlinie $I_C(U_{CE})$ für den Parameter I_B = 1 mA schneidet. Aus dem Arbeitspunkt entnimmt man

Spannung U_{CE} = 9,5 V und I_C = 10,5 mA.



10. Aufgabe

Lösung mittels geeigneter Maschen:



Eingangsmasche

$$U_e = R_1 \cdot I_e - U_1 = R_1 \cdot I_e - U_a/V$$

Ausgangsmasche:

$$U_a = R_2 \cdot I_a - U_1 = R_2 I_a - U_a/V$$

Aus Ausgangsmasche folgt:

$$U_a + \frac{U_a}{V} = U_a\left(1 + \frac{1}{V}\right) = R_2 \cdot I_a$$

$$U_a = \frac{R_2 \cdot I_a}{1 + \frac{1}{V}} = \frac{V}{1+V} \cdot R_2 \cdot I_a$$

Einsetzen in Eingangsmasche:

$$U_e = R_1 \cdot I_e - \frac{1}{V}\left(\frac{V}{1+V} \cdot R_2 \cdot I_a\right)$$

Da $I_a = - I_e$ ist, folgt weiter

$$U_e = R_1 \cdot I_e + \frac{R_2}{1+V} I_e = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+V}\right) \cdot I_e$$

Der Eingangswiderstand ist

$$R_e = \frac{U_e}{I_e} = R_1 + \frac{R_2}{1+V}$$

Aus $U_e = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+V}\right) I_e = -\left(R_1 + \frac{R_2}{1+V}\right) I_a$

folgt $I_a = \dfrac{-U_e}{R_1 + \frac{R_2}{1+V}}$

Einsetzen in $U_a = \frac{V}{1+V} R_2 \cdot I_a$ liefert

$$U_a = \frac{V \cdot R_2}{1+V} \cdot \frac{-U_e}{R_1 + \frac{R_2}{1+V}}$$

$$\underline{\underline{U_a = \frac{-R_2}{\frac{1+V}{V} \cdot R_1 + \frac{R_2}{V}} \cdot U_e}}$$

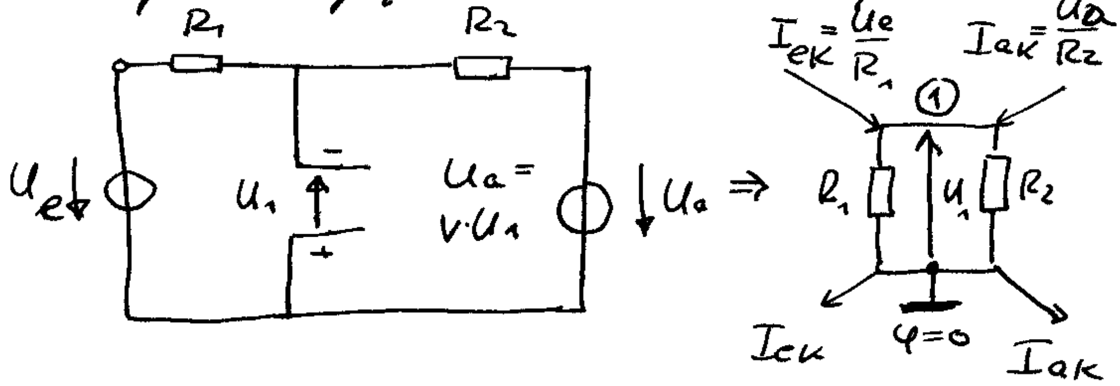
Mit $V \to \infty$ gilt $\frac{1+V}{V} \cdot R_1 = 1$ und $\frac{R_2}{V} = 0$,

dann ist $\underline{\underline{\dfrac{U_a}{U_e} = -\dfrac{R_2}{R_1}}}$

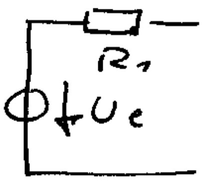
<u>Lösung nach dem Knotenpotential-verfahren</u>:

Umwandeln der Schaltung:

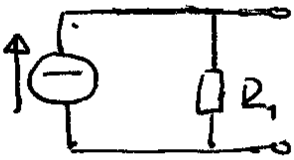
Spannungsquellen in Stromquellen



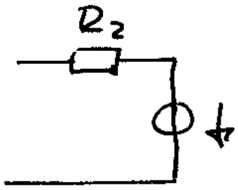
Umwandeln der Eingangsspannungs-quelle in eine Stromquelle:



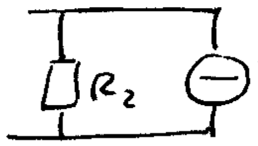
$\equiv$ $I_{eK} = \frac{U_e}{R_1}$



Umwandeln d. Ausgangsspg.quelle



$U_a = v \cdot U_1$



$I_{aK} = \frac{U_a}{R_2} = \frac{v \cdot U_1}{R_2}$

Dann gilt am Knoten 1

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(-U_1) = \frac{U_e}{R_1} + \frac{v \cdot U_1}{R_2}$$

und daraus

$$U_1 = \frac{-U_e}{R_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{v}{R_2}\right)} = \frac{-U_e}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{vR_1}{R_2}}$$

Mit $U_a = v \cdot U_1$ folgt

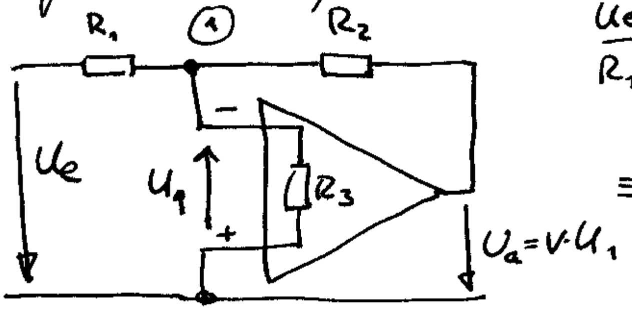
$$U_a = \frac{-v \cdot U_e}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{vR_1}{R_2}} = \frac{-v \cdot U_e}{1 + \frac{R_1(1+v)}{R_2}}$$

$$U_a = \frac{-R_2}{\frac{1+v}{v} \cdot R_1 + \frac{R_2}{v}} \cdot U_e$$

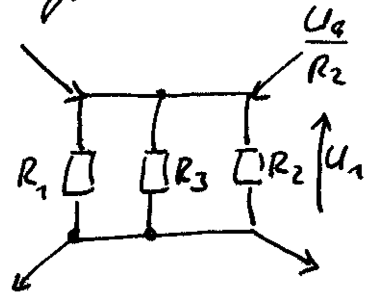
Mit $v \to \infty$ folgt $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$

Teil b

b) Ist der Eingangswiderstand des Verstärkers endlich, kann das beim Knotenpotentialverfahren einfach berücksichtigt werden:



$\Rightarrow$



Am Knoten 1 gilt:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)(-U_1)=\frac{U_e}{R_1}+\frac{U_a}{R_2}$$

mit $U_1 = U_a/V$ folgt

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\left(-\frac{U_a}{V}\right)=\frac{U_e}{R_1}+\frac{U_a}{R_2}$$

oder $$\frac{U_a}{R_2}+\frac{U_a}{V}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=-\frac{U_e}{R_1}$$

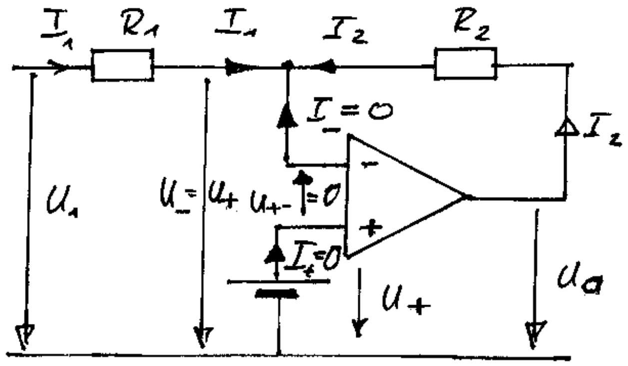
$$U_a\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{V}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\right)=-\frac{U_e}{R_1}$$

$$U_a=\frac{-1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{V}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot U_e$$

$$\underline{\underline{U_a=\frac{-1}{1+\frac{R_2}{V}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}\cdot\frac{R_2}{R_1}\cdot U_e}}$$

für $V \to \infty \Rightarrow \underline{\underline{U_a = -R_2/R_1 \cdot U_e}}$

11. Aufgabe



Idealer OP:

$U_{+-} = \frac{U_a}{V} = 0$, da $V \to \infty$

$I_- = 0$, da $R_{+-} \to \infty$

Dann ist

$U_- = -\cancel{U_{+-}}^{0} + U_+ = U_+$

Am Knoten $R_1 - R_2$ folgt:

$I_1 = -I_2$.

Ausgangsmasche: $-U_a + I_2 \cdot R_2 + U_- = 0$

$U_a = U_- - I_1 \cdot R_2 \quad (I_2 = -I_1)$

Eingangsmasche: $U_1 = I_1 \cdot R_1 + U_-$

$I_1 = \frac{U_1 - U_-}{R_1} = \frac{U_1 - U_+}{R_1}$

Einsetzen liefert:

$U_a = U_- - I_1 \cdot R_2 = U_+ - \frac{(U_1 - U_+) \cdot R_2}{R_1}$

$\underline{\underline{U_a}} = U_+ \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} U_1 = \underline{\underline{\frac{R_1 + R_2}{R_1} U_+ - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_1}}$

<u>Eingangswiderstände</u>

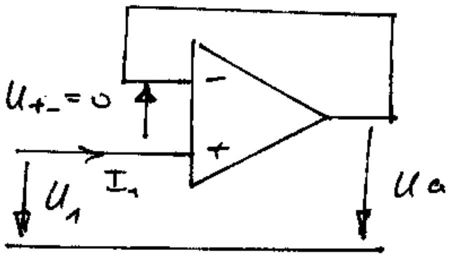
I) $\underline{\underline{R_{e1}}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_1}{\frac{U_1 - U_+}{R_1}} = \underline{\underline{\frac{U_1}{U_1 - U_+} \cdot R_1}}$

Falls $\underline{\underline{U_+ = 0 \to R_e = R_1}}$.

II) $\underline{\underline{R_{e+} = \frac{U_+}{I_+} \to \infty}}$, da $I_+ = 0$

Falls $U_1 = 0$ ist, ist

$\underline{\underline{U_a = (1 + R_2/R_1) \cdot U_+}}$

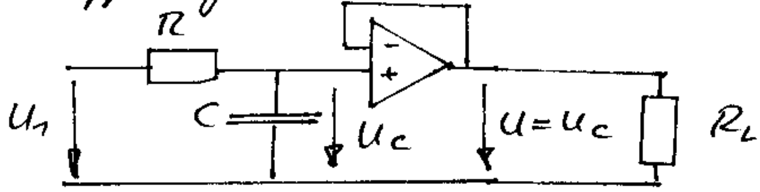


$U_a = U_1$

$R_e = U_1 / I_1 \rightarrow \infty$,

da $I_1 = 0$

Die Schaltung wird als Spannungsfolger bezeichnet, da $U_a = U_1$ ist. Sie wird auch als Impedanzwandler bezeichnet, da sie am Ausgang einen Innenwiderstand aufweist, der gegen null geht. Ihr Eingangswiderstand ist dagegen sehr hoch! Impedanzwandler werden zur Entkopplung zweier Netzwerkteile eingesetzt, z.B.



Der Lastwiderstand R_L hat keinen Einfluß auf die Spannung U_C am Kondensator.

Lösungen

In den Lösungen wird in der Formelschreibweise nicht streng zwischen dem Potential φ_i eines Knotens und der Spannung U_i eines Knotens unterschieden. Das hat folgenden Grund: Die Spannung zwischen zwei Knoten wird durch die Knotenpotentialdifferenz ausgedrückt, z. B. Spannung zwischen Knoten 3 und Knoten 5:

$$U_{35} = \varphi_3 - \varphi_5.$$

Beim Knotenpotentialverfahren wird ein Konten als Bezugsknoten ausgewählt, dem das Potential 0 zugeordnet wird. Ist dies z.B. der Knoten 5, hat er das Potential $\varphi_5 = 0$. Dann kann die Spannung zwischen Knoten 3 und dem Knoten 5, dem Bezugsknoten, als Potential des Knotens 3 angegeben werden:

$$U_{35} = \varphi_3 - \varphi_5 = \varphi_3,$$

oder vereinfacht: $U_3 = \varphi_3$.

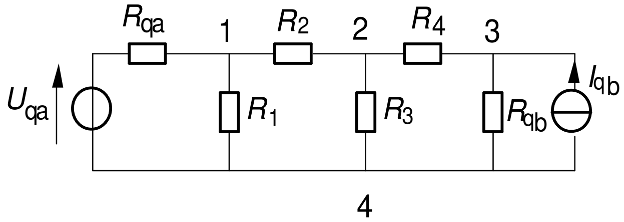
Da jetzt die Spannung U_{35} nur noch dem Potential φ_3 des Knotens 3 entspricht, wird sie formelmäßig auch nur noch mit U_3 bezeichnet.

Dies wird allgemein in der Elektrotechnik so gehandhabt: Gibt es ein allgemein bekanntes Bezugspotential (z.B. wird in den Niederspannungsnetzen die Erde als Bezugsknoten gewählt, also $\varphi_E = 0$ gesetzt), ist die Angabe einer Spannung an irgendeiner Stelle immer als Spannung dieser Stelle zum Bezugsort, also zur Erde, zu verstehen. Soll die Spannung zwischen zwei anderen Orten angegeben werden, sind diese beiden Orte anzugeben.

1. Aufgabe

..Lösung mit EULER

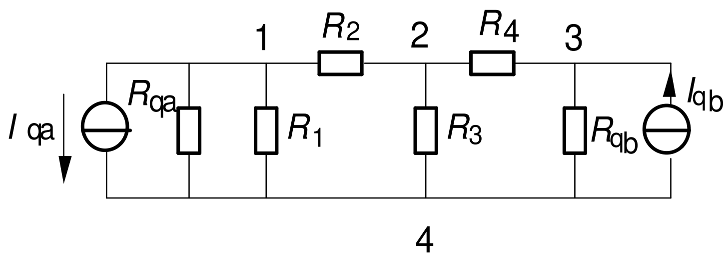
>..Spannungen in Volt, Ströme in Ampere, Widerstände in Ohm



Die Schaltung

1.Lösung: Knotenpotentialverfahren

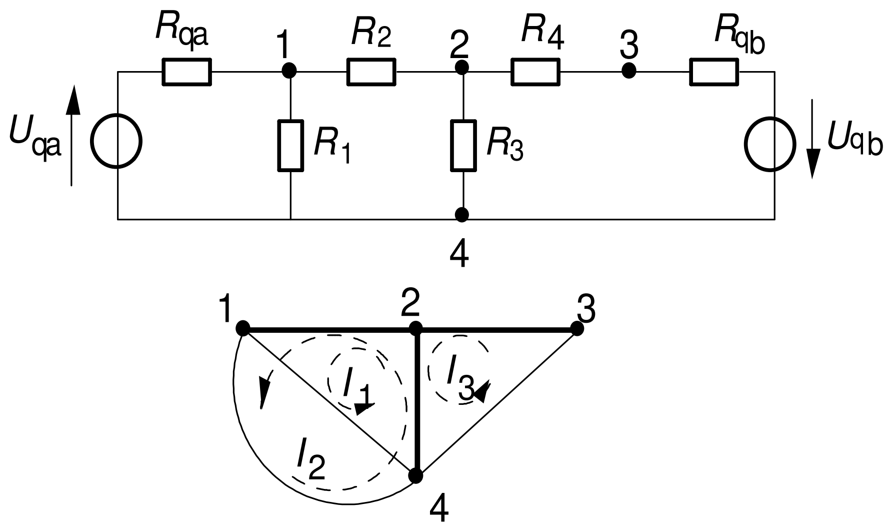
```
>..Schaltung abgeändert für das Knotenpotentialverfahren
```




```
>..Die Widerstände
>R1=200; R2=50; R3=50; R4=100;
>..und ihre Umrechnung auf Leitwerte
>G1=1/R1; G2=1/R2; G3=1/R3; G4=1/R4;
>
>..Die Spannungsquelle und ihre Umrechnung auf Stromquelle
> Uqa=2; Rqa=10; Gqa=1/Rqa; Iqa=Uqa/Rqa
          0.2
>..Die Stromquelle und ihre Umrechnung auf Spannungsquelle
>Iqb=0.1; Rqb=20; Gqb=1/Rqb; Uqb=Rqb*Iqb
            2
```

```
>..Knotenpotenzialverfahren, Knoten 4 ist Bezugsknoten
>..Aufbau der bezogenen Matrix
>Gb=([Gqa+G1+G2, -G2,    0;
>      -G2,   G2+G3+G4, -G4;
>       0,      -G4,   G4+Gqb]);
>..Ausgabe der Matrix
>Gb
        0.125         -0.02             0
        -0.02          0.05         -0.01
            0         -0.01          0.06
>..Eingabe des Stromvektors.
>..Er wird als Zeilenvektor eingegeben und
>..anschließend transponiert. Dadurch wird er
>..zum Spaltenvektor.
>I=[-Iqa, 0, Iqb]'
         -0.2
            0
          0.1
>..Lösen des Gleichungssystems
>U=Gb\I
     -1.65436
    -0.339734
      1.61004
>..Potenzial des Knoten Nr. 1 ist U[1]=-1.65436 V
>..Potenzial des Knoten Nr. 2 ist U[2]=-0.339734 V
>..Potenzial des Knoten Nr. 3 ist U[3]= 1.61004 V
>
>..Nachbearbeitung
>..Zweigspannungen
>U12=U[1] - U[2]
     -1.31462
>U23=U[2] - U[3]
     -1.94978
>..
>..Zweigströme
>I1=U[1]/R1
  -0.00827179
>I12=U12/R2
   -0.0262925
>I2=U[2]/R3
  -0.00679468
>I23=U23/R4
   -0.0194978
>I3=U[3]/Rqb
    0.0805022
>..Dies ist der Strom durch Rqb!
>..Es fehlt noch die Spannung an Rqa:
>URqa=Uqa+U[1]
     0.345643
```

```
>..2. Lösung: Maschenstromverfahren
>.. Schaltung abgeändert für das Maschenstromverfahren
```



Schaltbild mit Maschen und Netzwerkgraph

Aufstellen der Maschengleichungen:

Masche 1: Beginn am Knoten 1, dann über R_1, R_3 und R_2 zurück zu Knoten 1

$$R_1\, I_1 + R_3(I_1 + I_2 - I_3) + R_3(I_1 + I_2) = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_1 + (R_2 + R_3)\, I_2 - R_3 I_3 = 0$$

Masche 2: Beginn am Knoten 1, dann über R_{qa}, U_{qa}, R_3 und R_2 zurück zu Knoten 1

$$R_{qa} I_2 - U_{qa} + R_3(I_1 + I_2 - I_3) + R_2(I_1 + I_2) = 0$$

$$(R_2 + R_3)\mathrm{I1} + (R_{qa} + R_2 + R_3)I_2 - R_3\, I_3 = U_{qa}$$

Masche 3: Beginn am Knoten 2, dann über R_3, U_{qb}, R_{qb} und R_4 zurück zu Knoten 2

$$R_3(-I_1 - I_2 + I_3) - U_{qb} + R_{qb} I_3 + R_4 I_3 = 0$$

$$-R_3 I_1 - R_3 I_2 + (R_{qb} + R_3 + R_4)I_3 = U_{qb}$$

Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ R_2 + R_3 & R_{qa} + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & -R_3 & R_{qb} + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{qa} \\ U_{qb} \end{pmatrix}$$

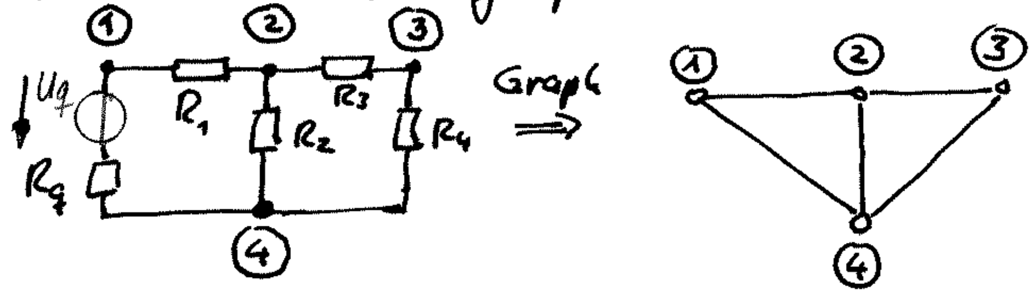
Eingabe in EULER:

```
>..Widerstandsmatrix
>R=([R1+R2+R3 ,R2+R3,    -R3;
>       R2+R3, Rqa+R2+R3, -R3;
>       -R3,    -R3,    Rqb+R3+R4]);
>R
          300           100           -50
          100           110           -50
          -50           -50           170
```

```
>..Der Spannungsvektor [0,Uqa-Uqb]
>U=[0,Uqa,Uqb]'
            0
            2
            2
>..Die Lösung der Ströme
>I=R\U
  -0.00827179
    0.0345643
    0.0194978
>..Maschenstrom I[1]=-0.00827179
>..Maschenstrom I[2]= 0.0345643
>..Maschenstrom I[3]= 0.0194978
>..Die Zweigströme:
>I12=-(I[1]+I[2])
   -0.0262925
>..Der Strom durch R1 zum Knoten 4
>I14=I[1]
  -0.00827179
>Iqa=I[2]
    0.0345643
>I24=-I[1]-I[2]+I[3]
  -0.00679468
>I23=-I[3]
   -0.0194978
>..Der Strom durch Rqb (siehe Schaltbild oben)
>I34=I23+Iqb
    0.0805022
>
```

2. Aufgabe

a) Der Netzwerkgraph



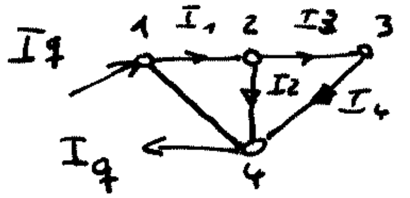
a) schwebende Leitwertmatrix

$$GS = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_q} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_q} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_q} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

b) Knoten 4 ist Bezugsknoten

Aus der GS → Zeile 4 und Spalte 4 streichen liefert die Knotenpotentialmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_q} & -1/R_1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -1/R_3 \\ 0 & -1/R_3 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$I_q = U_q / R_q = \frac{1V}{0{,}5\Omega} = 2A$$

Lösung auf der nächsten Seite mit Mathcad erstellt.

Eingabe der Werte der Spannungsquelle, statt Rq wird mit R5 gerechnet

$Uq := 1 \qquad R5 := 0.5 \qquad Iq := \frac{Uq}{R5}$

Eingabe der Netzwerkwiderstände:

$R1 := 1 \qquad R2 := 2 \qquad R3 := 0.25 \qquad R4 := 0.25$

Die Knotenpotentialmatrix

Der Stromvektor

$$G := \begin{pmatrix} \frac{1}{R1}+\frac{1}{R5} & \frac{-1}{R1} & 0 \\ \frac{-1}{R1} & \frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3} & \frac{-1}{R3} \\ 0 & \frac{-1}{R3} & \frac{1}{R3}+\frac{1}{R4} \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5.5 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} Iq \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$IG := G^{-1} \qquad IG = \begin{pmatrix} 0.368 & 0.105 & 0.053 \\ 0.105 & 0.316 & 0.158 \\ 0.053 & 0.158 & 0.204 \end{pmatrix} \qquad U := IG \cdot I \qquad U = \begin{pmatrix} 0.737 \\ 0.211 \\ 0.105 \end{pmatrix}$$

$U_0 = 0.737$ ist die Spannung am Konten 1

$U_1 = 0.211$ ist die Spannung am Knoten 2

$U_2 = 0.105$ ist die Spannung am Knoten 3

Die Spannungen an den Widerständen (der Quellwiderstand Rq ist in der Rechnung der Widerstand R5)

$UR1 := U_0 - U_1 \qquad UR1 = 0.526$

$UR2 := U_1 \qquad UR2 = 0.211$

$UR3 := U_1 - U_2 \qquad UR3 = 0.105$

$UR4 := U_2 \qquad UR4 = 0.105$

$UR5 := U_0 \qquad UR5 = 0.737$ = Spannung am Quellwiderstand Rq

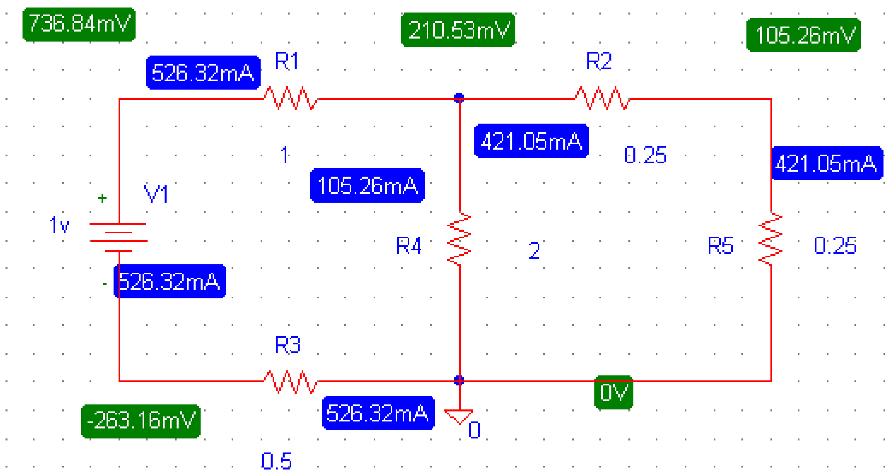
Die Ströme durch die Widerstände

$I1 := \frac{UR1}{R1} \qquad I1 = 0.526 \qquad I2 := \frac{UR2}{R2} \qquad I2 = 0.105$

$I3 := \frac{UR3}{R3} \qquad I3 = 0.421 \qquad I4 := \frac{UR4}{R4} \qquad I4 = 0.421$

Die Simulation mit PSPICE zeigt Übereinstimmung mit den berechneten Werten.

Die Berechnung nach dem modifizierten Knotenpotentialverfahren ergibt das gleiche Ergebnis. (Die Berechnung wurde mit Mathcad erstellt. Sie beginnt auf der nächsten Seite.)



Berechnung der Knotenspannungen nach dem modifizierten Knotenpotentialverfahren

$$GNEU := \begin{pmatrix} \frac{1}{R1} & \frac{-1}{R1} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{R1} & \frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3} & \frac{-1}{R3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R3} & \frac{1}{R3}+\frac{1}{R4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R5} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad GNEU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5.5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des neuen Gleichungssystems

$$IGNEU := GNEU^{-1} \qquad IGNEU = \begin{pmatrix} 0.368 & 0.105 & 0.053 & 0.368 & 0.737 \\ 0.105 & 0.316 & 0.158 & 0.105 & 0.211 \\ 0.053 & 0.158 & 0.204 & 0.053 & 0.105 \\ 0.368 & 0.105 & 0.053 & 0.368 & -0.263 \\ 0.737 & 0.211 & 0.105 & -0.263 & -0.526 \end{pmatrix}$$

$$UNEU := IGNEU \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Uq \end{pmatrix} \qquad UNEU = \begin{pmatrix} 0.737 \\ 0.211 \\ 0.105 \\ -0.263 \\ -0.526 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse lauten:

Spannung am Konten 1 gegenüber dem Bezugsknoten: $U1 := UNEU_0 \quad U1 = 0.737$

Spannung am Konten 2 gegenüber dem Bezugsknoten: $U2 := UNEU_1 \quad U2 = 0.211$

Spannung am Konten 3 gegenüber dem Bezugsknoten: $U3 := UNEU_2 \quad U3 = 0.105$

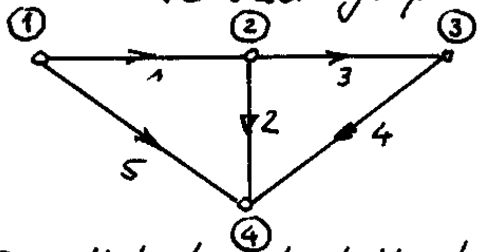
Spannung am Konten 4 gegenüber dem Bezugsknoten: $U4 := UNEU_3 \quad U4 = -0.263$

Strom von Knoten 1 nach Knoten 4: $I14 := UNEU_4 \quad I14 = -0.526$

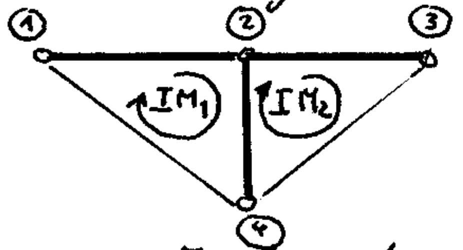
Dann ist der Strom von Knoten 1 nach Knoten 2: $I12 := -I14 \quad I12 = 0.526$

c) Anwenden des Maschenstromverfahrens

Netzwerkgraph



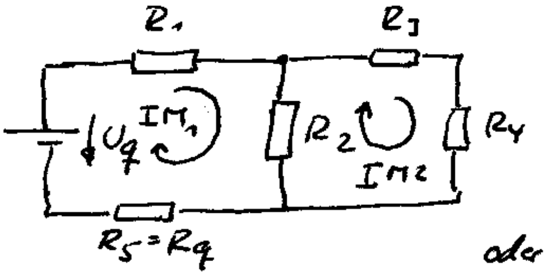
vollständiger Baum



Das Netz hat k = 4 Knoten und z = 5 Zweige, also gibt es m = z − k + 1 = 5 − 4 + 1 = 2 unabhängige Maschen

In jeder Masche muß es mindestens einen Verbindungszweig geben, der nicht in der anderen Masche enthalten ist.

Für dieses Netz bieten sich die beiden eingezeichneten Maschen mit den Maschenströmen IM1 und IM2 an.



Masche 1:

$R_1 \cdot I_{M1} + R_2 \cdot I_{M2} - R_2 \cdot I_{M2} + \ldots + R_5 \cdot I_{M1} - U_q = 0$

oder $(R_1 + R_2 + R_5) I_{M1} - R_2 I_{M2} = U_q$

Masche 2: $R_3 \cdot I_{M2} + R_4 \cdot I_{M2} + R_2 \cdot I_{M2} - R_2 \cdot I_{M1} = 0$

oder $-R_2 I_{M1} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{M2} = 0$

Matrizielle Darstellung

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder $\overleftrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{I_M} = \overrightarrow{U}$.

und weiter: $\overrightarrow{I_M} = \overleftrightarrow{R}^{-1} \cdot \overrightarrow{U}$

Lösung mit Mathcad nächste Seite:

Anwendung des Maschenstromverfahren

Vektor der Erregungsspannungen $UQ := \begin{pmatrix} Uq \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Widerstandsmatrix lautet

$$RM := \begin{pmatrix} R1 + R2 + R5 & -R2 \\ -R2 & R2 + R3 + R4 \end{pmatrix} \qquad RM = \begin{pmatrix} 3.5 & -2 \\ -2 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Die invertierte Widerstandsmatrix lautet

$$IRM := RM^{-1} \qquad IRM = \begin{pmatrix} 0.526 & 0.421 \\ 0.421 & 0.737 \end{pmatrix}$$

Es gilt $IM := IRM \cdot UQ$ $\qquad IM = \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.421 \end{pmatrix}$

Die Ströme in den Zweigen aus den Maschenströmen

Strom von Knoten 1 zum Knoten 2 ist $I12 := IM_0$ $\qquad I12 = 0.526$

Strom von Konten 2 zum Bezugsknoten ist $I2 := IM_0 - IM_1$ $\qquad I2 = 0.105$

Strom von Konten 1 zum Bezugsknoten ist $I1 := (-IM)_0$ $\qquad I1 = -0.526$

Strom von Knoten 2 nach Knoten 3 ist $I23 := IM_1$ $\qquad I23 = 0.421$

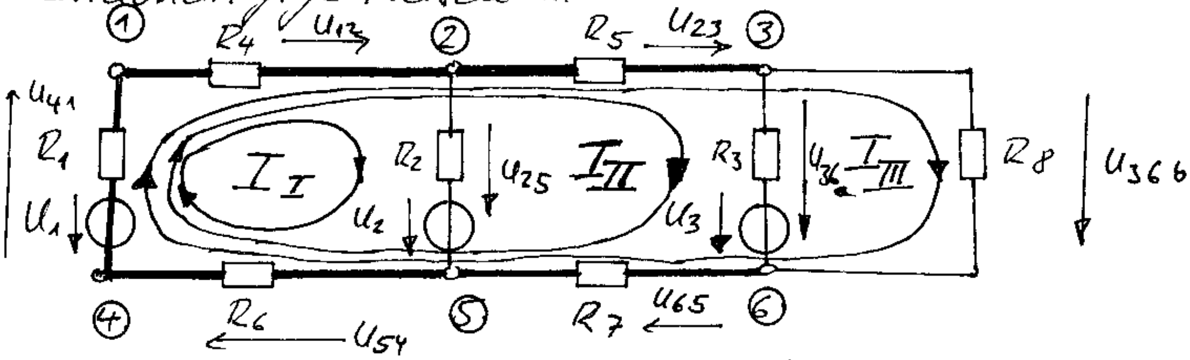
Strom von Knoten 3 nach Knoten 4 ist $I34 := IM_1$ $\qquad I34 = 0.421$

Strom von Knoten 4 zum Bezugsknoten ist $I4 := IM_1$ $\qquad I4 = 0.421$

3. Aufgabe

a) Lösen nach dem Maschenstromverfahren:

Schaltung, vollständiger Baum und Maschenströme: Die Schaltung hat 8 Zweige und 6 Knoten, daher gibt es $m = z - k + 1 = 3$ unabhängige Maschen.



Vollständiger Baum (dicke Strichstärke) über die Knoten 3 - 2 - 1 - 4 - 5 - 6

Masche I: $U_{12} + U_{25} + U_{54} + U_{41} = 0$

$$R_4(I_I + I_{II} + I_{III}) + R_2 \cdot I_I + U_2 + R_6(I_I + I_{II} + I_{III}) + R_1(I_I + I_{II} + I_{III}) - U_1 = 0$$

Nach Strömen sortiert:

$$(R_1 + R_2 + R_4 + R_6) I_I + (R_1 + R_4 + R_6) I_{II} + (R_1 + R_4 + R_6) I_{III} = U_1 - U_2$$

Masche II: $U_{12} + U_{23} + U_{36} + U_{65} + U_{54} + U_{41} = 0$

$$R_4(I_I + I_{II} + I_{III}) + R_5(I_{II} + I_{III}) + R_3 \cdot I_{II} + U_3 +$$
$$+ R_7(I_{II} + I_{III}) + R_6(I_I + I_{II} + I_{III}) - U_1 + R_1(I_I + I_{II} + I_{III}) = 0$$

Nach Strömen sortiert:

$$(R_1 + R_4 + R_6) I_I + (R_1 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) I_{II} +$$
$$+ (R_1 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) I_{III} = U_1 - U_3$$

Masche III: $U_{12} + U_{23} + U_{366} + U_{65} + U_{54} + U_{41} = 0$

$$R_4(I_I + I_{II} + I_{III}) + R_5(I_{II} + I_{III}) + R_8 \cdot I_3 + R_7(I_{II} + I_3) +$$
$$+ R_6(I_I + I_{II} + I_{III}) + R_1(I_I + I_{II} + I_{III}) - U_1 = 0$$

Nach Strömen sortiert:

$$(R_1 + R_4 + R_6)\, I_I + (R_1 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7)\, I_{II} +$$
$$+ (R_1 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8)\, I_{III} = U_1$$

Einsetzen der Werte liefert:

$70\,\Omega \cdot I_I + 50\,\Omega \cdot I_{II} + 50\,\Omega \cdot I_{III} = -10\,V$ Masche 1

$50\,\Omega \cdot I_I + 85\,\Omega \cdot I_{II} + 70\,\Omega \cdot I_{III} = 25\,V$ Masche 2

$50\,\Omega \cdot I_I + 70\,\Omega \cdot I_{II} + 81\,\Omega \cdot I_{III} = 10\,V$ Masche 3

$$\begin{pmatrix} 70 & 50 & 50 \\ 50 & 85 & 70 \\ 50 & 70 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix} A$$

Lösung:

$I_I = -0{,}555\,A$; $I_{II} = 0{,}8215\,A$; $I_{III} = -0{,}243\,A$

4) Lösung nach Knotenpotentialverfahren

Knoten 5 sei Bezugsknoten!

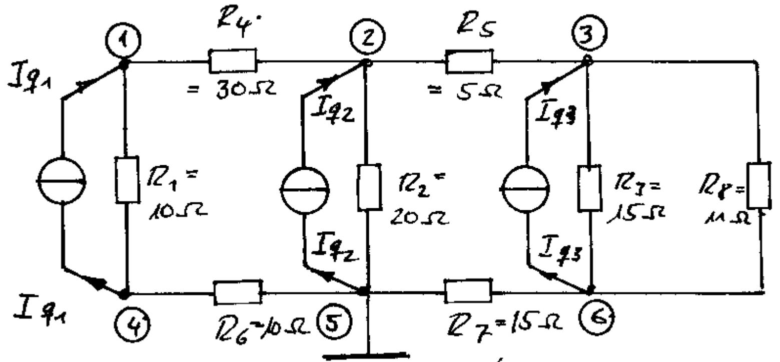
Umwandlung der realen Spannungsquellen in reale Stromquellen:

$$I_{q1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{10\,V}{10\,\Omega} = 1\,A$$

$$I_{q2} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{20\,V}{20\,\Omega} = 1\,A$$

$$I_{q3} = \frac{U_3}{R_3} = \frac{-15\,V}{15\,\Omega} = -1\,A$$

6/10



$\varphi_5 = \varphi_B = 0$ (Knoten 5 ist Bezugsknoten)

Aufstellen der bezogenen Leitwertmatrix :

$$\frac{1}{\Omega}\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑥ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑥ \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{11} & 0 & -\frac{1}{15}-\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{10}+\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{15}-\frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{11} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} A$$

oder:

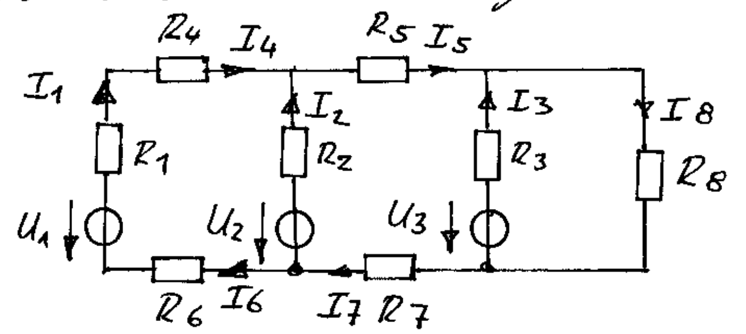
$$\frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} 0{,}133 & -0{,}033 & 0 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}033 & 0{,}283 & -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}3576 & 0 & -0{,}158 \\ -0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}158 & 0 & 0{,}224 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} A$$

Lösung

$\varphi_1 = 9{,}576\,V$; $\varphi_2 = 8{,}93\,V$; $\varphi_3 = 6{,}06\,V$; $\varphi_4 = -0{,}211\,V$; $\varphi_6 = 8{,}74\,V$

(Je nach Stellenzahl d. Berechnung gibt es geringe Abweichungen zu dieser Lösung!)

c) Bestimmung der Spannungen und Ströme an allen Widerständen mit den Ergebnissen der Maschenstromanalyse.



$I_I = -0{,}555\,A$

$I_{II} = 0{,}8215\,A$

$I_{III} = -0{,}243\,A$

Die Ströme

$I_1 = I_4 = I_6 = I_I + I_{II} + I_{III} = 0{,}0235\,A$

$I_2 = -I_I = 0{,}555\,A$

$I_5 = I_7 = I_{II} + I_{III} = 0{,}5785\,A$

$I_3 = -I_{II} = -0{,}8215\,A$

$I_8 = I_{III} = -0{,}243\,A$

Die Spannungen

$U_{R1} = R_1 \cdot I_1 = 10\,\Omega \cdot 0{,}0235\,A = 0{,}2354\,V$

$U_{R2} = R_2 \cdot I_2 = 20\,\Omega \cdot 0{,}555\,A = 11{,}1\,V$

$U_{R3} = R_3 \cdot I_3 = 15\,\Omega \cdot (-0{,}8215\,A) = -12{,}3\,V$

$U_{R4} = R_4 \cdot I_4 = 30\,\Omega \cdot 0{,}0235\,A = 0{,}706\,V$

$U_{R5} = R_5 \cdot I_5 = 5\,\Omega \cdot 0{,}5785\,A = 2{,}89\,V$

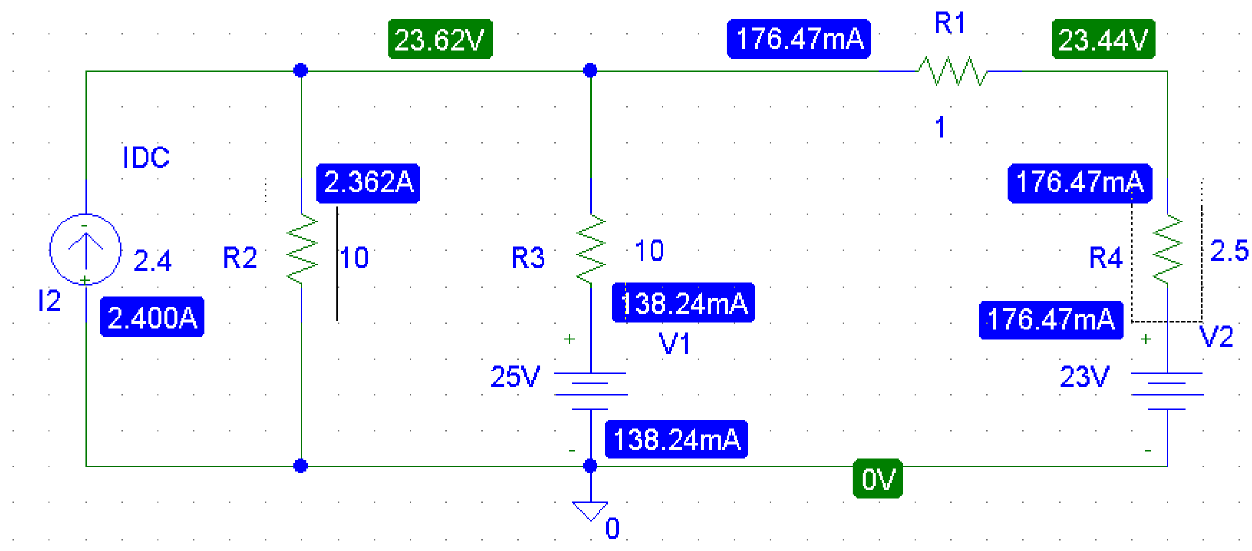
$U_{R6} = R_6 \cdot I_6 = 10\,\Omega \cdot 0{,}0235\,A = 0{,}235\,V$

$U_{R7} = R_7 \cdot I_7 = 15\,\Omega \cdot 0{,}5785\,A = 8{,}68\,V$

$U_{R8} = R_8 \cdot I_8 = 11\,\Omega \cdot (-0{,}243\,A) = -2{,}673\,V$

Für die Aufgaben 4, 5, 6 werden Hinweise und eine mit PSpice erarbeitete Lösung angegeben.

4. Aufgabe

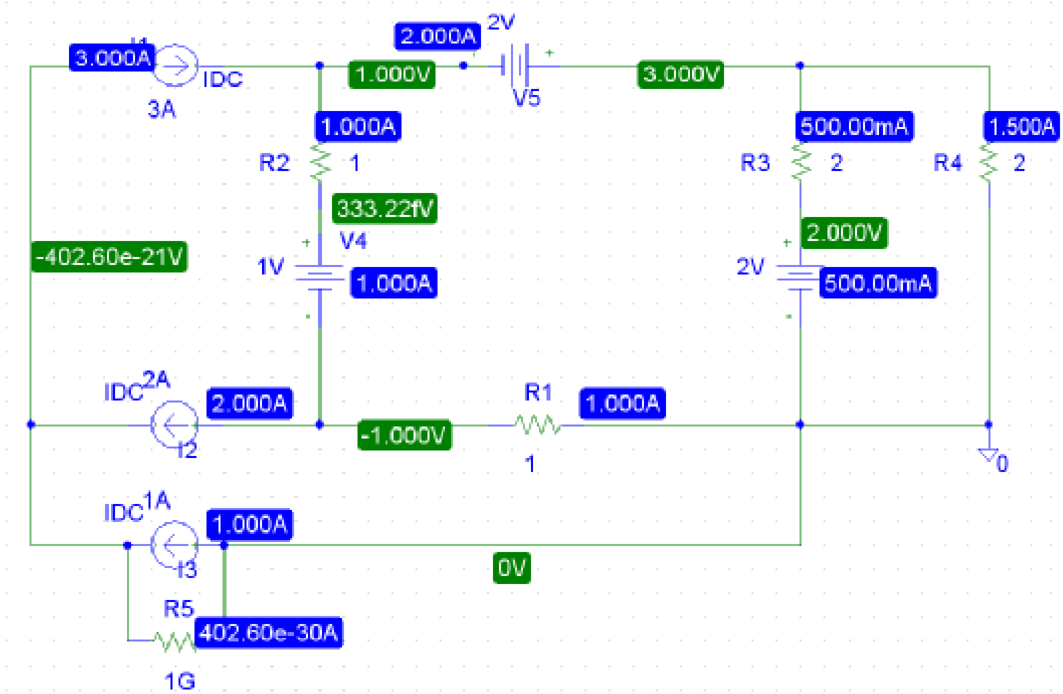


5. Aufgabe

Es sind nur die Ströme I_{01} = 3 A und I_{02} = 2 A angegeben. I_{03} ist nicht angegeben, ebenso ist nicht angegeben, wo die Ströme I_{01} und I_{02} die Schaltung verlassen. Da die Summe aller Ströme aber immer null sein muß, bedeutet das in diesem Fall, daß der Strom I_{03}, für den ein Pfeil angeben wurde, sonst aber nichts, derjenige Strom ist, für den gilt:

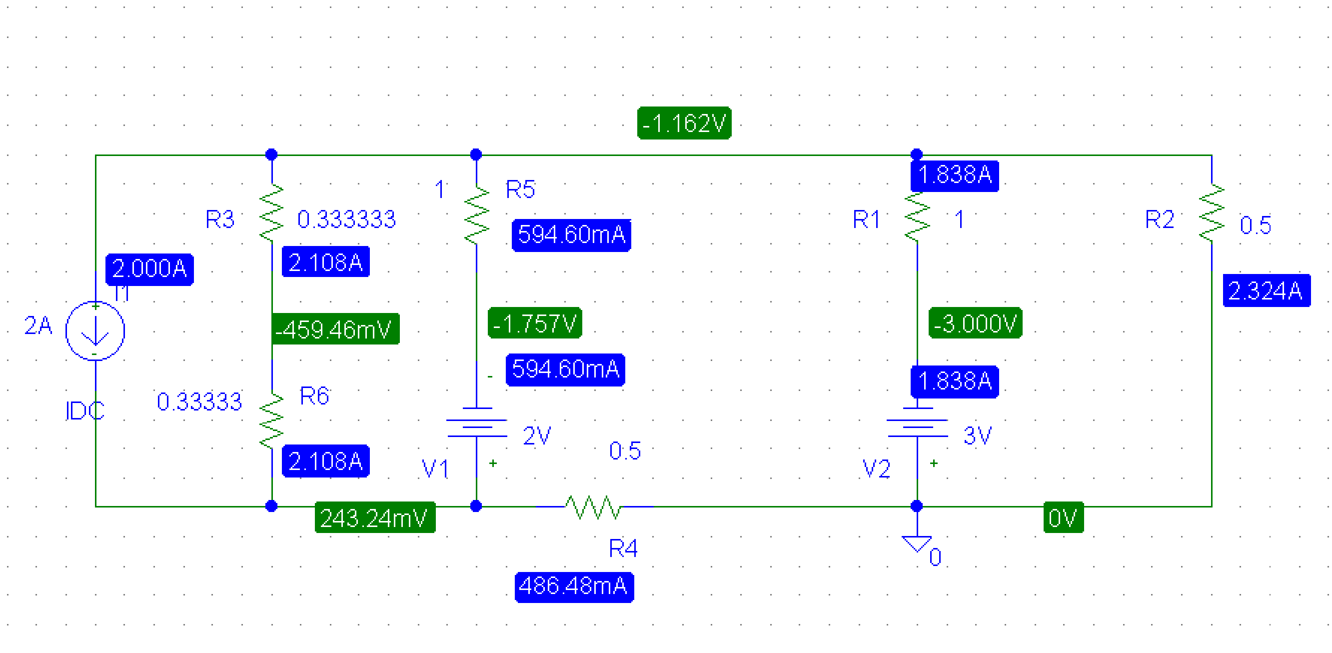
$$I_{03} = I_{01} - I_{02} = 3\text{ A} - 2\text{ A} = 1\text{ A}$$

Achtung: Da keine Stromquellen in einer Reihe liegen dürfen, muss eine der Stromquellen mit einem hochohmigen Widerstand überbrückt werden, hier I_3 mit 1GΩ .



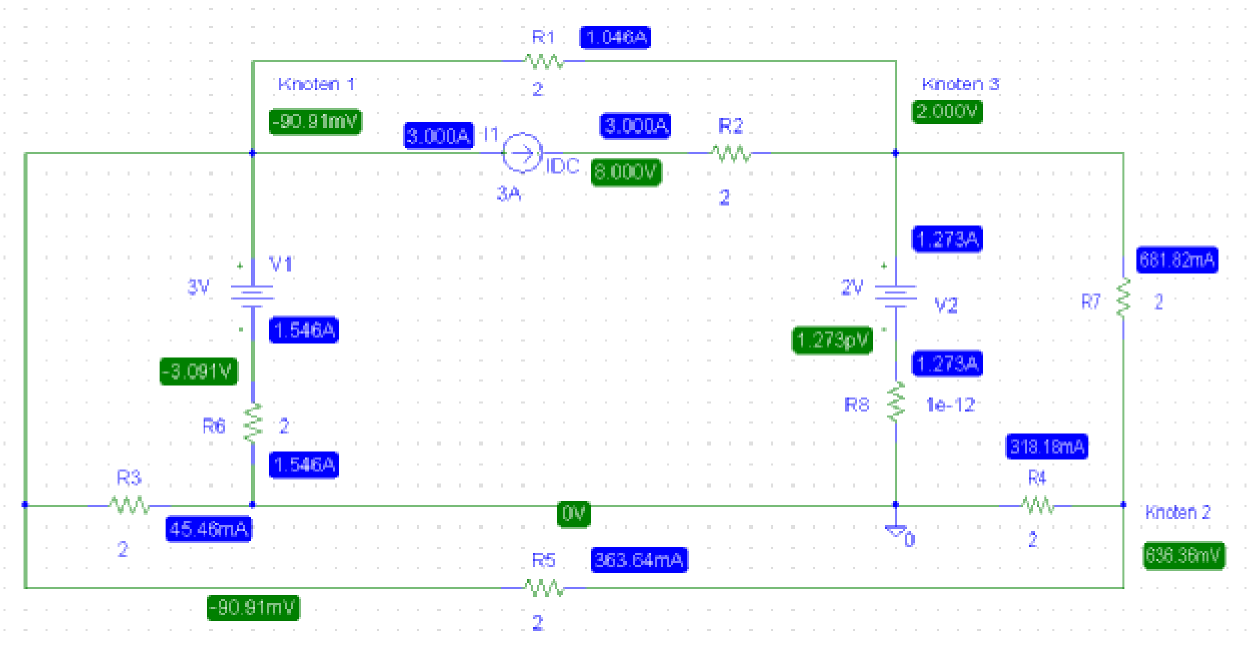
6. Aufgabe

Hier liegt die Stromquelle zwischen den Anschlüssen I_2 und I_1. Bei I_2 fließt der Strom 2 A in die Schaltung, bei I_1 tritt er aus. Simulation mit PSpice:



7. Aufgabe

Lösung mit SPICE



Erläuterungen zur Lösung der Aufgabe

Das Netzwerk weist eine ideale Stromquelle I_C, eine reale Spannungsquelle U_A und eine ideale Spannungsquelle U_B auf. Da das Knotenpotentialverfahren als Quellen Stromquellen voraussetzt, müssen die Spannungsquellen zunächst in Stromquellen umgewandelt werden. Bei der realen Spannungsquelle U_A mit dem Innenwiderstand R_3 ist das sofort möglich. Di dazu passende reale Stromquelle hat den gleichen Innenwiderstand. Ihr Kurzschlußstrom ist durch

$$I_A = U_A / R_3 = 3\text{V}/2\ \Omega = 1{,}5\ \text{A}$$

gegeben. Bei der idealen Spannungsquelle U_B ist das so einfach aber nicht möglich. Hier wird durch Einfügen eines sehr, sehr geringen Widerstands $R_B = 10^{-12}\ \Omega$, der mit der idealen Spannungsquelle in Reihe liegt, die ideale Spannungsquelle durch eine reale Spannungsquelle angenähert bzw. umgewandelt. (Durch den sehr niedrigen Innenwiderstand behält sie annähernd das Verhalten der idealen Spannungsquelle.) Nun kann auch diese Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt werden. Der Innenwiderstand dieser realen Stromquelle ist wieder $R_B = 10^{-12}\ \Omega$. Der Strom beträgt

$$I_{UB} = U_B / R_B = 2\ \text{V}/10^{-12}\ \Omega = 2 \cdot 10^{12}\ \text{A}\ .$$

In der Aufgabenstellung ist aber noch eine Schwierigkeit verborgen: Zwischen den Knoten 1 und 3 befindet sich die Stromquelle I_C in Reihe mit dem Widerstand R_2. Gleichgültig, wie groß oder klein der Widerstand R_2 ist, der durch ihn fließende Strom wird allein durch die Stromquelle bestimmt. Für die Leitwertmatrix hat das die Folge, daß zwischen Knoten 1 und Knoten 3 der Leitwert G_2 bzw. der Kehrwert, der Widerstand R_2 nicht erscheint, da der Leitwert aufgrund Reihenschaltung von Stromquelle mit ihrem unendlich hohen Widerstand und dem Widerstand R_2 zwischen Knoten 1 und 3 null ist.

Mit Knoten 4 als Bezugsknoten ergibt sich folgende Leitwertmatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_7} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_B} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_7} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A - I_C \\ 0 \\ I_{UB} + I_C \end{pmatrix}$$

Gemäß der Aufgabenstellung sind alle Widerstände gleich:

R_1 bis $R_7 = 2\ \Omega$,

also gilt G_1 bis $G_7 = 0{,}5$ S.

Die Knotenströme: $I_A = 1{,}5$ A, $I_{UB} = 2 \cdot 10^{12}$ A und $I_C = 3$A.

Dann ist $I_A - I_C = 1{,}5\ \text{A} - 3\ \text{A} = -1{,}5\ \text{A}$

und $I_{UB} + I_C = 3 + 2 \cdot 10^{12}\ \text{A} \approx 2 \cdot 10^{12}$

Einsetzen der Werte liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,5 & -05 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 10^{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^{12} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

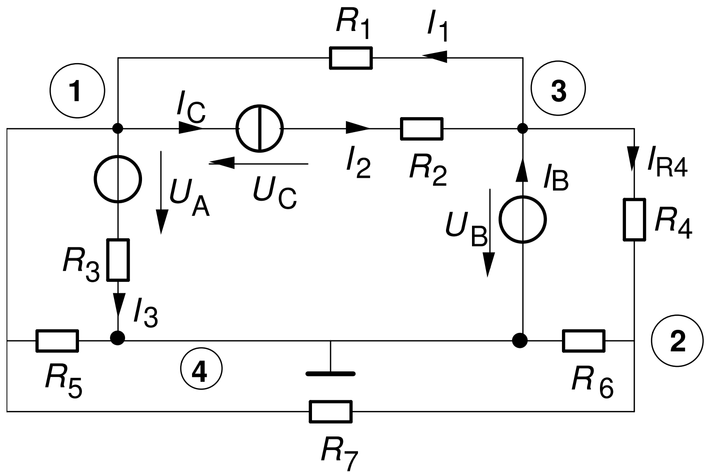
Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$\varphi_1 = -0.09\ \mathrm{V}$$

$$\varphi_2 = 0,6363\ \mathrm{V}$$

$$\varphi_3 = 2\ \mathrm{V}$$

Die Ströme



$$I_1 = \frac{U_{31}}{R_1} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_1} = \frac{2\ \mathrm{V}\text{-}(-0{,}09\mathrm{V})}{2\ \Omega} = 1{,}045\ \mathrm{A}$$

$$I_2 = I_C = 3\ \mathrm{A}$$

$$I_{R4} = (\varphi_3 - \varphi_2)/R_4 = (2\ \mathrm{V} - 0{,}636\ \mathrm{V})/2\ \Omega = 0{,}68\ \mathrm{A}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - U_A}{R_3} = \frac{-0{,}09\,\mathrm{V} - 3\,\mathrm{V}}{2\Omega} = -1{,}545\,\mathrm{A}$$

$$I_B = I_1 - I_C + I_{R4} = 1{,}045\ \mathrm{A} - 3\ \mathrm{A} + 0{,}68\ \mathrm{A} = -1{,}275\ \mathrm{A}$$

Die Leistungen

Leistung der Spannungsquelle U_A:

$$P_A = U_A \cdot I_3 = 3\ \mathrm{V} \cdot 1{,}405\ \mathrm{A} = 4{,}215\ \mathrm{W}$$

Leistung der Spannungsquelle U_B

$$P_B = U_B \cdot I_B. = 2\ \mathrm{V} \cdot (-1{,}545)\ \mathrm{A} = -3{,}09\ \mathrm{W}$$

(Spannungsquelle P_B nimmt die Leistung 3,09 W auf, ist also ein Verbraucher!)

Leistung der Stromquelle I_C:

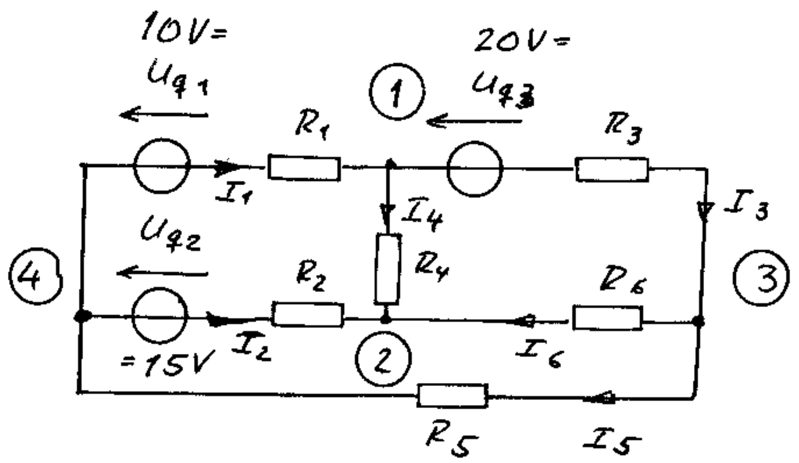
$$P_C = U_C \cdot I_C.$$

Die Spannung der Stromquelle:

Es gilt $U_C = R_2 \cdot I_C + \varphi_3 - \varphi_1 = 2\ \Omega \cdot 3\ \mathrm{A} + 2{,}0\mathrm{V} - (-0{,}09\ \mathrm{V}) = 8{,}09\ \mathrm{V}$

Die Leistung $P_C = 8{,}09\ \mathrm{V} \cdot 3\ \mathrm{A} = 24{,}27\ \mathrm{W}$.

8. Aufgabe

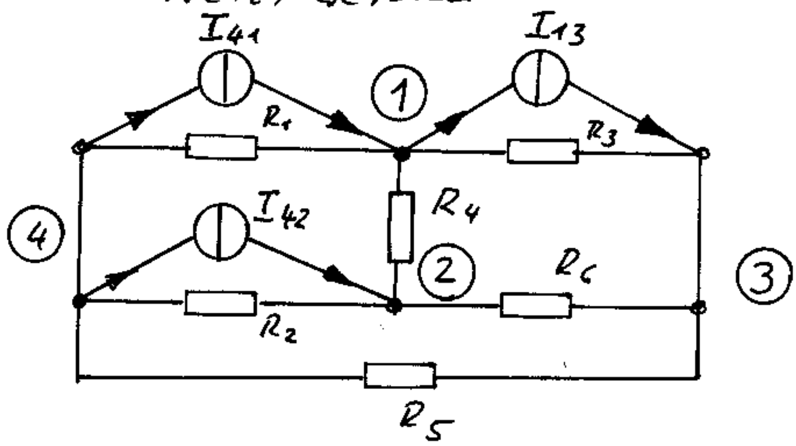


Alle Widerstände haben den Wert von 10 Ohm.
Gesucht sind die Spannungen der Knoten 1 bis 3 gegenüber dem Bezugsknoten 4 und die Ströme I_1 bis I_6.

Lösung nach dem Knotenpotentialverfahren

Aufstellen der Knotenpotentialmatrix G:

Es wird zunächst die Schaltung so geändert, daß die Spannungsquellen durch Stromquellen ersetzt werden:



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{41}-I_{13} \\ I_{42} \\ I_{13} \end{pmatrix}$$

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overleftrightarrow{G} \cdot \vec{U} = \vec{\underline{I}}$$

Lösung durch Inversion der G-Matrix

$$\vec{U} = \overleftrightarrow{G}^{-1} \cdot \vec{\underline{I}}$$

$$\overleftrightarrow{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 & 5 \end{pmatrix}$$

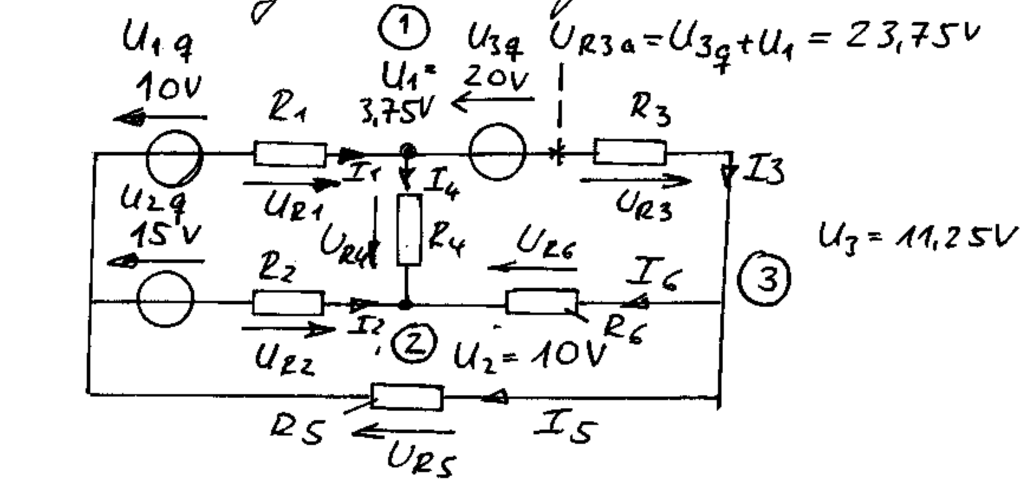
$$(U) = \begin{pmatrix} 5 & 2{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{U_1}{V} = -5 + 2{,}5\cdot 1{,}5 + 2{,}5\cdot 2 = \underline{\underline{3{,}75}}$$

$$\frac{U_2}{V} = 2{,}5\cdot(-1) + 5\cdot 1{,}5 + 2{,}5\cdot 2 = \underline{\underline{10{,}0}}$$

$$\frac{U_3}{V} = 2{,}5(-1) + 2{,}5\cdot 1{,}5 + 5\cdot 2 = \underline{\underline{11{,}25}}$$

Berechnung der Zweigströme



$$\underline{\underline{I_1}} = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_{1q} - U_1}{R_1} = \frac{10V - 3,75V}{10\Omega} = \underline{\underline{0,625A}}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{U_{2q} - U_2}{R_2} = \frac{15V - 10V}{10\Omega} = \underline{\underline{0,5A}}$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{U_{R3a} - U_3}{R_3} = \frac{23,75V - 11,25V}{10\Omega} = \underline{\underline{1,25A}}$$

$$\underline{\underline{I_4}} = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{U_1 - U_2}{R_4} = \frac{3,75V - 10V}{R_4} = \underline{\underline{-0,625A}}$$

$$\underline{\underline{I_5}} = \frac{U_{R5}}{R_5} = \frac{U_3}{R_5} = \frac{11,25V}{10\Omega} = \underline{\underline{1,125A}}$$

$$\underline{\underline{I_6}} = \frac{U_{R6}}{R_6} = \frac{U_3 - U_2}{R_6} = \frac{11,25V - 10V}{10\Omega} = \underline{\underline{0,125A}}$$

Lösen des Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel:

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} I_1 & G_{12} & G_{13} \\ I_2 & G_{22} & G_{23} \\ I_3 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}}$$

$$U_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} G_{11} & I_1 & G_{13} \\ G_{21} & I_2 & G_{23} \\ G_{31} & I_3 & G_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}}$$

$$U_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & I_1 \\ G_{21} & G_{22} & I_2 \\ G_{31} & G_{32} & I_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}}$$

Ist die Determinante der Leitwertmatrix null, gibt es keine Lösung!

Anwenden auf das Beispiel liefert:

Bestimmung der Determinante der Leitwertmatrix:

$$\det\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} = G_{11}\cdot G_{22}\cdot G_{33} + G_{12}\cdot G_{23}\cdot G_{31} + G_{13}\cdot G_{21}\cdot G_{32} - G_{31}\cdot G_{22}\cdot G_{13} - G_{32}\cdot G_{23}\cdot G_{11} - G_{33}\cdot G_{21}\cdot G_{12}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = 0,3\cdot 0,3\cdot 0,3 + (-0,1)(-0,1)0,3 + (-0,1)(-0,1)\cdot 0,3 - (-0,1)(0,3)(-0,1) - (-0,1)(-0,1)\cdot 0,3 - 0,3(-0,1)(-0,$$

$$= 0,016$$

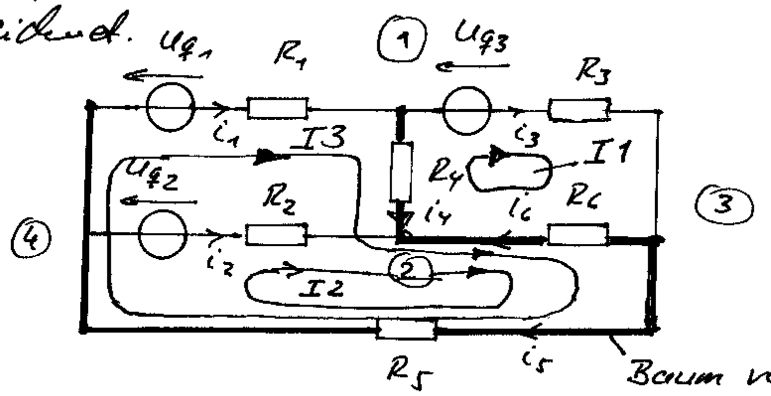
$$\underline{\underline{U_1}} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -0,1 & -0,1 \\ 1,5 & 0,3 & -0,1 \\ 2 & -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}}{0,016} = \frac{0,06}{0,016} = \underline{\underline{3,75\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_2}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0,3 & -1 & -0,1 \\ -0,1 & 1,5 & -0,1 \\ -0,1 & 2 & 0,3 \end{pmatrix}}{0,016} = \frac{0,16}{0,016} = \underline{\underline{10\,V}}$$

$$\underline{\underline{U_3}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 & -1 \\ -0,1 & 0,3 & 1,5 \\ -0,1 & -0,1 & 2 \end{pmatrix}}{0,016} = \frac{0,18}{0,016} = \underline{\underline{11,25\,V}}$$

Lösen nach dem Maschenstromverfahren

Da Netz in diesem Beispiel hat 4 Knoten und 6 Zweige. Somit gibt es $m = z - k + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ unabhängige Maschengleichungen. Um sie zu finden, wird ein Baum in das Netz gezeichnet.

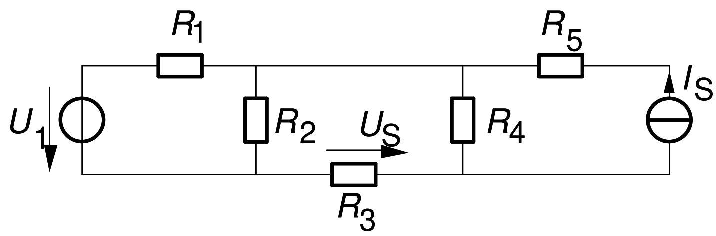


Baum verbindet die Knoten 1–4

Jede Masche muß einen Verbindungszweig aufweisen, der nicht in einer anderen Masche liegt!

Die Ströme i_1 bis i_3 der Quellen sind von besonderem Interesse, sie sollen sofort bei der Lösung des Gleichungssystems zur Verfügung stehen. Daher werden diese Zweige zu Verbindungszweigen gemacht, die nur von einem Maschenstrom durchströmt werden. Die 3 Maschen mit den Strömen I1 bis I3 sind oben eingezeichnet.

9. Aufgabe - gesteuerte Stromquelle



Die Schaltung ist nach dem Maschenstromverfahren und nach dem Knotenpotentialverfahren zu lösen Gesucht sind die Spannungen an allen Bauelementen und die Ströme durch alle Bauelemente. Werte $U_1 = 2$ V, $I_S = 4$ A. Alle Widerstände haben den Wert 2 Ω.

a) Die Stromquelle I_s ist eine ideale Stromquelle.

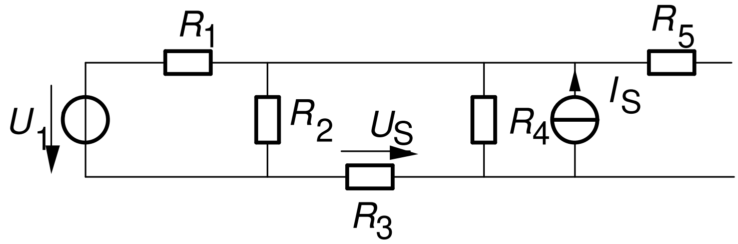
b) Die Stromquelle I_s ist eine gesteuerte Stromquelle $I_s = S \cdot U_s$.

Teil a: Stromquelle ist nicht gesteuert

Bemerkung zum Maschenstromverfahren: In der Schaltung dürfen nur reale Spannungsquellen aber keine realen oder idealen Stromquellen vorkommen. Daher sind reale Stromquellen zunächst in reale Spannungsquellen umzuwandeln. In dieser Schaltung ist die Stromquelle allerdings eine ideale Quelle, die nicht in eine Spannungsquelle umwandelbar ist. Zur Lösung der Aufgabe bieten sich aber zwei Möglichkeiten an:

Erste Möglichkeit: Aus der idealen Stromquelle wird eine reale Stromquelle gemacht, in dem zur Stromquelle ein Widerstand $R = 10^{12}$ Ω parallel geschaltet wird, der sehr, sehr groß im Verhältnis zu den anderen Widerständen ist. Dieser sehr große Widerstand verändert die Strom- Spannungsverhältnis nur so geringfügig, daß Abweichungen gegenüber der genauen Lösung vernachlässigbar sind.

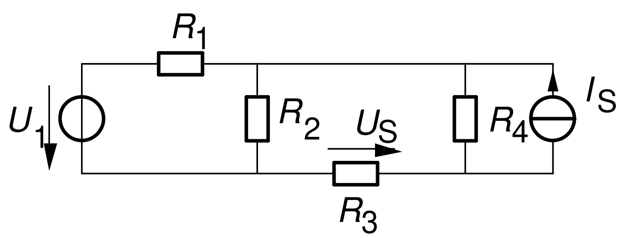
Zweite Möglichkeit: Die Stromquelle wird zum Widerstand R_4 verschoben, da R_5 auf die anderen Schaltungsteile keinen Einfluß ausübt. Die Spannung an der Stromquelle wird zum Schluß um $U_{R5} = R_5 \cdot I_S$ gegenüber der Spannung U_{R4} erhöht. Dann ergibt sich folgende Schaltung:



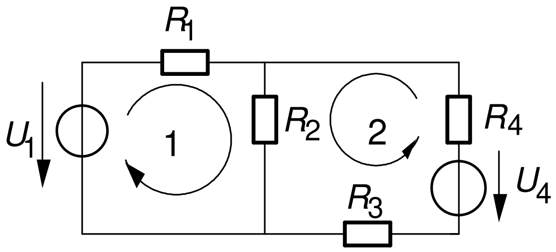
Da keine Masche über den Widerstand R_5 gebildet werden kann, fällt der Widerstand aus der Maschenanalyse heraus. Das Netzwerk aus den anderen Elementen kann dann nach dem Maschenstromverfahren berechnet werden. Zum Schluß wird die Spannung am Widerstand R_5 zu $U_{R5} = R_5 \cdot I_S$ bestimmt.

Lösung nach dem Maschenstromverfahren:

Umwandeln der realen Stromquelle in eine reale Spannungsquelle:



$$U_4 = R_4 I_s = 2\ \Omega \cdot 4\ \text{A} = 8\ \text{V}$$



Die neue Spannung ist $U_4 = R_4 I_s$.

Masche 1: $(R_1 + R_2)\, I_1 + R_2\, I_2 = U_1$

Masche 2: $R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 = U_4 = R_4 I_s$

Aus der ersten Maschengleichung folgt:

$$I_1 = (U_1 - R_2\, I_2)/\,(R_1 + R_2)$$

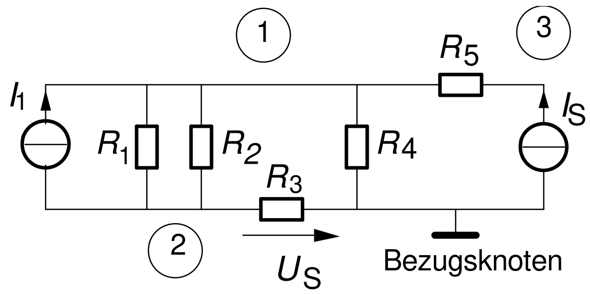
Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$R_2(U_1 - R_2\, I_2)/(R_1 + R_2) + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 = R_4 I_s$$

Auflösen liefert: $$I_2 = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 - R_4 I_s}{\frac{R_2^2}{R_1 + R_2} - R_2 - R_3 - R_4}.$$

Alle Widerstände haben den Wert von 2 Ω.
Die Spannung U_1 hat den Wert von 2 V, der Strom I_s hat den Wert von 4 A.
Dann ist $U_4 = 2\ \Omega \cdot 4\ \text{A} = 8\text{V}$.
Der Strom $I_2 = -7\ \text{V} / (-5\ \Omega) = -1{,}4\ \text{A}$. $I_1 = (2\ \text{V} - 2\ \Omega \cdot 1{,}4\ \text{A}\,) / 4\ \Omega = -0{,}2\text{A}$.
Die Spannung am Widerstand R_3 ist $U_s = 2\ \Omega \cdot 1{,}4\ \text{A} = 2{,}8\ \text{V}$.

Lösen nach dem Knotenpotentialverfahren:



Die reale Spannungsquelle U_1, R_1 wurde in eine reale Stromquelle gewandelt:

$$I_1 = U_1/R_1 = 2\ \text{V} / 2\ \text{A} = 1\ \text{A}.$$

Das Gleichungssystem: $$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ -I_1 \\ I_s \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Werte

:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Die Ergebnisse: $U_1 = 5{,}2$ V, $U_2 = 2{,}8$ V und $U_3 = 13{,}2$ V.

Teil b: Stromquelle ist spannungsgesteuert: $I_s = S \cdot U_s$ mit $S = 2\mathrm{A/V}$ und $U_S = U_2$.

Die Lösung erfolgt unter Anwendung des Knotenpotentialverfahrens. Im Stromvektor wird I_s durch SU_3 ersetzt ($S = \Delta I/\Delta U$ ist die Steilheit):

Das neue Gleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ -I_1 \\ S \cdot U_2 \end{pmatrix}$$

Übertragen von SU_2 auf die linke Seite führt zu dem Gleichungssystem

Das Gleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & -S & \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ -I_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

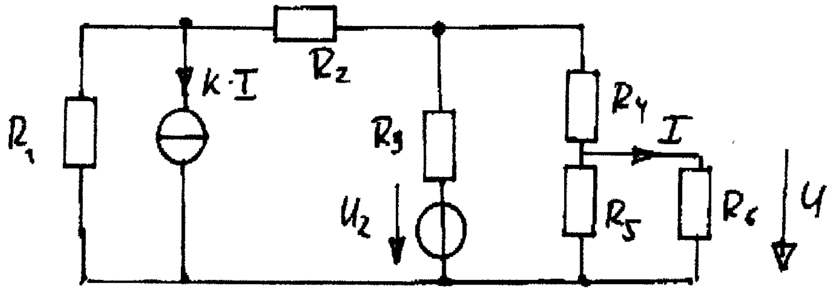
Einsetzen der Werte

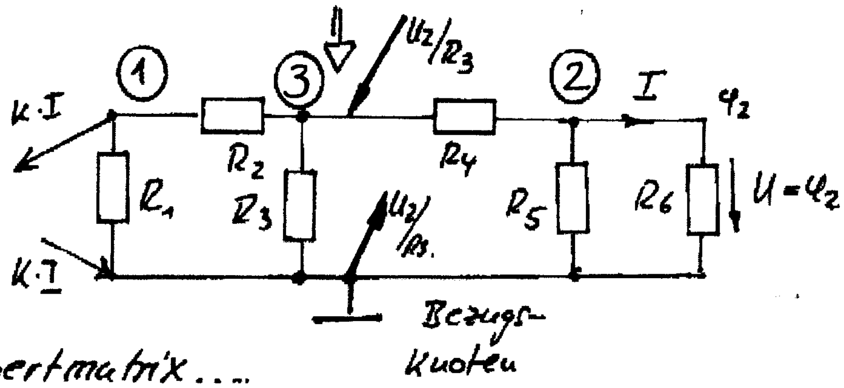
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Die Ergebnisse: $U_1 = 2$ V, $U_2 = 0{,}667$ V und $U_3 = 4{,}667$ V

10. Aufgabe - gesteuerte Stromquelle

a)





Die Leitwertmatrix ....

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \cdot I \\ 0 \\ U_2/R_3 \end{pmatrix}$$

Aufheben der gesteuerten Stromquelle $k \cdot I$:

Der Strom berechnet sich zu $I = \varphi_2/R_6$.

Einsetzen in die erste Zeile des Gleichungssystems:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 - \frac{1}{R_2} \cdot \varphi_3 = -k \cdot I = -k \cdot \frac{\varphi_2}{R_6} \quad \Big| + \frac{k}{R_6} \cdot \varphi_2$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\varphi_1 + \frac{k}{R_6} \cdot \varphi_2 - \frac{1}{R_2}\varphi_3 = 0$$

Damit folgt das neue Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & +\frac{k}{R_6} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2/R_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Werte liefert:

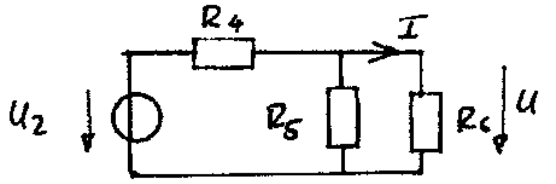
$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & -0,1 \\ 0 & 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A$$

Zur Bestimmung des Stromes muß das Potential φ_2 bekannt sein. Dies wird mittels der Cramerschen Regel berechnet:

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,2 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 1 & 0,3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,2 & 0,25 & -0,1 \\ 0 & 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \cdot (-0,1) \cdot 0,2 \quad V}{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,25(-0,1)(-0,1) - (-0,1)(-0,1)(0,2) - (-0,1)(-0,1)0,2} = \frac{0,02}{0,0105} V$$

$$\underline{\underline{U = \varphi_2 = 1,905 V}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{I}} = \frac{\varphi_2}{R_6} = \frac{1,905 V}{20\,\Omega} = \underline{\underline{0,095 A}}$$

b)



c)

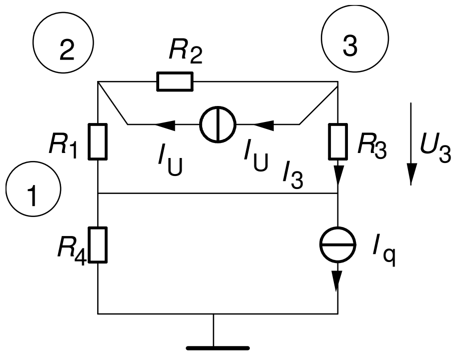
$$R_6 = 0 \rightarrow U = I \cdot R_6 = 0$$

$$I = U_2 / R_4 = 10 V / 10\,\Omega = 1 A$$

$$R_6 \rightarrow \infty \qquad I = 0$$

$$U = \frac{R_5}{R_4 + R_5} \cdot U_2 = \frac{20}{10+20} \cdot 10 V = 6,67 V$$

11. Aufgabe - stromgesteuerte Stromquelle



Ersatzstrom für die Spannungsquelle: $I_U = U/R_2 = 10\ \text{V} / 1\ \text{k}\Omega = 10\ \text{mA}$

Das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_q \\ I_U \\ -I_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 I_3 \\ I_U \\ -I_U \end{pmatrix}$$

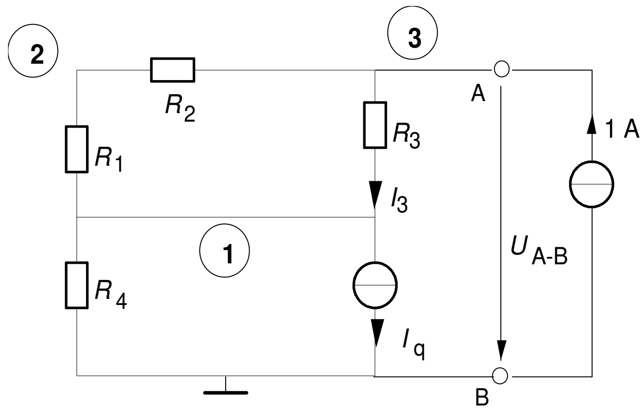
$$\begin{pmatrix} 5{,}17 & -0{,}67 & -2 \\ -0{,}67 & 1{,}67 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\frac{\varphi_3-\varphi_1}{0{,}5\,\text{k}\Omega} \\ 10\,\text{mA} \\ -10\,\text{mA} \end{pmatrix} \cdot 1\,\text{k}\Omega = \begin{pmatrix} 20\varphi_1 - 20\varphi_3 \\ 10\,\text{V} \\ -10\,\text{V} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5{,}17-20 & -0{,}67 & -2+20 \\ -0{,}67 & 1{,}67 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10\,\text{V} \\ -10\,\text{V} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -14{,}83 & -0{,}67 & 18 \\ -0{,}67 & 1{,}67 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10\,\text{V} \\ -10\,\text{V} \end{pmatrix}$$

Die Lösungen lauten: $\varphi_1 = 13{,}37$ V, $\varphi_2 = 18{,}4$ V und $\varphi_3 = 11{,}7$ V

Um den Eingangswiderstand zu bestimmen, muß nur die Spannungsquelle passiv gemacht werden, also die Spannung auf null Volt gesetzt werden. Die gesteuerte Stromquelle darf nicht passiv gemacht werden, da dann die Auswirkung der Steuerung nicht mehr vorhanden ist. Wird nun an die Klemmen A-B eine Stromquelle mit dem Strom von 1 Ampere angeschaltet, tritt zwischen den beiden Klemmen A-B die Spannung $U_{\text{A-B}}$ auf. Diese Spannung geteilt durch den Strom von 1 A ergibt den gesuchten Eingangswiderstand R_{einAB}.



Das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_q \\ 0 \\ 1\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 I_3 \\ 0 \\ 1\,\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

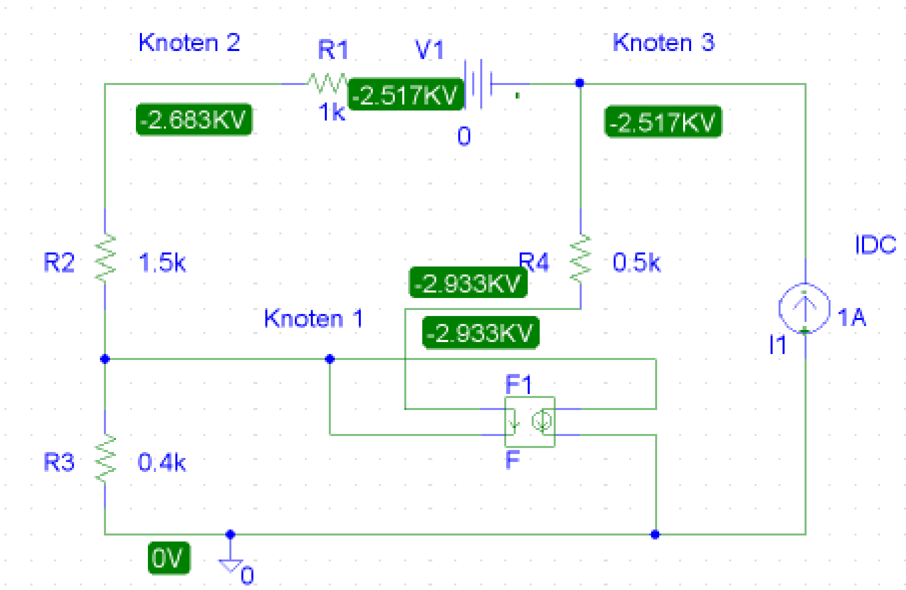
$$\begin{pmatrix} -14,83 & -0,67 & 18 \\ -0,67 & 1,67 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,\mathrm{A} \end{pmatrix} \cdot 1000\,\mathrm{k}\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,\mathrm{kV} \end{pmatrix}$$

Die Berechnung ergibt:

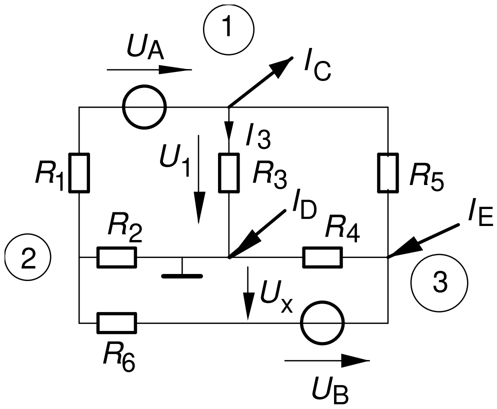
$\varphi_1 = -2{,}9$ kV, $\varphi_2 = -2{,}68$ kV; $\varphi_3 = -2{,}515$ kV

Der Eingangswiderstand ist dann: $R_{\mathrm{einA\text{-}B}} = -2515\ \mathrm{V} / 1\ \mathrm{A} = -2515\ \Omega$.

PSpice-Simulation:



12. Aufgabe - gesteuerte Spannungsquelle



$R_1 = R_3 = R_5 = 2\,\Omega$

$R_2 = R_4 = R_6 = 1\,\Omega$

$U_A = 7V;\quad U_B = 0{,}5 \cdot R_3 \cdot I_3 = 0{,}5 \cdot R_3 \dfrac{U_1}{R_3} = 0{,}5 U_1$

$I_C = 10\,A;\ I_D = 6A$

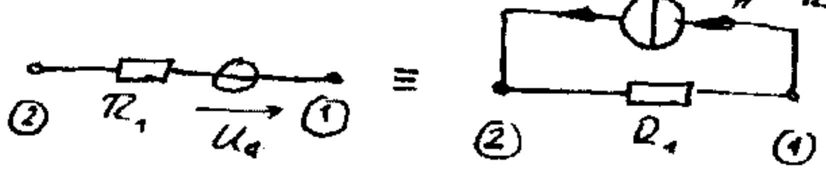
a) Da Summe aller Ströme gleich Null sein muß, ist $-I_C + I_D + I_E = 0$

oder $I_E = I_C - I_D = 10A - 6A = 4A$.

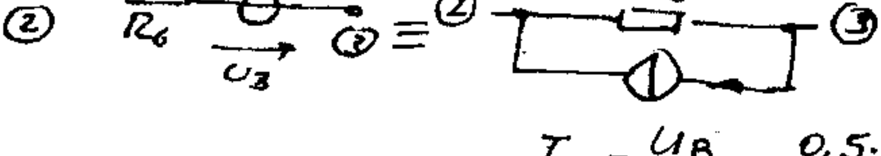
b) Die Spannungsquellen müssen zunächst in Stromquelle umgewandelt werden:

Quelle U_a zwischen ① und ②

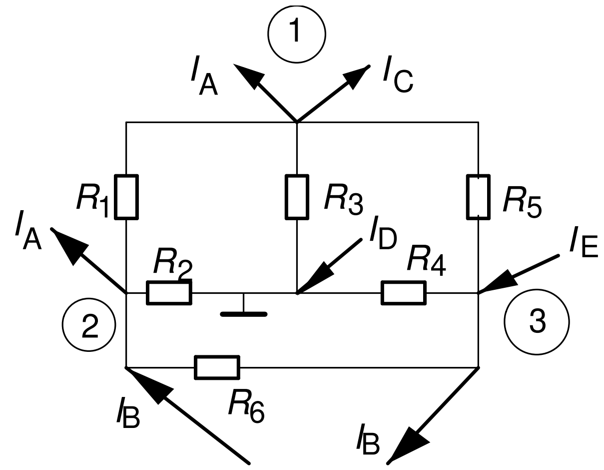
$I_A = \dfrac{U_a}{R_a} = \dfrac{7V}{2\Omega} = 3{,}5A$



Quelle U_B zwischen ② und ③



$I_B = \dfrac{U_B}{R_6} = \dfrac{0{,}5 \cdot U_1}{R_6} = \dfrac{0{,}5}{1\Omega} \cdot U_1$



Gleichungssystem; Knoten 4 ist Bezugsknoten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_A-I_C \\ I_A+I_B \\ I_E-I_B \end{pmatrix}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \\ -0,5 & -1 & 2,5 \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5A-10A \\ 3,5A+\frac{0,5}{\Omega}\cdot U_1 \\ 4A-\frac{0,5}{\Omega}\cdot U_1 \end{pmatrix}$$

Umstellen liefert:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5-0,5 & 2,5 & -1 \\ -0,5+0,5 & -1 & 2,5 \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13,5 \\ 3,5 \\ 4 \end{pmatrix} A$$

$$\begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & -0,5 \\ -1 & 2,5 & -1 \\ 0 & -1 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{U} = \vec{I} \quad \text{ergibt} \quad \begin{aligned} U_1 &= -9,428\,V \\ U_2 &= -2,0614\,V \\ U_3 &= 0,7755\,V \end{aligned}$$

d) $U_x = -U_3 - U_y = -U_3 - 0,5 \cdot U_1 = -0,7755V - (0,5 \cdot (-9,428V))$

$\underline{\underline{U_x = 3,94\,V}}$