

Elektrisches Feld

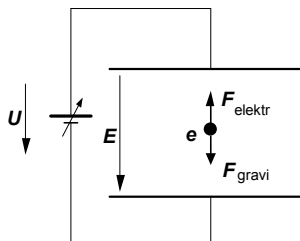
Übungen

Übung 1 - Elektrische Ladungen

1. Aufgabe

Bestimmung der Elementarladung

Ende des 19. Jahrh. entdeckten der engl. Physiker Joseph. J. Thomson und der deutsche Physiker Philipp Lenard ein kleines, elektrisch geladenes Teilchen, das sie Elektron nannten. Eine der wichtigsten Aufgaben, die aus dieser Entdeckung hervorgingen, war die Bestimmung der elektrischen Ladung dieses Teilchens. Dies wurde 1909 von R. A. Millikan auf folgendem Weg gelöst: Millikan erzeugte kleine, elektrisch geladene Öltröpfchen, die unter dem Einfluß des Schwerfeldes der Erde senkrecht nach unten fallen. Da sie sich dabei durch die Erdatmosphäre bewegen, entsteht an ihnen eine Reibungskraft, die dazu führt, daß ihre Fallgeschwindigkeit konstant ist. Durch die Reibung weisen die Öltröpfchen stets eine kleine positive oder negative Ladung auf, sie können aber auch durch Bestrahlung mit ultraviolettem Licht oder Röntgenstrahlung geladen werden.



Durchlaufen die Elektronen bei ihrem Weg ein elektrisches Feld, so wirkt eine Kraft auf sie. Millikan ging nun hin und beobachtete den Fall der Öltröpfchen. Gelangten diese in den Be-

reich des elektrischen Feldes, hat er die Stärke des Feldes so geändert, daß die Teilchen im Schwebezustand gehalten wurden. Aus dem Tröpfchendurchmesser oder der Sinkgeschwindigkeit konnte er die Masse des Tröpfchens ermitteln und unter Beachtung der Gravitationskonstanten das Gewicht der Tröpfchen ermitteln. Im Schwebezustand mußte das Tröpfchengewicht in Übereinstimmung mit der Kraft sein, die auf das Tröpfchen ausgeübt wurde. Mit der Beziehung $\underline{F} = Q \cdot E$ konnte er anschließend die elektrische Ladung der Tröpfchens bestimmen. Siehe Versuchsskizze.

Gehen wir davon aus, daß folgende Ladungen bestimmt wurden:

$6,54 \cdot 10^{-19}$ As; $13,13 \cdot 10^{-19}$ As; $19,71 \cdot 10^{-19}$ As; $8,20 \cdot 10^{-19}$ As; $16,48 \cdot 10^{-19}$ As; $22,89 \cdot 10^{-19}$ As; $11,50 \cdot 10^{-19}$ As; $18,08 \cdot 10^{-19}$ As; $26,13 \cdot 10^{-19}$ As

Auf welchen Wert kann aus dieser Tabelle die Elementarladung bestimmt werden?

2. Aufgabe

In Metallen bewirken freie Ladungen, also Elektronen, die Leitfähigkeit. Wie groß ist ihre Anzahl in einem Kubikzentimeter Kupfer? Welche freie Ladungsdichte ρ ist das?

Es kann davon ausgegangen werden, daß je Atom ein freies Elektron existiert. Das Atomgewicht des Kupfers beträgt $63,9$ g/mol und die Avogadro-Konstante oder Loschmidtsche-Zahl $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome/mol. Das spezifische Gewicht von Kupfer beträgt $\rho = 8,9$ g/cm³.

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Linienladungsträger von 30 cm Länge.

- a) Die Linienladungsdichte $\lambda = 1$ $\mu\text{C}/\text{m}$ ist homogen über den Ladungsträger verteilt. Wie groß ist die Gesamtladung Q .
- b) Die Linienladungen sind stückweise homogen über den Linienladungsträger verteilt. Es ist:

$$\lambda_1 = 0,2 \mu\text{C}/\text{m} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 5 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = 0,1 \mu\text{C}/\text{m} \quad \text{für } 5 \text{ cm} < x \leq 15 \text{ cm}$$

$$\lambda_3 = 0,3 \mu\text{C}/\text{m} \quad \text{für } 15 \text{ cm} < x \leq 25 \text{ cm}$$

$$\lambda_4 = 0,05 \mu\text{C}/\text{m} \quad \text{für } 25 \text{ cm} < x \leq 30 \text{ cm}$$

Tragen Sie die Linienladungsdichte über der Länge auf und berechnen Sie die Gesamtladung. Wie groß wäre die Linienladungsdichte, wenn die Gesamtladung aus homogen verteilt wäre?

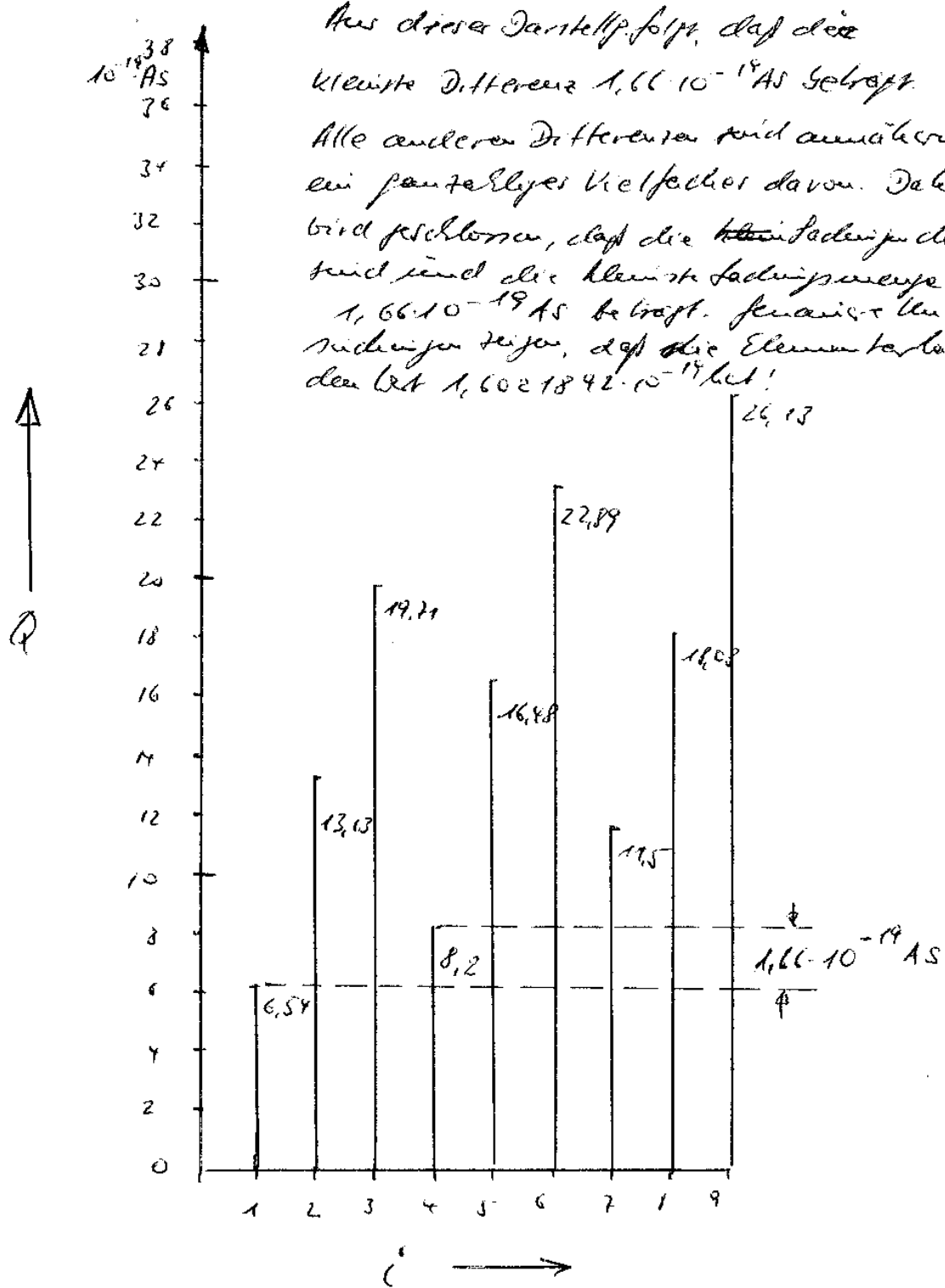
- c) Die Linienladungsdichte ist nun eine Funktion der Länge:

$$\lambda(x) = 3 \mu\text{C}/\text{m} \cdot (x/\text{m})^2 \quad \text{mit } 0 \text{ m} \leq x \leq 0,3 \text{ m}$$

Der Verlauf der Ladungsdichte ist zu zeichnen, die Ladungen als Funktion von x ist zu berechnen und zu zeichnen und die Gesamtladung Q anzugeben.

Lösungen

1. Aufgabe



Aus dieser Darstellung folgt, dass die kleinste Differenz $1,66 \cdot 10^{-19} \text{As}$ beträgt. Alle anderen Differenzen sind annähernd ein ganzzahliges Vielfaches davon. Daher wird geschlossen, dass die kleinsten Ladungseinheiten sind, sind die kleinsten Ladungseinheiten $1,66 \cdot 10^{-19} \text{As}$ beträgt. Folgende Unterschiede zeigen, dass die Elementarladung den Wert $1,6021842 \cdot 10^{-19} \text{C}$ hat!

2. Aufgabe

Es gilt $\rho = n \cdot e$

Die Anzahl n berechnet sich aus der Zahl der Atome. Es gilt das Gesetz:

$$\frac{n}{L} = \frac{m}{M}$$

n = gesuchte Anzahl der Atome oder Moleküle

$L = 6,02 \cdot 10^{23}$ Atome oder Moleküle je Mol

m = die Masse des untersuchten Stoffes

M = Atomgewicht des untersuchten Stoffes.

$$\Rightarrow n = \frac{m}{M} \cdot L = \frac{V \cdot \rho}{M} \cdot L = \frac{8,9 \text{ g/cm}^3}{63,9 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{\text{Atome}}{\text{mol}}$$

$$n = 8,43 \cdot 10^{22} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$$

Je Atom ist ein Elektron nicht gebunden, daher befinden sich $8,43 \cdot 10^{22}$ Elektronen/cm³ im Kupfer.

Die freie Ladung, d.h. nicht an Ort gebundene Ladung beträgt in jedem Kubikzentimeter:

$$\rho = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 8,43 \cdot 10^{22} \frac{\text{As}}{\text{cm}^3}$$

$$\underline{\underline{\rho = 13,5 \cdot 10^3 \text{ As/cm}^3}}$$

3. Aufgabe

a) Die Gesamtladung ist die Summe aller Teilladungen: $Q = \sum_i Q_i$. Q_i sind die im betrachteten Bereich befindlichen Teilladungen. Ist die Linienladung gleichmäßig über den Linienladungsträger verteilt, gilt

$$Q = \lambda l = 1 \mu\text{C/m} \cdot 0,3 \text{ m} = 0,3 \mu\text{C}.$$

b) In diesem Beispiel ist die Linienladung stückweise gleichmäßig verteilt. Innerhalb des Bereiches i der Länge Δx_i , in dem die Ladungsdichte λ_i konstant ist, erhält man als Teilladung

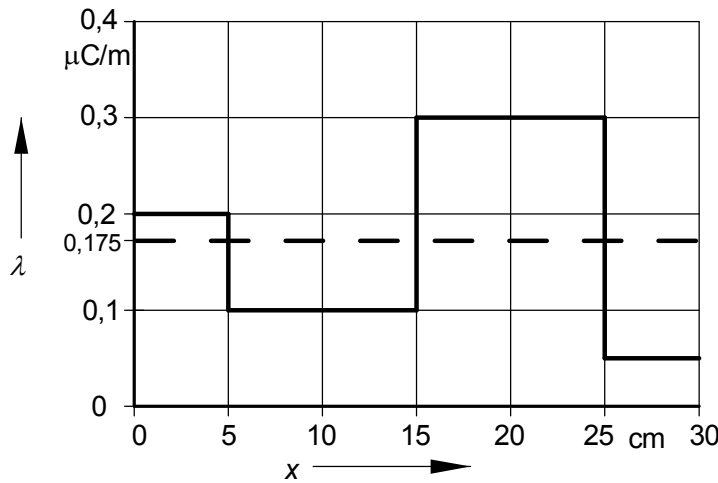
$$Q_i = \lambda_i \cdot \Delta x_i.$$

Die Gesamtladung ist dann

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \lambda_i \cdot \Delta x_i = \lambda_1 \cdot \Delta x_1 + \lambda_2 \cdot \Delta x_2 + \lambda_3 \cdot \Delta x_3 + \lambda_4 \cdot \Delta x_4$$

$$Q = 0,2 \mu\text{C/m} \cdot 0,05 \text{ m} + 0,1 \mu\text{C/m} \cdot 0,1 \text{ m} + 0,3 \mu\text{C/m} \cdot 0,1 \text{ m} + 0,05 \mu\text{C/m} \cdot 0,05 \text{ m}$$

$$Q = 0,01 \mu\text{C} + 0,01 \mu\text{C} + 0,03 \mu\text{C} + 0,0025 \mu\text{C} = 0,0525 \mu\text{C}$$



Wäre die Gesamtladung auf der Strecke $x = 0,3 \text{ m}$ gleichmäßig verteilt, ergibt das die Ladungsdichte $\lambda = 0,175 \mu\text{C/m}$

c) Die Linienladungsdichte ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\lambda(x) = 3 \mu\text{C/m} (x/\text{m})^2$$

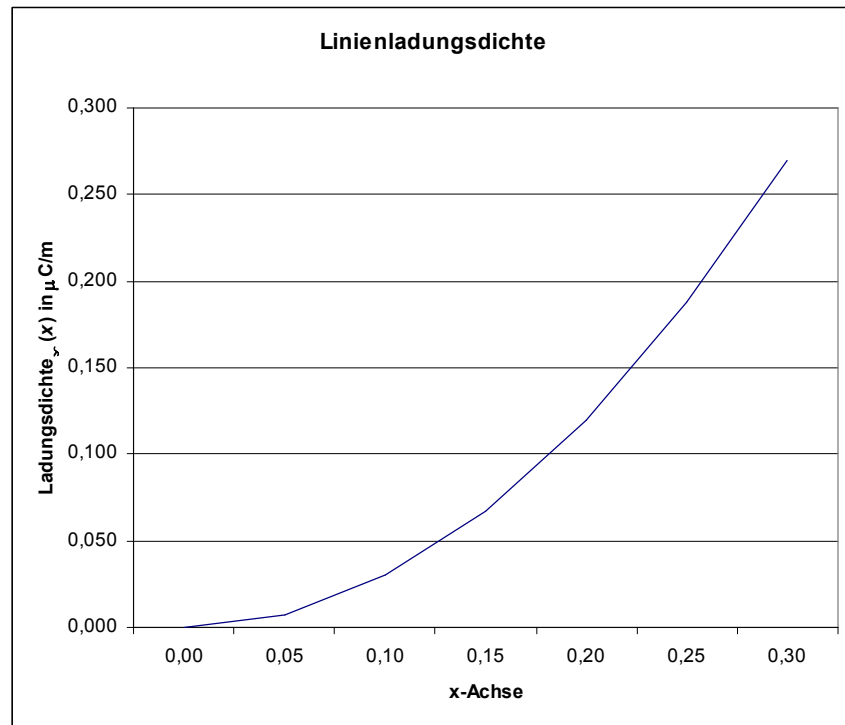
Die Funktion ist im Bereich $0 \text{ m} \leq x \leq 0,3 \text{ m}$ zu zeichnen.

Es handelt sich um eine Parabelfunktion.

Lösen der Aufgabe mit Excel

Dies ist die Wertetabelle:

x / m	$\lambda(x)$
0	0,00
0,05	0,008
0,1	0,030
0,15	0,068
0,20	0,120
0,25	0,188
0,30	0,270



Graph erzeugt mit Excel

Die Ladung ist annähernd die Teilsummen der Ladungsdichte mit Δx multipliziert längs der x-Achse.

$$Q \approx \sum_i Q_i \approx \sum_i \lambda(x) \cdot \Delta x$$

Läßt man Δx gegen dx gehen, folgt als richtige Lösung das Integral:

$$Q = \int 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^2 \cdot dx = \int 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3} \cdot x^2 \cdot dx = 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3} \cdot \int x^2 \cdot dx = 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3} \cdot \frac{x^3}{3} + c = 1 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3} \cdot x^3 + c = 1 \mu\text{C} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^3 + c$$

Der Stab beginnt bei $x = 0$, dort existiert noch keine Ladung, daher ist für $x = 0$ auch $Q = 0$. Aus dieser Bedingung wird die Integrationskonstante c bestimmt. Aus der Lösung

$$Q = 1 \mu\text{C} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^3 + c$$

folgt zu Bestimmung von c :

$$0 = 1 \mu\text{C} \left(\frac{0}{\text{m}}\right)^3 + c$$

Diese Gleichung ist für $c = 0$ erfüllt. Also gilt:

$$Q = 1 \mu\text{C} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^3$$

Ist der Stab 30 cm lang, trägt er die Gesamtladung

$$Q = 1 \mu\text{C} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^3 = 1 \mu\text{C} \left(\frac{0,3 \text{ m}}{\text{m}}\right)^3 = 0,027 \mu\text{C}.$$

Übung 2 - Kraft in elektrischen Feldern, Feldskizzen

Wichtige Konstanten

Masse des Protons: $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$,

Masse des Neutrons: $m_N = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Masse des Elektrons: $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$,

Elementarladung: $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,

Elektrische Feldkonstante: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}$

Gravitationsgesetz: $F = Gm_1m_2/r_2$

Gravitationskonstante: $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

1. Aufgabe

In einem Eisenatom haben zwei Protonen einen Abstand von $4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Wie groß ist bei Vernachlässigung des Elektronengases die abstoßende Kraft zwischen ihnen?

2. Aufgabe

In Wasserstoffatomen beträgt die Entfernung zwischen Elektronen und Protonen ungefähr $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Wie groß sind die Beträge der elektrischen Kraft und der Gravitationskraft zwischen ihnen?

3. Aufgabe

Zwei positiv geladene Kugeln mit den Ladungen $Q_1 = q$ und $Q_2 = 4q$ haben zueinander den Abstand 1 mm . Wo und mit welcher Stärke im Verhältnis zur Ladung Q muss eine dritte Ladung platziert werden, damit das System im Gleichgewicht ist?

4. Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem befinden sich drei Punktladungen, eine davon im Ursprung. Wie groß und welche Richtung hat die Kraft auf die Punktladung im Ursprung, wenn alle drei Punktladungen die Elektrizitätsmenge von 1 nC tragen? Die Koordinaten der Punktladungen sind:

$$Q_1: (0, 0, 0); Q_2: (1 \text{ cm}, 0, 0); Q_3: (0, 1 \text{ cm}, 0).$$

Das Dielektrikum zwischen den Punktladungen ist aus Luft.

5. Aufgabe

In einem elektrischen Feld zwischen zwei planparallelen, quadratischen Platten, deren Länge viel größer als der Abstand der Platten zueinander ist, wird eine Maxwellsche Doppelplatte mit einer Fläche von einem Quadratcentimeter eingebracht. Die Platten tragen auf ihren zueinander zugewandten Flächen eine gleichmäßig verteilte Ladung von 100 pC . Die linke Platte ist positiv, die rechte negativ geladen. Die Plattenfläche beträgt 1 m^2 . Welche Ladung weist jede der beiden Doppelplatten auf, wenn sie im Feldraum zunächst parallel zu den Platten eingestellt werden und anschließend voneinander getrennt werden?

6. Aufgabe

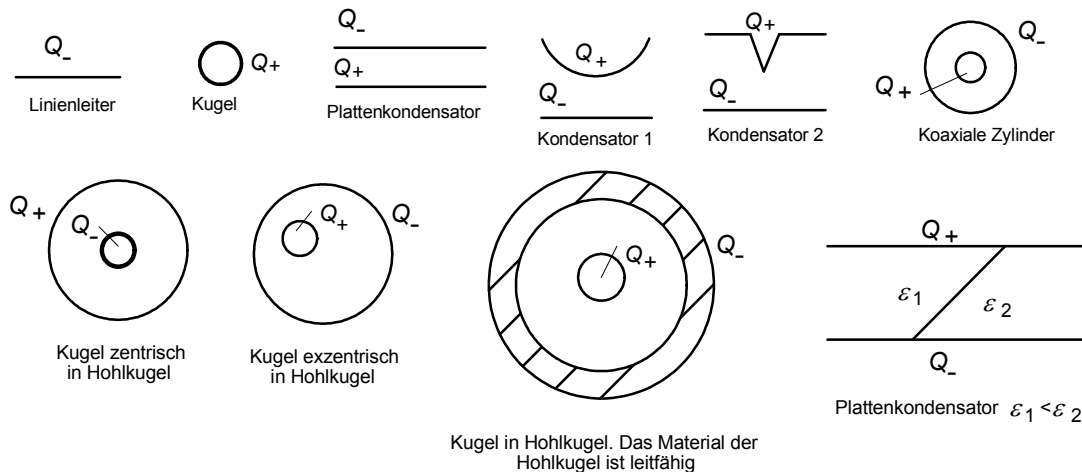
Es gab früher die Auffassung (Thomson-Atommodell), daß die Ladung im Atomkern in Form einer Raumladung vorliegt, die gleichmäßig eine Kugel vom Radius 10^{-10} m füllt. Wie groß

wäre dann die Feldstärke an der Oberfläche eines Goldatoms, wenn die Anzahl der Protonen 79 beträgt?

Beim Rutherford-Atommodell ist die Ladung in einem Kern konzentriert, der bei einem Goldatom einen Radius von ungefähr $6,9 \cdot 10^{-15}$ m aufweist. Wie groß ist in diesem Fall die elektrische Feldstärke an der Kernoberfläche? (In beiden Fällen ist der Einfluß der Elektronen zu vernachlässigen.)

7. Aufgabe

Für die im Bild dargestellten Fälle sind die E-Feldlinien und die Äquipotentiallinien zu skizzieren.



8. Aufgabe

In einer positiv geladenen metallenen Hohlkugel mit sehr dünner Schale befindet sich ein kleines, rundes Loch. Das Feldlinienbild in der Umgebung des Loches ist zu skizzieren.

9. Aufgabe

Die Erde kann näherungsweise als Kugel mit einem Radius von ca. 6375 km angesehen werden. Wenn auf der gesamten Erdoberfläche die Feldstärke gleichmäßig -200 V/m beträgt, welche Ladung trägt dann die Erde. Wie groß ist das Feld im Innern der Erde?

Welche Spannung tritt näherungsweise zwischen einem Punkt in der Höhe $h = 10$ m oberhalb der Erde und Erdoberfläche auf? Handelt es sich dann zwischen diesem Punkt und der Erde um einen Spannungsgenerator?

LÖSUNGEN

1. Aufgabe

Übung - Feldgrößen und Eigenschaften d. E-Feldes

1. Aufgabe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}} \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} As)^2}{(4 \cdot 10^{-15} m)^2} = \underline{\underline{14,423 N}}$$

2. Aufgabe

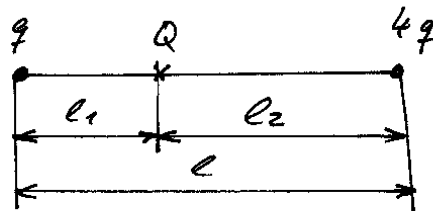
elektr. Kraft: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(5,3 \cdot 10^{-11} m)^2} = \underline{\underline{8,2 \cdot 10^{-8} N}}$

Gravitationskr. $F = G \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27} kg \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} kg}{(5,3 \cdot 10^{-11} m)^2}$

$$F = \underline{\underline{3,63 \cdot 10^{-47} N}}$$

Gravitationskräfte sind viel kleiner als elektr. Kräfte!

3. Aufgabe



Die beiden Ladungen q und $4q$ üben aufeinander die Kraft $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q^2}{l^2}$ aus.

Durch Hinzufügen der Ladung Q sollen keine Kräfte mehr auftreten. Daraus ist die Summe aller Kräfte auf die Ladung q null und die Summe aller Kräfte auf die Ladung $4q$ ist null.

Dann können zwei Gleichungen aufgestellt werden: linke Seite und rechte Seite

$$K \cdot \frac{4q^2}{e^2} + K \cdot \frac{q \cdot Q}{e_1^2} = 0 \quad K \cdot \frac{4q^2}{e^2} + K \cdot \frac{4q \cdot Q}{e_2^2} = 0$$

aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{4q}{e^2} = - \frac{Q}{e_1^2}$$

$$\frac{q}{e^2} = - \frac{Q}{e_2^2}$$

mit $e_1 = l - l_2$ folgt

$$\frac{4q}{e^2} = - \frac{Q}{(l - l_2)^2}$$

$\frac{q}{e^2}$ wird aus dieser Gleichung eingesetzt

$$\frac{q}{e^2} = - \frac{Q}{4(l - l_2)^2} \quad \text{bzw.} \quad - \frac{Q}{e_2^2} = - \frac{Q}{4(l - l_2)^2}$$

.....
eingesetzt

$$\text{lösen nach} \quad - \frac{Q}{e_2^2} = - \frac{Q}{4(l - l_2)^2}$$

$$\sqrt{4(l - l_2)^2} = \sqrt{e_2^2}$$

$$2(l - l_2) = e_2$$

$$l_2 = \frac{2}{3}l$$

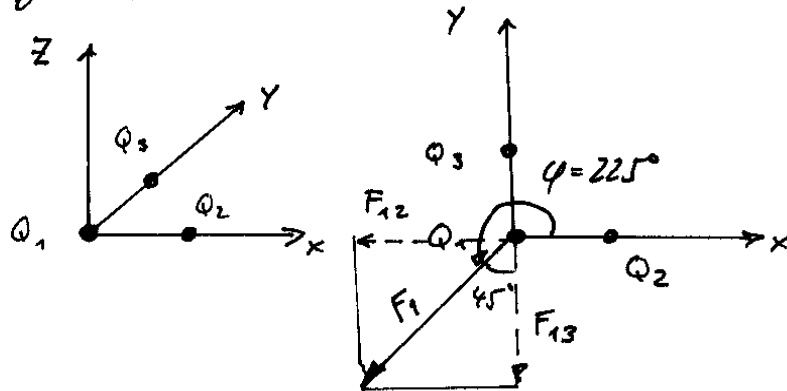
dann ist:

$$l_1 = \frac{1}{3}l$$

und

$$Q = - \frac{q}{e^2} \cdot l_2^2 = - \frac{q}{e^2} \left(\frac{2}{3}l\right)^2$$

$$Q = - \frac{4}{9} \cdot q$$

4. Aufgabe

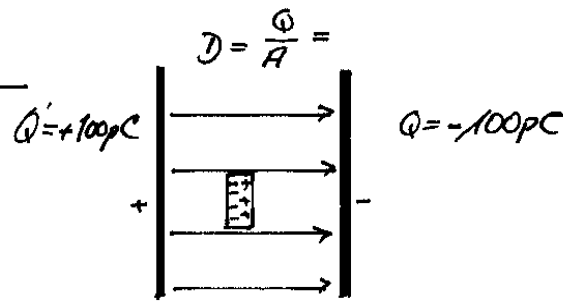
Da alle Gleichungen gleiches Vorzeichen haben, treten nur abstoßende Kräfte auf. Die Kraft auf Ladung 1 hervorgerufen durch Ladung 2 weist in negativer x-Richtung. Die Kraft auf Ladung 1 hervorgerufen durch Ladung 3 weist in negativer y-Richtung. Da die Ladungen gleich sind, sind auch die Beträge der Kräfte gleich. Die beiden Kräfte \vec{F}_{12} , \vec{F}_{13} überlagern sich und bilden die Kraft \vec{F}_1 , die auf Ladung Q_1 wirkt. Aus der Zeichnung ist sofort ersichtlich, daß die Kraft F_1 den Winkel $\varphi = 22,5^\circ$ aufweist. Betrag der Kräfte F_1 , F_2

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2^2}{r^2}$$

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(10^{-9} \text{ As})^2}{(0,01 \text{ m})^2} = 8,99 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

$$\text{Dann ist } F = \sqrt{2} \cdot F_{12} = \sqrt{2} \cdot 8,99 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

$$\underline{\underline{F = 12,71 \cdot 10^{-5} \text{ N}}}$$

5. Aufgabe

$$D = \frac{100 \text{ pC}}{1 \text{ m}^2} = \frac{100 \text{ pC}}{10000 \text{ cm}^2} = 0,1 \frac{\text{pC}}{\text{cm}^2}$$

Sind die Doppelplatte so in das Feld gebracht, daß die Plattenflächen senkrecht auf den Feldlinien stehen, induziert das Feld auf den Platten eine Flächenladung σ die dem Wert nach der Größe der D -Felder entspricht. Es gilt aufgrund der Grenzbedingungen:

$$D_{1, \text{vor}} + \sigma = D_{2, \text{vor}}$$

Da im Metall keine Normalkomponente des Feldes auftritt, ist dort $D_{2, \text{vor}} = 0$. Daraus ist

$$\underline{-D_{1, \text{vor}} = \sigma}$$

Auf der linken Plattenseite stellt sich die Flächenladungsdichte $\sigma_e = -0,1 \frac{\text{pC}}{\text{cm}^2}$ ein, auf der rechten Seite gilt $\sigma_r = 0,1 \frac{\text{pC}}{\text{cm}^2}$.

Werden die Platten getrennt und aus dem Feld genommen, trägt jede Platte die Ladung

$$\underline{\underline{Q = A_{Pl} \cdot \sigma = 0,1 \text{ pC.}}}$$

6. Aufgabe

a) Feldstärke an der Oberfläche der Kugel mit dem Radius 10^{-10} m :

Auswendung des Gaußschen Satzes:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

\vec{D} ist das Feld einer Kugel: Liegt die Kugel in einem homogenen Werkstoff, breitet sich das Feld von der Kugel gleichmäßig radial im Raum aus. In Kugelkoordinaten lautet das D -Feld dann $\vec{D}_{\text{Kugel}} = D \cdot \vec{e}_r$

Es hat nur eine Radialkomponente, die Feldstärke ist für einen beliebigen Radius auf der Hüllfläche konstant. Dann gilt

$$\oint D \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = Q$$

$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_r$ ist das Element aus einer Hüllfläche. Sein Vektor zeigt ebenfalls radial nach außen. Dann gilt wegen $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$

$$\oint D \cdot dA_k = D \int dA_k = D \cdot A_k = Q$$

Da die Oberfläche $A_k = 4\pi r^2$ ist, folgt

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Wegen $E = \frac{1}{\epsilon} D$ ist $E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

$$E = \frac{79 \cdot e}{4\pi \epsilon_0 (10^{-10} \text{ m})^2} = \frac{79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 10^{-20} \text{ m}^2} = 11,37 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 10^{12}$$

(Thomson-Atommodell)

Rutherford-Atommodell

$$E = \frac{79 \cdot e}{4\pi \epsilon_0 (6,9 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \frac{79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 6,9^2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2}$$

$$E = 24 \cdot 10^{\frac{30 \text{ V}}{\text{m}}}$$

7. Aufgabe

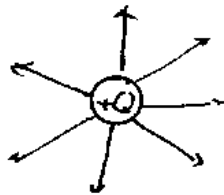
Linienleiter
(neg. geladen)



- Zylindergeometrie, nur eine Radialkomponente,
 φ - und z -Komponente existieren nicht

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r \quad (\vec{e}_r \text{ im Zylinderkoordinatensystem})$$

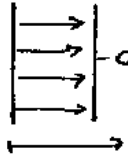
Kugel



Kugelsymmetrie, nur eine
Radialkomponente, θ - und
 φ -Komponente existieren nicht

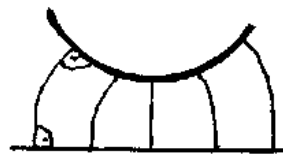
$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

(\vec{e}_r im Kugelkoordinatensystem)

- Plattenkondensator $+Q$  Feld nur innerhalb der
Platten, dort homogen
Außerhalb kein Feld.

keine y - und z -Komponenten: $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$

Kondensator 1



Feld inhomogen.
Feldlinien enden
auf den Ober-
flächen unter einem
Winkel von 90° !

Kondensator?

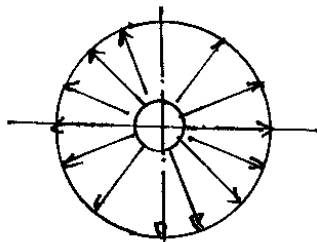


Feld an Spitze besonders hoch.

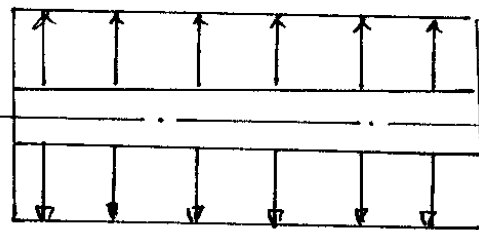
Bei idealer Spitze ist die Feldstärke unendlich!

Feld inhomogen, Feldlinien enden auf den Metallelektroden immer unter einem Winkel von 90°

Koaxiale Zylinder



Querschnitt



Längsschnitt

Kein Unterschied der Linien-dichte in dieser Darstellung!

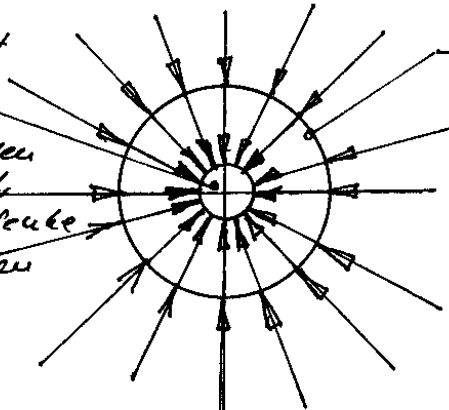
Homogenes Radialfeld in Zylindersymmetrie

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

Feld beginnt am Innenzylinder und endet am Außenzylinder.

Kugel zentrisch in Hohlkugel

Innere Kugel ist negativ geladen: Die Feldlinien enden an dieser Kugel, sie stellt die Senke der elektrischen Felder dar



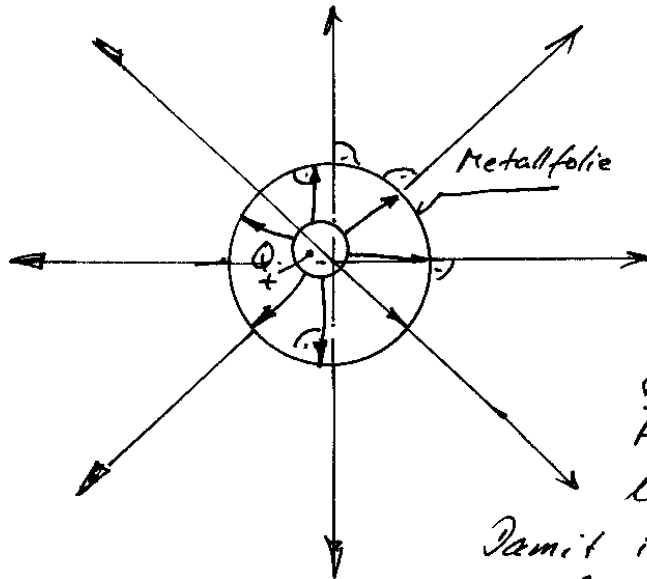
Die Hohlkugel liegt zentrisch um die innere Kugel, sie bildet daher eine Äquipotentialfläche, die Feldlinien von außen treten senkrecht durch diese Hohlkugel und enden an der inneren Kugel.

Die Schichtdicke der Hohlkugel ist unendlich dünn, das Material kann eine Leitfähigkeit haben oder nicht.

Kugel exzentrisch in Hohlkugel

9

Das Material der Hohlkugel sei leitend (Metall)

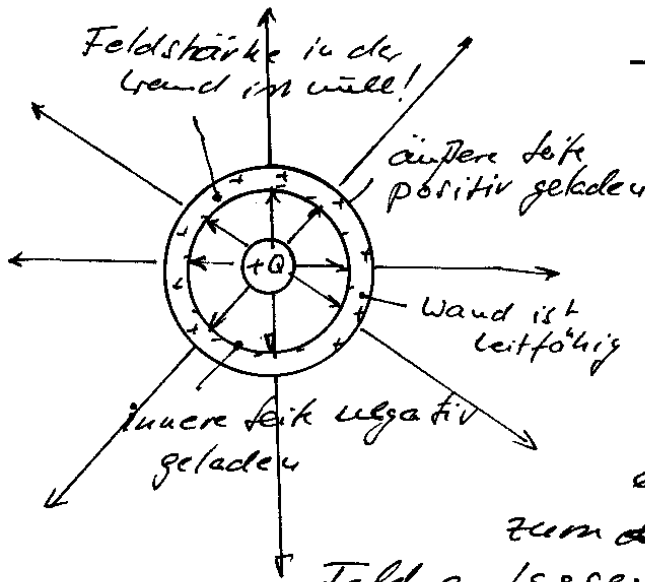


Die Metallfolie erzwingt, dass die Feldlinien im Inneren senkrecht auf ihrer enden sind im Äußeren senkrecht beginnen. Die Metallfolie erzwingt, dass eine Äquipotentiallinie vorliegt.

Damit ist das äußere Feld ein homogenes Radialfeld, das innere dagegen nicht. Hier stellt sich das Feld so ein, dass die Feldlinien auf der inneren Kugel senkrecht beginnen und auf der Hohlkugel senkrecht enden. Damit sind im Inneren zwangsläufig gebogene Feldlinien erforderlich, es liegt keine Feldsymmetrie vor.

Ist die Hohlkugel nichtleitend (das ϵ_r sei näherungsweise 1), dann breitet sich das Feld von der Ladung Q aus wenig gestört aus.

10

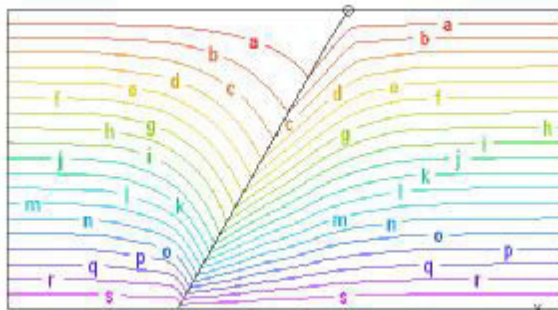


Kugel in Hohl-Kugel, Wand der Hohlkugel ist leitfähig

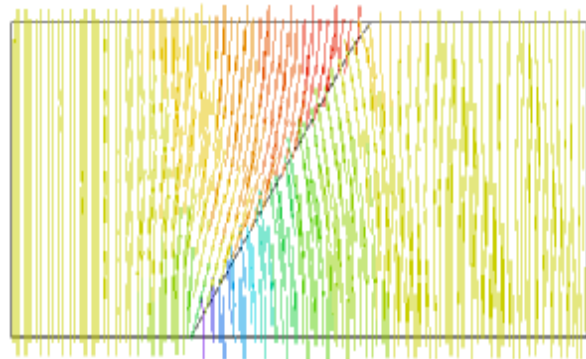
In der Wand entsteht durch Induktion eine Ladungstrennung. Das ~~ist~~ dadurch einstellende Feld ist zum ~~dem~~ verurteilenden Feld entgegengesetzt gerichtet und betragsmäßig gleich. Dadurch hebt sich das elektr. Feld im Inneren auf!

Durch die zentrale Lage der Kugel im Inneren ~~setzt~~ geht von ihr ein Radialfeld aus, das an der Hohlkugel endet. An der äußeren Seite setzt sich das Radialfeld fort.

Schräg geschnittenes Dielektrikum: ϵ_1 (links) ist größer als ϵ_2 (rechts):



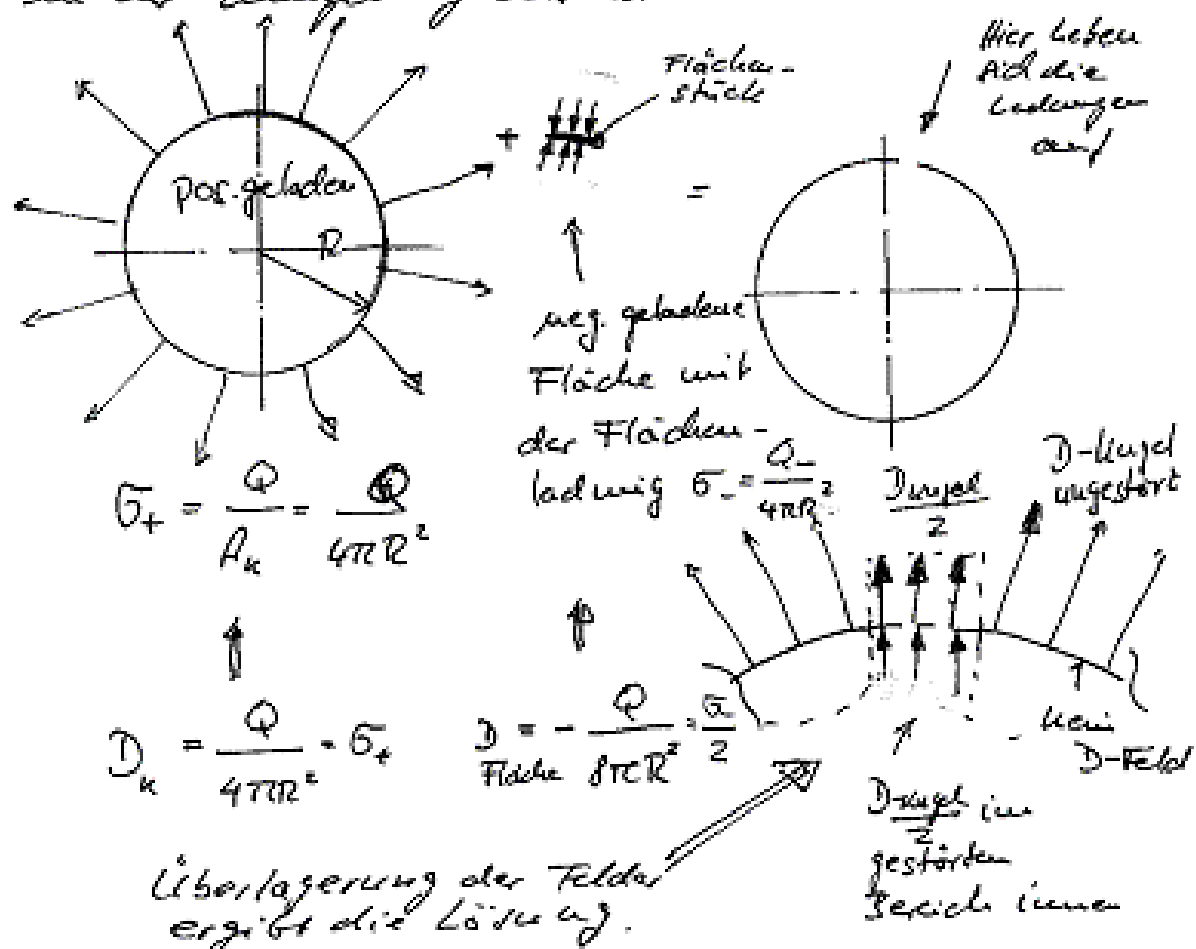
Äquipotentiallinien



Feldlinien

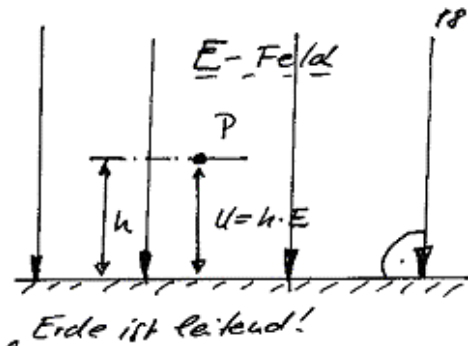
8. Aufgabe

Das Problem wird durch Feldüberlagerung gelöst: Eine positiv geladene Hohlkugel mit sehr dünner Schale kann man sich vorstellen als eine positiv geladene vollständige Hohlkugel, bei der eine kleine runde Stelle, nämlich das Loch, mit einer negativ geladenen Fläche bedeckt ist. Dann haben sich dort positive und negative Ladungen auf und es ist elektrisch gesehen, ein Loch entstanden. Mit dieser Überlegung kann man das Feldlinienbild in der Umgebung des kleinen Loches zeichnen:



9. Aufgabe

Da die Erde leitend ist, endet bis zu ca. 1...2 MHz die Feldlinien des Luftfeldes senkrecht auf der Erdoberfläche.



Natürlich auch das immer existierende Feld der Erde. Zu gewitterfreien Zeit beträgt die Feldstärke ca. 10 ... 100 ... 500 V/m. Bei Gewitter kann die Feldstärke auf ca. 5 ... 10 ... 20 kV/m ansteigen. In der gewitterfreien Zeit ist die Erdoberfläche negativ geladen, bei Gewitter ist sie oft positiv geladen.

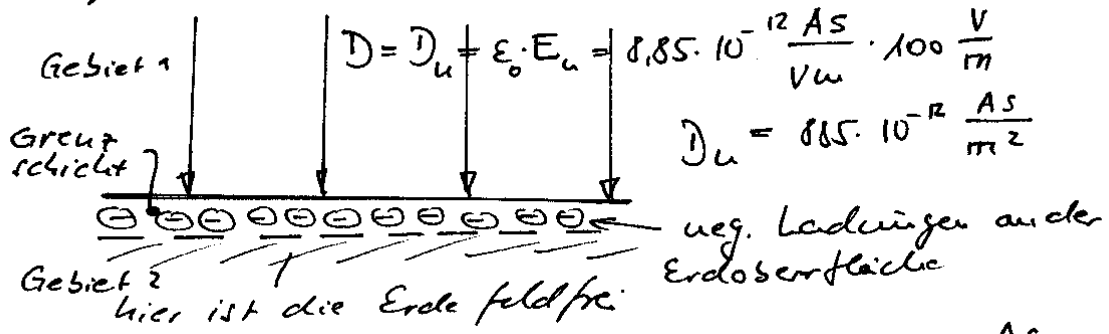
Die Spannung eines Punktes P in der Höhe h über dem Erdboden berechnet sich zu $U = E \cdot h$.

z.B. $h = 10 \text{ m}$; $E = 100 \text{ V/m} \Rightarrow U = 1 \text{ kV}$.

Allerdings ist dies nur eine Spannung. Zwischen den Punkten, es liegt keine Spannungsquelle vor!

Das Feld endet auf der Erdoberfläche, also ist die Erde negativ geladen. In der Erdoberfläche befinden sich die neg. geladenen Ionen, an denen das Feld endet.

Die Ladungsdichte berechnet sich folgendermaßen



Es gilt Gebiet 1 $D_{n1} = 885 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{m^2}$

Gebiet 2 $D_{n2} = 0$

Grenzschicht σ

Aus der Grenzbedingung

$$D_{n1} + \sigma = D_{n2}$$

folgt

$$\sigma = D_{n2} - D_{n1}$$

da $D_{n2} = 0$ ist, folgt

$$\underline{\underline{\sigma = -D_{n1} = -885 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{m^2}}}$$

Ladung der Erde

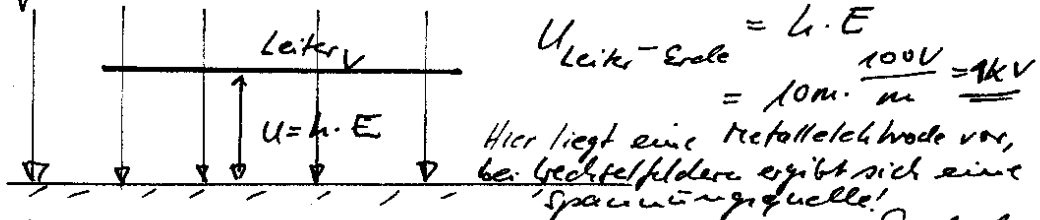
$$Q = \sigma \cdot A_{\text{Erde}} = \sigma \cdot 4 \cdot \pi R_{\text{Erde}}^2$$

$$Q = -885 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{m^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6,375 \cdot 10^6 \text{ m})^2$$

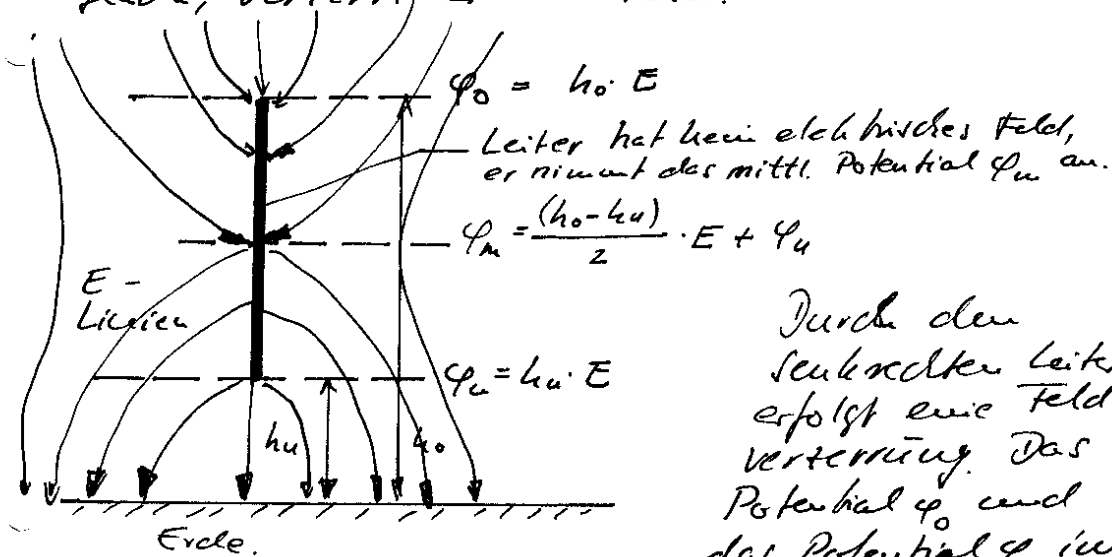
$$\underline{\underline{Q = 452 \cdot 10^3 AS}}$$

20

Liegt ein Leiter parallel zur Erdoberfläche, liegen ähnliche Feldverhältnisse wie für einen Punkt vor. Daher gilt



Liegt der Leiter senkrecht über der Erdoberfläche, verzerrt er das Feld:



Durch den senkrechten Leiter erfolgt eine Feldverzerrung. Das Potential ϕ_0 und das Potential ϕ_u im

Langstroifen Fall werden verändert in das Potential ϕ_m , das Potential, das im ungestörten Fall in d. Mitte von h_0 zu h_u auftreten würde.

Solche Leiter werden als Antennen betrachtet! In einem Wechselfeld stellen sie ~~span~~ Generatoren elektr. Energie dar.

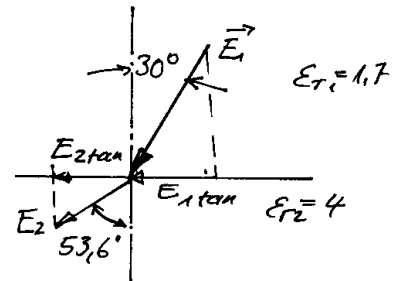
Ist $h_u \approx 0$, folgt als Antennenspannung

$$U_{\text{Ant}} \approx \frac{h}{2} \cdot E = \frac{2\text{m}}{2} \cdot 50\mu\text{V/m} = 50\mu\text{V}$$

Übung 3 - Brechung des Feldes und Feldberechnungen

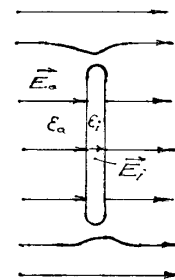
1. Aufgabe

Ein elektrisches Feld trifft unter dem Einfallswinkel von 30° auf eine Grenzfläche. Das Dielektrikum im Gebiet 1 habe die Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 1,7$. Das Gebiet 2 hinter der Grenzfläche habe eine Dielektrizitätszahl von $\epsilon_r = 4$. Wie groß ist dort der Betrag der Feldstärke E_2 wenn $E_1 = 5$ kV/mm ist. Wie groß ist der Austrittswinkel im Gebiet 2?



2. Aufgabe

In einem Dielektrikum liegt ein dünner Spalt quer zum elektrischen Feld. Die Stärke des Feldes beträgt $E_a = 1$ kV/mm, die Dielektrizitätszahl hat den Wert $\epsilon_r = 5$. Im Spalt befindet sich Luft. Wie groß ist die elektrische Feldstärke E_i in der Mitte des Spaltes? Wie wird das äußere Feld E_a in der Umgebung der Enden des Spaltes verändert?



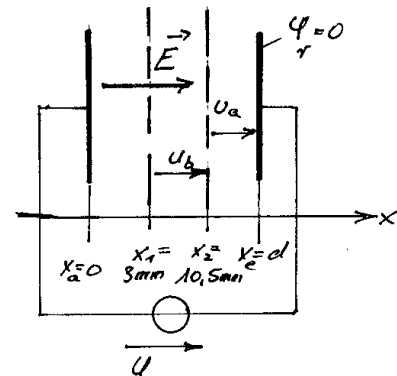
3. Aufgabe

An zwei parallel zueinander stehenden Platten liegt die Spannung 6 kV. Es sind die Spannungen zwischen Punkt 1 und der negativen Platte und zwischen Punkt 1 und Punkt 2 zu berechnen.

Abstand des Punktes 1 von der negativen Platte: 4,5 mm,

Abstand des Punktes 2 von der negativen Platte: 12 mm,

Abstand der beiden Platten 15 mm.



4. Aufgabe

a) In der Zeichnung ist eine Ebene mit vier Punktladungen dargestellt. Die Punktladungen haben folgende Werte: ($\epsilon_r = 1$):

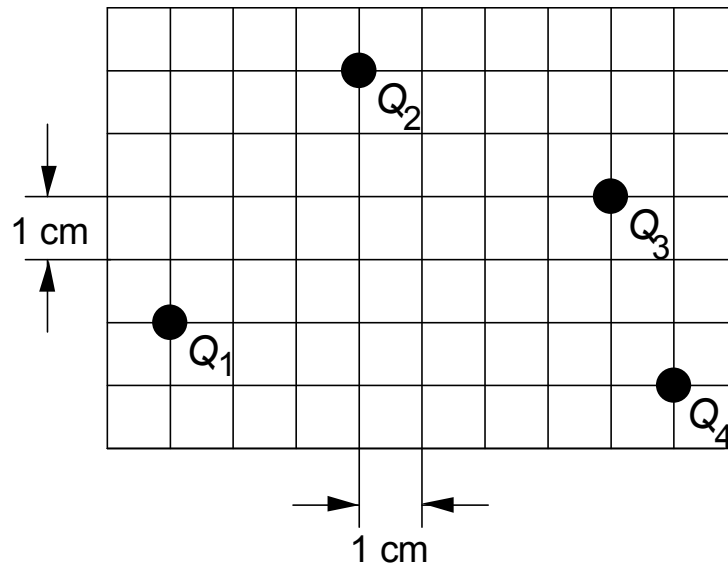
$$Q_1 = 3 \text{ nAs}, Q_2 = 1 \text{ nAs}, Q_3 = 1,5 \text{ nAs} \text{ und } Q_4 = -0,6 \text{ nAs}.$$

Wie groß ist der Betrag der Kraft in Newton nach Betrag und Richtung auf die Punktladung Q_3 ?. Der Vektor ist in das Bild einzuzeichnen.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die verschiedenen Feldstärken am Ort der Ladung Q_3 und daraus die Gesamtfeldstärke. Die Summe aller Feldstärke-Vektoren sollen zeichnerisch ermittelt werden. Maßstab: 3 cm entspricht 5000 V/cm.

Es gilt

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}.$$

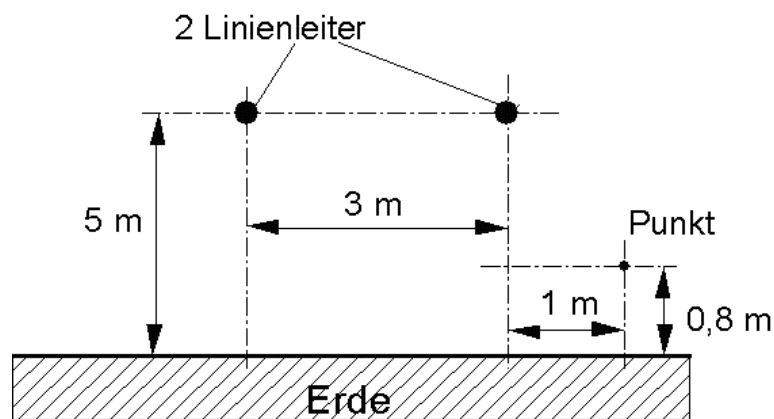


Die Lage der Punktladungen

5. Aufgabe

Zwei Linienleiter befinden sich in einer Höhe von 5 m oberhalb des leitenden Erdbodens. Sie verlaufen in einem Abstand von 3 m parallel zueinander. Der linke Linienleiter weist eine Linienladungsdichte von $\lambda_1 = -\lambda$ und der rechte eine Linienladungsdichte von $\lambda_2 = \lambda$. Die Linienladungsdichte hat die Größe $\lambda = -100 \text{ nAs/m}$

- Wie groß ist die Feldstärke im Punkt P(1m, 0,8m)? (Hinweis: Spiegelungsprinzip beachten!)
- Wenn dort eine Punktladung von $q = 200 \text{ nAs}$ wäre, wie groß ist dann die Kraft auf die Punktladung und welche Richtung hat die Kraft?



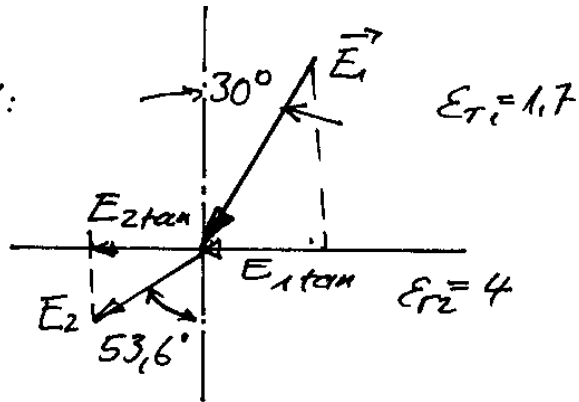
Lösungen

1. Aufgabe

Au der Grenzfläche gilt:

$$E_1 \tan \alpha_1 = E_2 \tan \alpha_2$$

$$\frac{E_1 \cos \alpha_1}{E_2 \cos \alpha_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$



oder $E_2 \cos \alpha_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot E_1 \cos \alpha_1$

Weiter gelten die Zusammenhänge

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \Rightarrow \tan \alpha_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \tan \alpha_1$$

und $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \Rightarrow E_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot E_1$

Mit $E_1 = 5 \text{ kV/mm}$ und $\alpha_1 = 30^\circ$ folgen

$$\tan \alpha_2 = \frac{4}{1.7} \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow \alpha_2 = \arctan \left(\frac{4}{1.7} \cdot 0,5777 \right)$$

$$\alpha_2 = \underline{\underline{53,6^\circ}}$$

$$E_2 = \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(53,6^\circ)} \cdot 5 \text{ kV/mm} = \underline{\underline{3,11 \text{ kV/mm}}}$$

2. Aufgabe

Dadurch, dass das Feld senkrecht auf den Spalt trifft, wird es nicht gebrochen. Es tritt senkrecht in den Spalt ein und tritt an der anderen Seite wieder senkrecht in das Dielektrikum ein, daher tritt nur eine Normalkomponente auf! Gemäß den Brechungsregeln gilt:

Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebungsdichte ist konstant, also

$$D_{\text{nor}} = \text{const.} = D_{\text{nor außen}} = D_{\text{nor im Spalt}}$$

D_{nor} wird aus dem elektrischen Feld bestimmt:

$$D_{\text{nor}} = \epsilon_r \epsilon_0 E_a$$

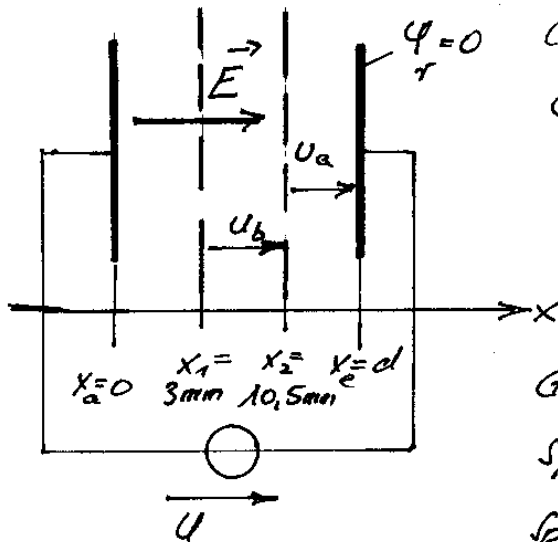
Somit gilt mit $E = D/\epsilon$

für das elektrische Feld außerhalb des Spaltes $E_a = D_{\text{nor außen}}/\epsilon_{ra} \epsilon_0$

und innerhalb des Spaltes: $E_i = D_{\text{nor}}/\epsilon_{ri} \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0 E_a / \epsilon_{ri} \epsilon_0 = (\epsilon_{ra}/\epsilon_{ri}) E_a$

Im Spalt erhöht sich also die Feldstärke. Damit wird die elektrische Beanspruchung im Spalt größer als im Dielektrikum! An den Enden des Spaltes wird das elektrische Feld im Dielektrikum zum Spalt hin abgelenkt.

3. Aufgabe



$$U = 6 \text{ kV}$$

Gesucht U_a, U_b

Gegeben: $U = 6 \text{ kV}$

$$x_e - x_2 = 4.5 \text{ mm}$$

$$x_e - x_1 = 12 \text{ mm}$$

$$x_e - x_a = d = 15 \text{ mm}$$

Gesucht:

Spannung zwischen x_2 und $x_e \Rightarrow U_a$

Spannung zwischen x_1 und $x_2 \Rightarrow U_b$

Die Spannung im elektrischen Feld kann aus der Potentialdifferenz berechnet werden $U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b)$

Bestimmung des Potentials: $\varphi = -\int E \cdot dx$

Feld im Plattenkondensator: $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_x = \frac{U}{d} \cdot \vec{e}_x \Rightarrow E = \frac{U}{d}$

Einsetzen liefert: $\varphi = -\int \frac{U}{d} dx = -\frac{U}{d} \cdot x + C$

Bestimmung der Konstanten: Bei $x = d$ ist $\varphi = \varphi_r = 0$

$$0 = -\frac{U}{d} \cdot d + C \Rightarrow C = U$$

Potential $\varphi(x) = -\frac{U}{d} \cdot x + U = U \left(1 - \frac{x}{d}\right)$

Potential bei $x = x_2 \Rightarrow \varphi(x_2) = 6 \text{ kV} \left(1 - \frac{10.5}{15}\right) = 1.8 \text{ kV}$

Potential bei $x = x_1 \Rightarrow \varphi(x_1) = 6 \text{ kV} \left(1 - \frac{3}{15}\right) = 4.8 \text{ kV}$

$$U_a = \varphi(x_2) - \varphi_r = 1.8 \text{ kV} - 0 = 1.8 \text{ kV}$$

$$U_b = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 4.8 \text{ kV} - 1.8 \text{ kV} = 3 \text{ kV}$$

4. Aufgabe

Die Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_4 rufen am Ort der Ladung Q_3 jeweils ein elektrisches Feld hervor. Der Betrag des Feldes einer jeden Ladung an am Ort der Ladung Q_3 bestimmt sich zu

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2}$$

r_i ist der Abstand der Ladung i zum Ort der Ladung Q_3 .

Bestimmung Abstände:

$$r_1 = \sqrt{7^2 + 2^2} \text{ cm} = 7,28 \text{ cm} = 0,00728 \text{ m},$$

$$r_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} \text{ cm} = 4,47 \text{ cm} = 0,00447 \text{ m}$$

$$r_4 = \sqrt{1^2 + 3^2} \text{ cm} = 3,16 \text{ cm} = 0,00316 \text{ m}$$

Faktor $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \text{Vm/As}$

Die Feldstärken

$$E_1 = k \frac{Q_1}{r_1^2} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{0,00728^2 \text{ m}^2} = 508,88 \text{ kV/m} \approx 509 \text{ V/mm}$$

$$E_2 = k \frac{Q_2}{r_2^2} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{0,00447^2 \text{ m}^2} = 449,9 \text{ kV/m} \approx 450 \text{ V/mm}$$

$$E_4 = k \frac{Q_4}{r_4^2} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \cdot \frac{-0,6 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{0,00316^2 \text{ m}^2} = -540,18 \text{ kV/m} \approx -540 \text{ V/mm}$$

Rechnerische Lösung: Bestimmung der Feldstärke am Ort Q_3

Dazu werden die Feldstärken in ihre x- und y-Komponente zerlegt:

$$E_{x1} = E_1 \cos \varphi_1 \quad \text{und} \quad E_{y1} = E_1 \sin \varphi_1$$

mit

$$\varphi_1 = \text{atan}(r_{1y}/r_{1x}) = \text{arctan}(2/7) = 15,9^\circ$$

$$E_{x1} = 489,5 \text{ V/m}, \quad E_{y1} = 139,4 \text{ V/m}$$

$$E_{x2} = E_2 \cos \varphi_2 \quad \text{und} \quad E_{y2} = E_2 \sin \varphi_2$$

$$\varphi_2 = \text{atan}(r_{2y}/r_{2x}) = \text{arctan}(-2/4) = -26,6^\circ$$

$$E_{x2} = 402,4 \text{ V/m}, \quad E_{y2} = -201,5 \text{ V/m}$$

$$E_{x4} = E_4 \cos \varphi_3 \quad \text{und} \quad E_{y4} = E_4 \sin \varphi_3$$

$$\varphi_4 = \text{atan}(r_{4y}/r_{4x}) = \text{arctan}(3/-1) = 108,4^\circ$$

$$E_{x4} = 170,5 \text{ V/m}, \quad E_{y4} = -512,4 \text{ V/m}$$

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} + E_{x4} = 1062,4 \text{ V/m}$$

$$E_y = E_{y1} + E_{y2} + E_{y4} = -574,5 \text{ V/m}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1207,8 \text{ V/mm}$$

$$\varphi_E = \arctan(E_y/E_x) = \arctan(-574,5/1062,4) = -28,4^\circ$$

Die Kraft auf Q_3 ist dann

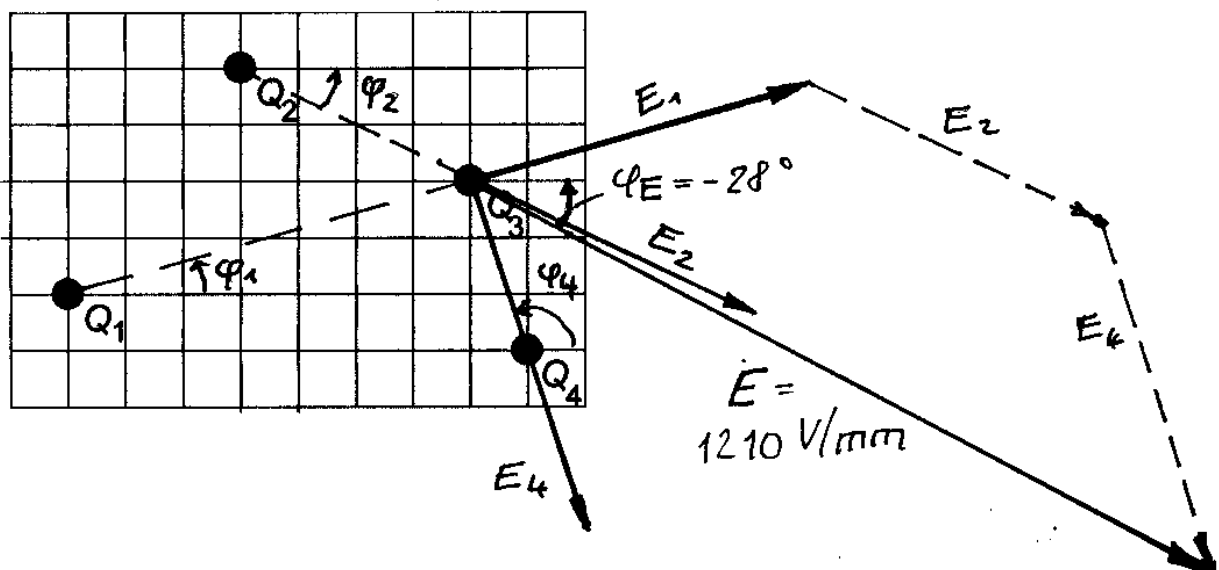
$$F_3 = Q_3 E = 1,5 \text{ nAs} \cdot 1207,8 \text{ V/mm} = 1811,7 \text{ nAs} \cdot \text{V/mm} = 1811,7 \cdot 10^{-9} \text{ AVs/m.}$$

Mit $\text{VAs/m} = \text{N}$ folgt $F_3 = 1811,7 \cdot 10^{-6} \text{ N}$

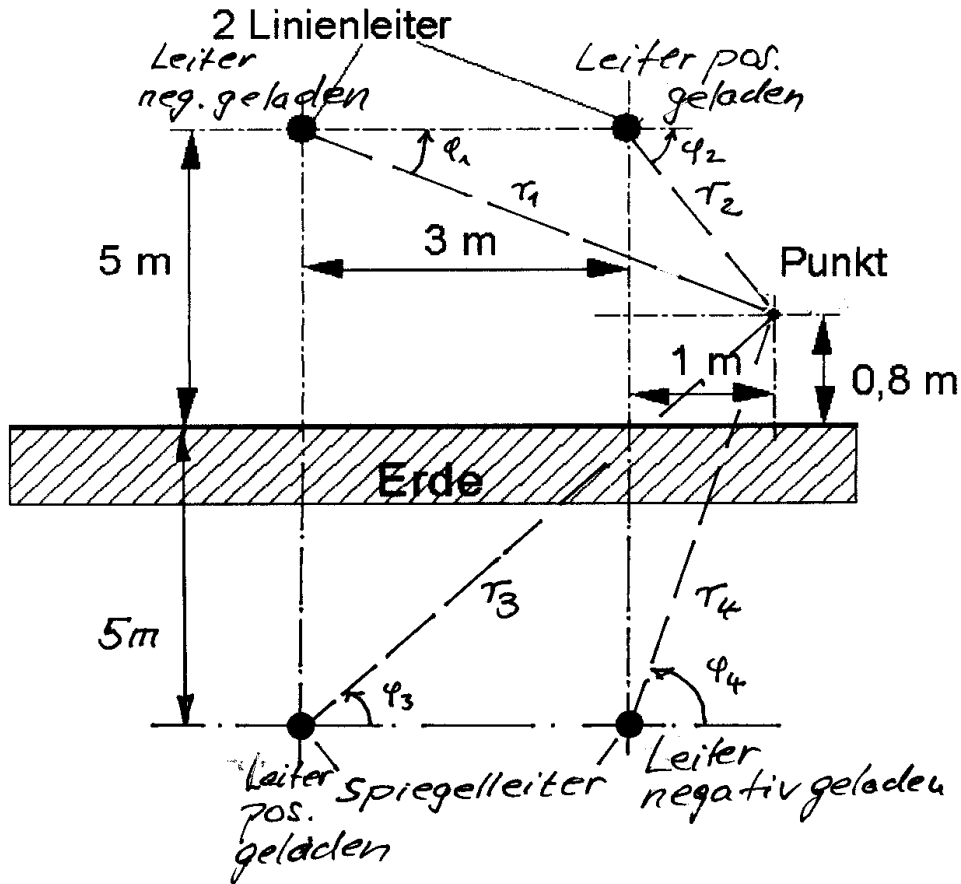
Zeichnerische Lösung: Bestimmung der Feldstärke am Ort Q_3

Zur zeichnerischen Lösung sind zuerst die Beträge der Feldstärken der Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_4 rechnerisch zu bestimmen. $E_1 = 509 \text{ V/mm}$, $E_2 = 450 \text{ V/mm}$ und $E_4 = -540 \text{ V/mm}$.

Dann werden von allen Ladungen die Vektoren zur Ladung Q_3 am Ort von Q_3 gezeichnet. Danach werden die Vektoren durch Parallelverschiebung überlagert und der resultierende Vektor bestimmt, der den Betrag der gesuchten Feldstärke darstellt.



5. Aufgabe



Der Betrag der Feldstärke im Punkt P für jeden Leiter wird gemäß der Formel

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

berechnet. r ist der Abstand des Linienleiters vom Punkt P(1 m, 0,8 m).

Es gilt $r_1 = \sqrt{4^2 + 4,2^2} \text{ m} = 5,8 \text{ m}, \varphi_1 = \arctan\left(\frac{-4,2}{4}\right) = -46,4^\circ$

$$r_2 = 4,32 \text{ m}, \varphi_2 = -76,60^\circ$$

$$r_3 = 7,05 \text{ m}, \varphi_3 = 55,41^\circ$$

$$r_4 = 5,89 \text{ m}, \varphi_{24} = 80,22^\circ$$

Beträge der Feldstärken am Punkt P:

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{100 \text{ nAs/m}}{2\pi\epsilon_0 \cdot 5,80 \text{ m}} = 310 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = 416,3 \text{ V/m}, E_3 = 255,1 \text{ V/m}, E_4 = 305,4 \text{ V/m}$$

x-Komponenten der Feldstärken am Ort P:

$$E_{x1} = E_1 \cos(\varphi_1 + 180^\circ) = 310 \text{ V/m} \cos(-46,4^\circ + 180^\circ)$$

$$E_{x1} = 310 \text{ V/m} \cos(133,4^\circ) = -213,0 \text{ V/m}$$

$$E_{x2} = E_2 \cos(\varphi_2) = 416,3 \text{ V/m} \cos(-76,6^\circ) = 96,5 \text{ V/m}$$

$$E_{x3} = E_3 \cos(\varphi_3) = 255,1 \text{ V/m} \cos(55,4^\circ) = 144,8 \text{ V/m}$$

$$E_{x4} = E_4 \cos(\varphi_4 - 180^\circ) = 305,41 \text{ V/m} \cos(80,2^\circ - 180^\circ) = -52,0 \text{ V/m}$$

y-Komponenten der Feldstärken am Ort P

$$E_{y1} = E_1 \sin(\varphi_1 + 180^\circ) = 310 \text{ V/m} \sin(-46,4^\circ + 180^\circ) = 225,2 \text{ V/m}$$

$$E_{y2} = E_2 \sin(\varphi_2) = 416,3 \text{ V/m} \sin(-76,6^\circ) = -404,0 \text{ V/m}$$

$$E_{y3} = E_3 \sin(\varphi_3) = 255,1 \text{ V/m} \sin(55,4^\circ) = 210,1 \text{ V/m}$$

$$E_{y4} = E_4 \sin(\varphi_4 - 180^\circ) = 305,4 \text{ V/m} \sin(80,2^\circ - 180^\circ) = -300,9 \text{ V/m}$$

Summe aller x-Komponenten: $E_x = -23,7 \text{ V/m}$

Summe aller y-Komponenten: $E_y = -269,6 \text{ V/m}$

Betrag der Feldstärke am Ort P:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 270,6 \text{ V/m}$$

Winkel: $\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-23,7}{-269,6} = 5^\circ - 180^\circ = -95^\circ$

Kraft auf die Ladung $Q = 200 \text{ nAs}$:

$$F = 200 \text{ nAs} \cdot 270,6 \text{ V/m} = 54,12 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Übung 4 - Kondensatoren

1. Aufgabe

An einem Plattenkondensator mit quadratischen Metallplatten und geschichtetem Dielektrikum liegt eine Spannung von 2 kV. Die relativen Dielektrizitätszahlen verhalten sich wie: $\epsilon_{r1} / \epsilon_{r2} = 1 / 3$. Die Feldausbreitung ist homogen. Die Dicke des Dielektrikums $d_1 = 4$ mm, $d_2 = 6$ mm und die Fläche der Platten $A = 25$ cm², $\epsilon_{r1} = 2$.

- Berechnen Sie die Ladung Q , die Verschiebungsflußdichte \mathbf{D} und die elektrische Feldstärke \mathbf{E} in den einzelnen Bereichen.
- Berechnen Sie den Potentialverlauf im geschichteten Dielektrikum.
- Berechnen Sie die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r einer gleichgroßen Ersatzkapazität.

2. Aufgabe

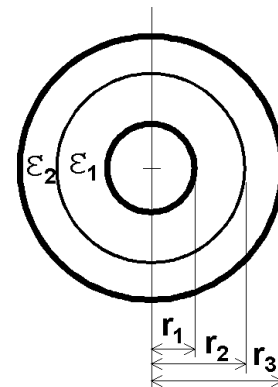
Zwischen den Kondensatorplatten im Abstand $d = 8$ mm befindet sich eine Glasplatte von 2,5 mm Dicke ($\epsilon_r = 7,5$). Der restliche Zwischenraum ist mit Luft gefüllt. Die Spannung an den Kondensatorplatten beträgt $U = 2500$ V. Die Fläche der Platten beträgt $A = 25$ cm².

- Wie groß sind die Feldstärken in Glas und in Luft und wie groß sind die Teilspannungen in Glas und in Luft?
- Wie groß sind die Feldstärken in Glas und in Luft wenn die nun Glasplatte 7,8 mm dick ist? Wird die Luftschicht nun durchschlagen?

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Kugelkondensator mit geschichtetem Dielektrikum. Der Radius der inneren leitenden Kugel beträgt $r_{i1} = 1$ cm, der Außenradius beträgt $r_3 = 5$ cm. Der Radius r_2 beträgt $r_2 = 2$ cm. Es ist $\epsilon_{r1} = 6$, $\epsilon_{r2} = 1$, $\epsilon_0 = 8,855 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

- Die Kapazität eines Kugelkondensators ist herzuleiten.
- Wie gewinnt man den Zusammenhang Elektrische Feldstärke als Funktion der Spannung $E = f(U)$?
- Bestimmen Sie die Kapazität der rechts dargestellten Anordnung zwischen den Radien r_1 und r_3 .
- Zeichnen Sie maßstäblich den Verlauf der elektrischen Feldstärke und Potential als Funktion des Radius, wenn die innere Elektrode die Ladung $Q = 1$ nAs trägt. Wie groß muß die Spannung zwischen innerer und äußerer Kugel sein, damit die Elektrode die Ladung Q trägt?



4. Aufgabe

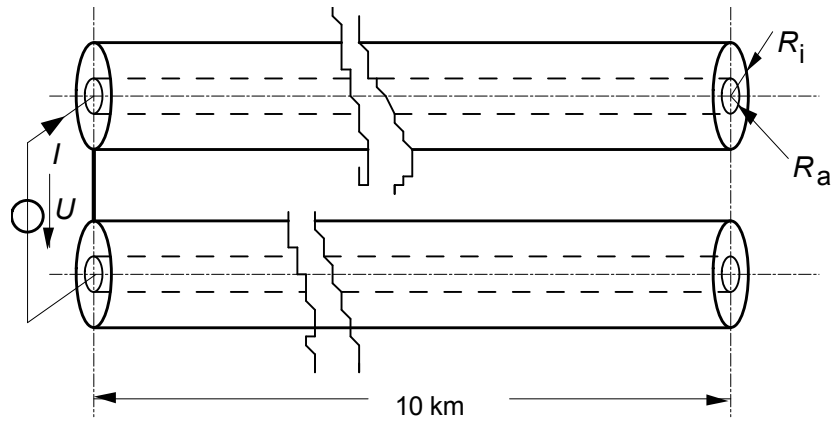
Welche Feldstärke herrscht an der Oberfläche einer isoliert aufgehängten Kugel von 10 cm Durchmesser, deren Spannung gegen Erde 3500 V beträgt?

5. Aufgabe

b) Gegeben sind zwei parallel verlegte Koaxialkabel. Ihre Länge beträgt 10 km. Zwischen den Innenleitern der beiden Kabel wird eine Gleichspannung von $U = 100$ kV angelegt. Daten der Kabel: $\epsilon_r = 3,5$; $R_i = 1$ cm, $R_a = 2$ cm. (Sie sollten die fertigen Formeln verwenden!)

Wie groß sind die Ladungen auf den Innen- und Außenleitern, und wie groß ist ihre Summe auf den beiden Außenleitern?

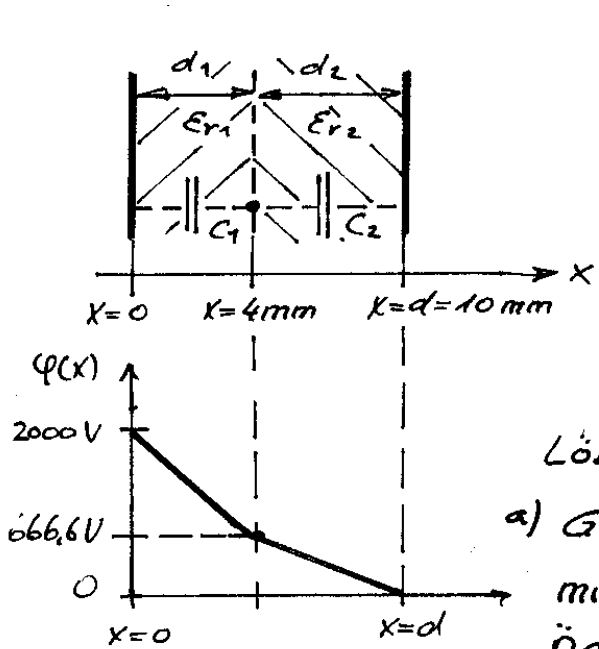
Wie groß sind die Feldstärken am Innenleiter ($r = R_i$) und am Außenleiter ($r = R_a$), Einheit in kV/mm?



Die Spannungsquelle liefert eine sinusförmige Spannung mit dem Effektivwert von $100 \text{ kV}/\sqrt{3}$. Welchen Strom muss die Spannungsquelle liefern, und welche komplexe Leistung liefert die Spannungsquelle?

Lösungen

1. Aufgabe



$$\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = \frac{1}{3} \quad \begin{matrix} d_1 = 4 \text{ mm} \\ d_2 = 6 \text{ mm} \end{matrix}$$

$$\epsilon_{r2} = 3 \cdot \epsilon_{r1} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$A = 25 \text{ cm}^2$$

$$U = 2000 \text{ V}$$

Lösung:

a) Geschichtete Dielektrikum mit Grenzschicht auf einer Äquipotentialfläche \rightarrow

Dies kann als Reihenschaltung zweier Kondensatoren C_1, C_2 aufgefaßt werden.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_{r1} \cdot \epsilon_0 \cdot A} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2} \cdot \epsilon_0 \cdot A} = \frac{d_1/\epsilon_{r1} + d_2/\epsilon_{r2}}{\epsilon_0 \cdot A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 25 \text{ cm}^2}{\frac{4 \text{ mm}}{2} + \frac{6 \text{ mm}}{6}}$$

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-14} \frac{\text{F}}{\text{cm}} \cdot 25 \cdot \text{cm}^2}{0,2 \text{ cm} + 0,1 \text{ cm}} = 737,5 \cdot 10^{-14} \text{ F}$$

$$\underline{\underline{C = 7,375 \cdot 10^{-12} \text{ F}}}$$

$$Q = C \cdot U = 7,375 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 2000 \text{ V}$$

$$\underline{\underline{Q = 14,75 \cdot 10^{-9} \text{ As}}}$$

Bestimmung der Feldgrößen:

Beim Plattenkondensator gilt: $Q = D \cdot A$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{Q}{A} = \frac{14,75 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{25 \cdot \text{cm}^2} = \underline{\underline{0,59 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{cm}^2}}}$$

Feldstärke im Gebiet 1:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,59 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{cm}^2}}{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,59 \cdot 10^{-9} \text{ As/cm}^2}{8,85 \cdot 10^{-14} \text{ As/Vcm}} = \frac{1}{2} \cdot 6666,67 \text{ V/cm}$$

$$\underline{\underline{E_1 = 3333,33 \text{ V/cm}}}$$

Feldstärke im Gebiet 2:

$$\underline{\underline{E_2}} = \frac{D}{\epsilon_{r2} \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_{r2}} \cdot \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{1}{6} \cdot 6666,67 \text{ V/cm} = \underline{\underline{1111,1 \text{ V/cm}}}$$

b) Potentialverlauf: Potential fällt linear im Plattenkondensator von $U = 2000 \text{ kV}$ auf $U = 666 \text{ V}$ an der Grenzschicht: $\Delta U_1 = d_1 \cdot E_1 = 4 \text{ mm} \cdot 3333,3 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$

$$\underline{\underline{\Delta U_1 = 1333,32 \text{ V}}}$$

$$\underline{\underline{U_{\text{Grenz}}}} = U - \Delta U_1 = 2000 \text{ V} - 1333,32 \text{ V} = \underline{\underline{666,66 \text{ V}}}$$

Von $666,6 \text{ V}$ fällt Potential linear auf 0 V !

$$c) \underline{\underline{C}} = \frac{\epsilon_r \epsilon_{\text{ersatz}} \cdot \epsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{\frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \frac{d_1}{\epsilon_{r1}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\epsilon_r \epsilon_{\text{ersatz}}}} = \frac{d}{\frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \frac{d_1}{\epsilon_{r1}}} = \frac{10 \text{ mm}}{\frac{6 \text{ mm}}{6} + \frac{4 \text{ mm}}{2}} = \underline{\underline{\frac{10}{3} = 3,33}}$$

2. Aufgabe

Lösungsgang wie in 1. Aufgabe!

Anordnung wird als Reihenschaltung zweier Kondensatoren aufgefasst.

1. Kondensator: Dielektrikum Luft, $\epsilon_{r1} = 1$

2. Kondensator: Dielektrikum Glas: $\epsilon_{r2} = 7,5$

Gesamtabstand d. Platten $d = 8 \text{ cm}$.

a) Glasplatte $d_{G1} = 2,5 \text{ mm}$; Luft $d_L = 5,5 \text{ mm}$

$$\text{Kapazität } C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{\frac{d_L}{\epsilon_1} + \frac{d_{G1}}{\epsilon_2}} = \frac{8,85 \cdot 10^{-14} \frac{\text{F}}{\text{cm}} \cdot 25 \text{ cm}^2}{0,55 \text{ cm} + \frac{0,25 \text{ cm}}{7,5}}$$

$$C = \frac{221,25 \cdot 10^{-14} \text{ AS/cm}^2}{0,55 \text{ cm} + 0,25 \text{ cm}/7,5} = 3,793 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$Q = C \cdot U = 3,793 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 2500 \text{ V} = 9,4825 \cdot 10^{-9} \text{ AS}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{Q}{A} = \frac{9,4825 \cdot 10^{-9} \text{ AS}}{25 \text{ cm}^2} = \underline{\underline{0,3793 \cdot 10^{-9} \text{ AS/cm}^2}}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_1} \cdot \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-14} \text{ AS/Vcm}} \cdot \frac{0,3793 \cdot 10^{-9} \text{ AS/cm}^2}{\epsilon_1} = \underline{\underline{4285,9 \frac{\text{V}}{\text{cm}}}}$$

Feldstärke in Luft $\Rightarrow \epsilon_{r1} = 1$

$$\underline{\underline{E_L = 4285,9 \frac{\text{V}}{\text{cm}}}}$$

Feldstärke in Glas $\Rightarrow \epsilon_{r2} = 7,5$

$$\underline{\underline{E_{G1} = 4285,9 \frac{\text{V}}{\text{cm}} / 7,5 = 571,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}}}}$$

Spannung über Luftstrecke

$$\underline{\underline{U_L = d_L \cdot E_L = 0,55 \text{ cm} \cdot 4285,9 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 2357,2 \text{ V}}}$$

Spannung am Glas

$$\underline{\underline{U_{G1} = d_{G1} \cdot 571,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 142,9 \text{ V}}}$$

c) Glasplatte $d_{G1} = 7,8 \text{ mm}$
 Luftdicke $d_L = 0,2 \text{ mm}$

Neue Kapazität:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d_L + d_{G1}/\epsilon_{G1}} = \frac{221,25 \cdot 10^{-14} \text{ As/cm}^2}{0,02 \text{ cm} + 0,78 \text{ cm}/7,5}$$

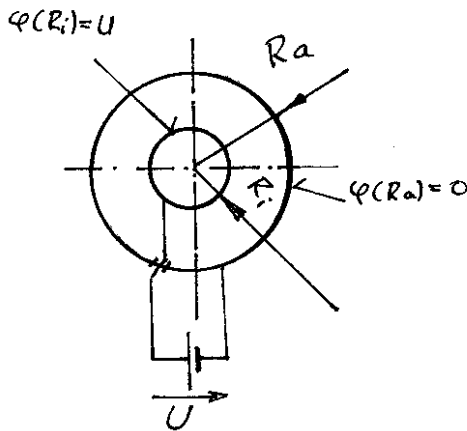
$$C = 17,84 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$Q = C \cdot U = 17,84 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 2500 \text{ V} = 44,61 \cdot 10^{-9} \text{ As}$$

$$D/\epsilon_0 = E_L = \frac{44,61 \cdot 10^{-9} \text{ As}/25 \text{ cm}^2}{8,85 \cdot 10^{-14} \text{ As/V}\cdot\text{cm}} = 20,1 \text{ V/cm}$$

Die Feldstärke in Luft ist so hoch geworden,
 daß mit einem Durchschlag zu rechnen
 ist!

3. Aufgabe



Das Feld innerhalb der äußeren Kugel mit dem Radius R_a und außerhalb der inneren Kugel mit dem Radius R_i wird nur durch die auf der inneren Kugel befindlichen Ladung Q bestimmt.

Innerhalb der inneren Kugel, die leitfähig oder aus Metall ist, befindet sich kein elektr. Feld! Zur Feldberechnung wird angenommen, daß sich im Zentrum der Kugel eine Punktladung befindet, deren Ladung mit der Ladung Q auf der inneren Kugel übereinstimmt: $q = Q$. Das Feld im Zwischenraum der beiden Kugeln, also im Dielektrikum wird mittel des Gaußschen-Satzes bestimmt:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 4\pi r^2 = Q \quad \text{für } R_i \leq r \leq R_a$$

$$D = 0 \quad \text{für } r < R_i$$

$$D = 0 \quad \text{für } r > R_a$$

Somit folgt für $R_i \leq r \leq R_a$:

$$\underline{\underline{D = \frac{Q}{4\pi r^2}}}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}}}$$

Das Potential $\varphi = -\int E r dr = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + C$

Auf der äußeren Kugel $r = R_a$ sei $\varphi(R_a) = 0$:

$$0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R_a} + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R_a}$$

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} \right)}}$$

Bei $r \leq R_i$ ist $\varphi = \varphi(R_i) = \text{const.}$,

bei $r \geq R_a$ ist $\varphi = \varphi(R_a) = \text{const.}$

Bei $r = R_i$ ist das Potential $\varphi(R_i) = U$

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)$$

Die Kapazität: Aus der Definition

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)}$$

folgt

$$\underline{\underline{C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} = \frac{4\pi\epsilon R_i \cdot R_a}{R_a - R_i}}}$$

Ist $R_a \gg R_i$ (∞ 10 mal und mehr)

Gilt näherungsweise

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon R_i \cdot R_a}{R_a} = 4\pi\epsilon R_i$$

Das gilt nur für die Kugel mit dem Radius R_i .

Eine Kugel mit dem Radius R hat gegenüber ihrer Umgebung näherungsweise die

$$\underline{\underline{\text{Kapazität } C = 4\pi\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot R}}$$

- b) Der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Spannung bei einem Kondensator wird über die Kapazität hergestellt:

Es gilt bei einem Kugelkondensator

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Wegen $Q = C \cdot U = \frac{4\pi\epsilon R_i \cdot R_a \cdot U}{R_a - R_i}$ folgt weiter

$$E = \frac{U \cdot 4\pi\epsilon R_i \cdot R_a / (R_a - R_i)}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{R_i \cdot R_a}{R_a - R_i} \cdot \frac{U}{r^2}}}$$

c) Der Kugellkondensator weist eine geschichteten Dielektrikum auf. Die Grenzschicht liegt auf einer Äquipotentialfläche, daher kann die Anordnung als zwei Kugellkondensatoren in Reihenschaltung aufgefasst werden.

$$C_1 = \frac{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0}{R_2 - R_1} \cdot R_2 \cdot R_1 = \frac{4\pi \cdot 6 \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot 1 \text{ cm}^2}{(2-1) \text{ cm}} = 13,3 \text{ pF}$$

$$C_2 = \frac{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0}{R_3 - R_2} \cdot R_3 \cdot R_2 = \frac{4\pi \cdot 1 \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot 5 \text{ cm}^2}{(5-2) \text{ cm}} = 3,71 \text{ pF}$$

$$\underline{\underline{C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 2,9 \text{ pF}}}$$

d) $Q = 1 \mu\text{As} = 10^{-9} \text{ As}$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{10^{-9} \text{ As}}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{79,6 \cdot 10^{-12} \text{ As}}{r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_r} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{899,4 \cdot \text{V} \cdot \text{cm}}{\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Innerer Bereich $R_1 \leq r \leq R_2 \Rightarrow \epsilon_{r1} = 6$

$$\underline{\underline{E_i = \frac{899,4 \text{ V} \cdot \text{cm}}{6} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{149,9 \text{ V} \cdot \text{cm}}{r^2}}}$$

Äußerer Bereich $R_2 \leq r \leq R_3 \Rightarrow \epsilon_{r2} = 1$

$$E_a = \frac{899,4 \text{ V/cm}}{r^2}$$

T/cm

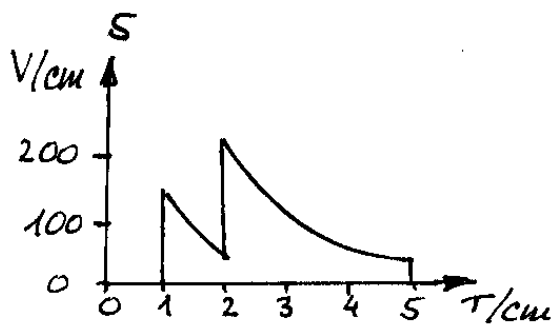
1 $E_i = 149,9 \text{ V/cm}$

2 $E_i = 37,5 \text{ V/cm}$ und $E_a = 224,9 \text{ V/cm}$

3 $E_a = 99,9 \text{ V/cm}$

4 $E_a = 56,21 \text{ V/cm}$

5 $E_a = 36 \text{ V/cm}$



$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1 \mu\text{A}}{290,1 \text{ pF}} = \underline{\underline{3,447 \text{ V}}}$$

4. Aufgabe Ischergeleitet wurde, gilt

$$E = \frac{R_i R_a}{R_a - R_i} \cdot \frac{U}{r^2}$$

Da die Kugel sehr hoch über Erde hängt, gilt

Näherungsweise $R_a \gg R_i$ und somit

$$E \approx \frac{R_i \cdot R_a}{R_a} \cdot \frac{U}{r^2} = \frac{R_i \cdot U}{r^2}$$

Au der Kugeloberfläche ist $R_i = R_k$ und $r = R_k$,

dann gilt $E = \frac{R_i \cdot U}{R_i^2} = \frac{U}{R_i} = \frac{3500 \text{ V}}{5 \text{ cm}}$

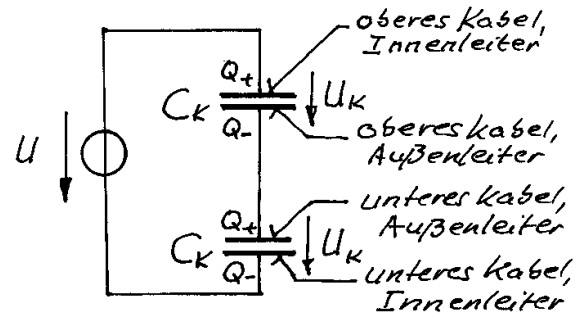
$$\underline{\underline{E|_{r=R} = 700 \text{ V/cm}}}$$

5. Aufgabe

Die Ersatzschaltung der Anordnung ist rechts dargestellt.

Die Kabel werden durch ihre Kabelkapazität C_K dargestellt.

Sie berechnet sich zu



$$C_K = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln(R_a/R_i)} = \frac{2\pi \cdot 3,5 \cdot \epsilon_0 \cdot 10000 \text{ m}}{\ln(2 \text{ cm}/1 \text{ cm})} = 2,81 \mu\text{F}$$

Die Spannungsquelle U wird durch die Reihenschaltung der beiden Kabelkapazitäten belastet. Die Größe dieser Gesamtkapazität ist:

$$C_{\text{ges}} = C_K/2 = 1,405 \mu\text{F}.$$

Die Ladung Q der Kondensatoren ist:

$$Q = CU = 1,405 \mu\text{F} \cdot 100 \text{ kV} = 0,1405 \text{ As}$$

Durch Influenz erfolgt die im Ersatzschaltbild dargestellte Ladungstrennung. Wie man sieht, ist die Summe der beiden Ladungen auf den Außenleitern null.

Die Feldstärke einer koaxialen Anordnung wird nach folgender Formel berechnet:

$$E = \frac{U}{\ln(R_a/R_i)} \cdot \frac{1}{r}$$

U ist die Spannung zwischen Innenleiter und Außenleiter, r ist der Radius, an dem die Feldstärke gesucht wird. In diesem Fall ist, da die beiden Kapazitäten C_K gleich sind, die Spannung an einem Kabel

$$U_K = U/2 = 50 \text{ kV}.$$

Dann gilt für den Innenleiter

$$E(R_i) = \frac{U_K}{\ln(R_a/R_i)} \cdot \frac{1}{R_i} = \frac{50 \text{ kV}}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{1 \text{ cm}} = 72,13 \text{ kV/cm}$$

und für den Außenleiter

$$E(R_a) = \frac{U_K}{\ln(R_a/R_i)} \cdot \frac{1}{R_a} = \frac{50 \text{ kV}}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{2 \text{ cm}} = 36,1 \text{ kV/cm}.$$

Liefert die Spannungsquelle eine sinusförmige Spannung mit dem Effektivwert von $110 \text{ kV}/\sqrt{3} = 63,5 \text{ kV}$ und der Frequenz von 50 Hz, wird er mit folgendem Strom belastet:

$$\underline{I} = j2\pi f \cdot C \cdot U = j2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 1,404 \mu\text{F} \cdot 63,5 \text{ kV} = j 28 \text{ A}$$

Die Spannungsquelle liefert nur kapazitive Blindleistung.

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 63,5 \text{ kV} \cdot (-j) 28 \text{ A} = -j 1778 \text{ kvar} = Q$$

Übung 5 - Strömungsfeld

Erläuterungen zum Strömungsfeld

Strömungsfeld und elektrische Feld sind miteinander verwandt. In beiden Fällen tritt eine elektrische Feldstärke und damit auch eine elektrische Kraft auf. Der Zusammenhang zwischen Kraft und elektrischer Feldstärke ist:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}.$$

Elektrostatistisches Feld

Die Ursache für das elektrische Feld ist die elektrische Ladung Q . Von der Ladung breitet sich ein elektrischer Fluß Ψ_{el} in den Raum aus, dessen Feldlinien das Verschiebungsfeld \mathbf{D} bilden. Zwischen Fluß, Verschiebungsfeld und Ladung besteht der Gaußsche-Satz des elektrischen Feldes:

$$\Psi_{\text{el}} = \oint \mathbf{D}d\mathbf{A} = Q$$

Elektrisches Strömungsfeld

Auf einer Elektrode möge sich Ladung befinden. Von dieser Elektrode ströme Ladung in den Raum. Dann bilden die strömenden Ladungen einen Fluß, den man als elektrischen Strom bezeichnet. Die Linien der sich bewegenden Ladungen werden als Stromlinien bezeichnet. In dem gesamten Raum, in dem sich die Ladungen bewegen, hat sich ein Strömungsfeld gebildet. Da die Ladung auf der Elektrode dann abnimmt, wenn von ihr ein Strom in den Raum ausgeht, gilt für die Elektrode der Zusammenhang

$$I = \oint \mathbf{S}d\mathbf{A} = -dQ/dt$$

Zusammenhang der Felder:

Zwischen der Verschiebungsdichte und der Feldstärke besteht der Zusammenhang: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

Zwischen der Stromdichte und der Feldstärke besteht der Zusammenhang: $\mathbf{S} = \kappa\mathbf{E}$.

Gegenüberstellung der Feldgleichungen

Elektrisches Feld	Strömungsfeld
$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$
$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{S} = \kappa \cdot \mathbf{E}$
$\Psi_{\text{el}} = \oint \mathbf{D}d\mathbf{A}$	$I = \oint \mathbf{S}d\mathbf{A}$
$U = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{E}ds$	$U = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{E}ds$
$C = \Psi_{\text{el}}/U = Q/U$	$G = I/U$

Ein Vergleich der Gleichungen für die Felder zeigt weitgehende Übereinstimmung, es bestehen Analogien. Dies kann man bei der Feldberechnung ausnutzen. Ist z.B. das D -Feld bekannt, wird daraus das E -Feld $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$ bestimmt. Ist das Dielektrikum zwischen den beiden Elektroden nicht vollkommen, bildet sich auch ein Strömungsfeld aus, das aus der Beziehung $\mathbf{S} = \kappa\mathbf{E}$ berechnet wird.

Anwendung auf das elektrische Feld einer Punktladung

Genau wie die elektrische Verschiebungsdichte der Punktladung nur eine Radialkomponente hat:

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r,$$

hat auch das Strömungsfeld nur eine Radialkomponente:

$$\mathbf{S} = S_r \mathbf{e}_r.$$

Der Mittelpunkt einer die Punktladung umschließenden kugelförmigen Hülle falle mit dem Ort der Punktladung zusammen. Dann stimmen die Richtungen der Stromlinien und die Richtungen der Flächenelemente $d\mathbf{A}$ auf der Oberfläche der Hülle überein und das Oberflächenintegral vereinfacht sich zu

$$\oint \mathbf{S} d\mathbf{A} = S_r \oint d\mathbf{A} = S_r A.$$

Also folgt $S_r A = I$.

Mit der Oberfläche der kugelförmigen Hülle

$$A = 4\pi r^2,$$

folgt für die S_r -Komponente

$$S_r = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

Das Feld der Stromdichte lautet daher

$$\mathbf{S} = S_r \mathbf{e}_r = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Die elektrische Feldstärke folgt aus der Beziehung

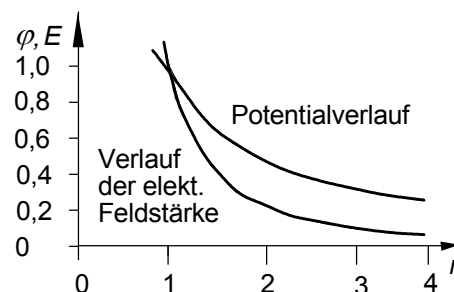
$$\mathbf{S} = \kappa \mathbf{E}$$

zu

$$E_r = \frac{S_r}{\kappa} = \frac{I}{\kappa \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

Das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke lautet

$$\mathbf{E} = E_r \cdot \mathbf{e}_r = \frac{I}{\kappa \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$



Prinzipieller Verlauf des Potentials und elektrischer Feldstärke einer Punktladung

Das Potential folgt aus der Beziehung

$$\varphi(s) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

In diesem Fall ist

$$d\mathbf{s} = dr\mathbf{e}_r.$$

Da das Skalarprodukt der beiden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$ ergibt, folgt

$$\varphi = -\int E_r dr = -\int \frac{I}{\varepsilon 4\pi r^2} dr$$

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} + c.$$

In gleicher Weise berechnen sich die Felder für die Linien- und die Flächenladung:

Linienladung (Zylinderkoordinatensystem)

Elektrische Verschiebungsdichte $S_r = \frac{I/l}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r l}$

Elektrische Feldstärke $E_r = \frac{I}{2\pi\varepsilon r l}$

Potential $\varphi = -\frac{I}{2\pi\kappa l} \ln r + c$

Flächenladung (kartesisches Koordinatensystem)

Elektrische Verschiebungsdichte $S_x = \frac{I}{A}$

Elektrische Feldstärke $E_x = \frac{I}{A\kappa}$

Potential $\varphi = -\frac{I}{A\kappa} \cdot x + c$

Da in einem homogenen elektrischen Leiter mit der Leitfähigkeit κ und dem Leiterquerschnitt A die Stromdichte über den Leiterquerschnitt konstant ist, ergibt sich folgender einfache Zusammenhang zwischen Strom, Stromdichte und Querschnittsfläche:

$$I = \mathbf{S}\mathbf{A} = SA.$$

Innerhalb des Leiters tritt in Stromrichtung die elektrische Feldstärke $E = S/\kappa$ auf. Die Richtung der Feldstärke ist die des Stroms, der sich längs des Leiters ausbreitet. Dieser Richtung wird die Ortskoordinate x zugeordnet. Dann ist der Einheitsvektor \mathbf{e}_x (kartesisches Koordinatensystem). Somit bilden im Leiter die

Stromdichte den Vektor: $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_x$

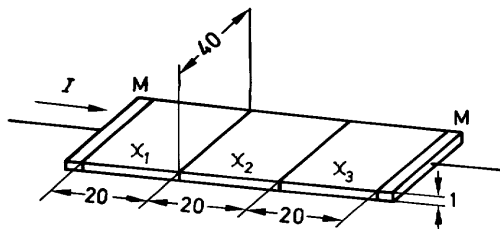
und die Feldstärke den Vektor: $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x.$

1. Aufgabe

Welche Elektrische Feldstärke besteht in einer Kupferleitung von 1,5 mm Durchmesser, durch die ein Strom von 6 A fließt? ($\kappa = 58 \text{ Sm/mm}^2$).

2. Aufgabe

Ein Leiter ist aus drei verschiedenen Materialien mit den Leitwerten $\kappa_1 = 1 \text{ S/cm}$, $\kappa_2 = 2 \text{ S/cm}$, $\kappa_3 = 4 \text{ S/cm}$ zusammengesetzt. Alle Maße in Millimeter.



Über die Metallelektroden M fließt ein Strom von 80 mA. Zeichnen Sie maßstäblich das Feldstärke-, Spannungs- und Strömungsfeld und die Beträge der Feldstärke, der Stromdichte, des Potentials (mit Bezugspunkt bei $x = 60 \text{ mm}$) und des Spannungsabfalls längs des Leiters.

3. Aufgabe

Gegeben sind 2 gleich große Metallplatten, die sich parallel in einem Abstand von 20 cm gegenüberstehen. Jede Platte besitzt ein Plattenfläche von $4 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$. Zwischen den Metallplatten befindet sich ein Leiter mit der Leitfähigkeit $\kappa = 5 \cdot 10^{-2} \text{ S/cm}$ (Flüssigkeitswiderstand im homogenen Feld). Die Leistungsaufnahme dieser Anordnung beträgt 750 W.

Berechnen Sie den Strom, die Stromdichte, die elektrische Feldstärke und den Spannungsabfall des Elektrolyten.

4. Aufgabe

Gegeben sind 2 gleich große Metallplatten, die sich parallel gegenüberstehen. Zwischen den Metallplatten befindet sich ein Elektrolyt mit überall gleicher Leitfähigkeit $\kappa = 5 \cdot 10^{-2} \text{ S/cm}$ (Flüssigkeitswiderstand im homogenen Feld). In dieser Anordnung soll eine elektrische Leistung $P = 1 \text{ kW}$ umgesetzt werden.

- Wie groß muß die Fläche der Elektroden sein, wenn bei einem Abstand von $d = 30 \text{ cm}$ eine Feldstärke von $0,6 \text{ V/cm}$ bestehen soll?
- Berechnen Sie Strom und Spannung zwischen den Platten.
- Geben Sie die Beziehung zwischen Leistungsdichte, Feldstärke und Stromdichte allgemein an.

5. Aufgabe

Zwei quadratische Metallelektroden mit der Kantenlänge $a = 100 \text{ mm}$ stehen im Abstand $l = 200 \text{ mm}$ parallel zueinander. Der Raum zwischen ihnen ist mit einem Elektrolyten mit $\kappa = 0,1 \text{ S/cm}$ (Flüssigkeitswiderstand im homogenen Feld) ausgefüllt. Zwischen den Platten liegt die Spannung 10 V an. Zeichnen Sie das Felddbild der Stromdichte und des Potentials. Die Äquipotentiallinien sind maßstäblich zu zeichnen und zu parametrieren.

6. Aufgabe

Gegeben sei ein Koaxialkabel der Länge $l = 10 \text{ km}$ mit dem Innenradius $R_i = 0,6 \text{ mm}$ und einem Außenradius von $R_a = 2,5 \text{ mm}$. Die Wandstärke des Außenleiters beträgt $d = 0,3 \text{ mm}$.

Zwischen Innen- und Außenleiter befindet sich ein Isolationsmaterial mit der Leitfähigkeit $\kappa = 10^{-4}$ S/m und der Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 2,3$.

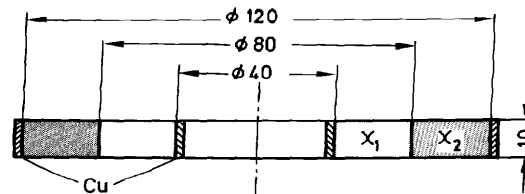
- Berechnen Sie den Ableitungsbelag $G' = G / l$ zwischen Innen- und Außenleiter und den Kapazitätsbelag $C'' = C / l$. Das Ersatzschaltbild der leerlaufenden Kabels ist anzugeben.
- An das Kabel wird eine Spannung von 1 kV angelegt. Ermitteln Sie den maximalen Betrag der el. Feldstärke im Isolationsmaterial. Wie groß ist die Ladung auf den Elektroden?

7. Aufgabe

Die Spannung zwischen dem Heizdraht einer Glühkathodenröhre und der ihn zylindrisch umgebenden Anode beträgt 120 V. Der Durchmesser des Anodenzylinders beträgt 2 cm. Welche Feldstärke besteht an der Oberfläche des 0,06 mm starken Heizdrahtes? Der Betrag von S und E ist abhängig vom Radius maßstäblich zu zeichnen.

8. Aufgabe

Eine runde Scheibe der Dicke 10 mm ist aus zwei verschiedenen Materialien mit den Leitwerten $\kappa_1 = 1$ S/cm und $\kappa_2 = 2$ S/cm zusammengesetzt. Aus einem inneren Kupferring fließt nach außen ein Strom von 360 mA, der in einem äußeren Kupferring eintritt. Die Leitfähigkeit der Kupferringe ist viel größer als die der beiden Materialien zwischen den Kupferringen. Der Einfluß der Kupferringe wird daher vernachlässigt. Zu berechnen und zu zeichnen sind $S(r)$, $E(r)$ und $\phi(r)$. Wie groß ist der Gesamtwiderstand, wie groß ist die Spannung zwischen den beiden Kupferringen?



Lösung

1. Aufgabe

Strömungsfeld

1. Aufgabe

Aus $S = \chi E$ folgt $E = \frac{S}{\chi}$

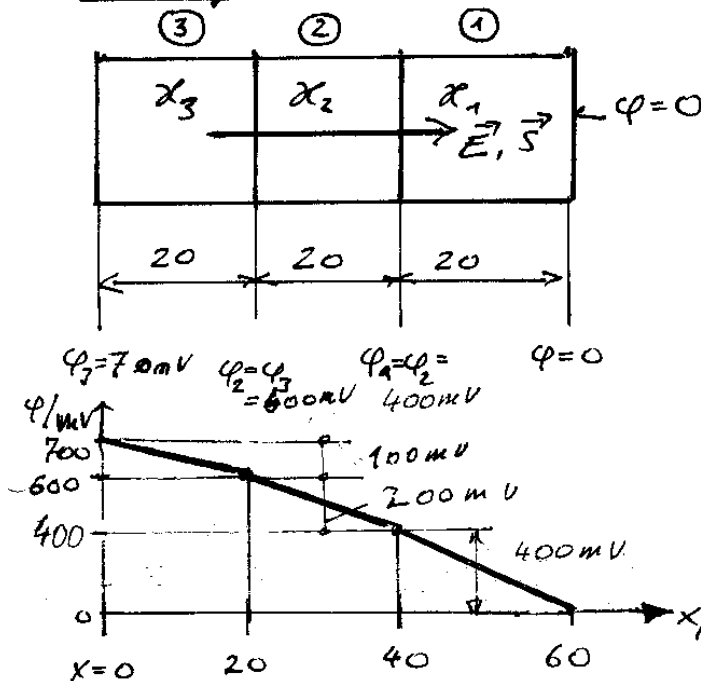
$$S = \frac{I}{A} = \frac{6 \text{ A}}{1,5^2 \text{ mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 3,4 \text{ A/mm}^2$$

$$\underline{\underline{E = 3,4 \text{ A/mm}^2 / 58 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} = 58,6 \frac{\text{mV}}{\text{m}}}}$$

2. Aufgabe

Alle Maße in Millimeter

$$A = b \cdot h = 40 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} = 40 \text{ mm}^2$$



Potentialverlauf

Die Grenzflächen der Gebiete befinden sich auf Äquipotentialflächen, daher wird das Strömungsfeld nicht gestört, es ist in allen Bereichen gleich!

Die Anordnung kann als Reihenschaltung von drei Widerständen aufgefasst werden.

Aufgrund der Aufgabenstellung sind alle Widerstände gleich lang: $l = 20 \text{ mm}$.

Außerdem haben alle Widerstände
gleichen Querschnitt $A = 40 \text{ cm}^2$.

Damit lautet der Gesamtwiderstand

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{\rho}{A}$$

$$R = \left(\frac{1}{1 \text{ S/cm}} + \frac{1}{2 \text{ S/cm}} + \frac{1}{4 \text{ S/cm}} \right) \cdot \frac{2 \text{ cm}}{0,4 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{\underline{R = 8,75 \Omega}}$$

Spannung am Widerstand

$$\underline{\underline{U}} = RI = 8,75 \Omega \cdot 0,08 \text{ A} = 0,7 \text{ V} = \underline{\underline{700 \text{ mV}}}$$

Stromdichte: $\underline{\underline{S}} = \frac{I}{A} = \frac{0,08 \text{ A}}{0,4 \text{ cm}^2} = \underline{\underline{0,2 \text{ A/cm}^2}}$

Feldstärke: $E = S/\sigma$

Gebiet 1: $\underline{\underline{E_1}} = 0,2 \text{ A/cm}^2 / 1 \text{ S/cm} = \underline{\underline{0,2 \text{ V/cm}}}$

Gebiet 2: $\underline{\underline{E_2}} = 0,2 \text{ A/cm}^2 / 2 \text{ S/cm} = \underline{\underline{0,1 \text{ V/cm}}}$

Gebiet 3: $\underline{\underline{E_3}} = 0,2 \text{ A/cm}^2 / 4 \text{ S/cm} = \underline{\underline{0,05 \text{ V/cm}}}$

Potentialverlauf

$$\varphi = -\int E dx = -E \cdot x + C$$

Gebiet 1: $\varphi_1 = -E_1(x - 40 \text{ mm}) + C$

bei $x = 60 \text{ mm}$ sei $\varphi_1 = 0$

$$\Rightarrow 0 = E_1(40 \text{ mm} - 60 \text{ mm}) + C$$

$$C = +E_1 \cdot 20 \text{ mm} = +0,2 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 2 \text{ cm} = +0,4 \text{ V}$$

$$\underline{\underline{\varphi_1 = -0,05 \frac{\text{V}}{\text{cm}} (x - 40 \text{ mm}) + 0,4 \text{ V}}}$$

$$\varphi_1(x = 40 \text{ mm}) = 0,4 \text{ V}; \quad \varphi_1(x = 60 \text{ mm}) = 0 \text{ V}$$

$$\text{Gebiet 2: } \varphi_2 = -E_2(x - 20\text{mm}) + C$$

Au der Stelle $x = 40\text{mm}$ müssen die Potentiale von Gebiet 1 und Gebiet 2 übereinstimmen

$$\varphi_2(x = 40\text{mm}) = \varphi_1(x = 40\text{mm}) = 0,4\text{V}$$

$$0,4\text{V} = -E_2(40\text{mm} - 20\text{mm}) + C$$

$$C = 0,4\text{V} + E_2 \cdot 20\text{mm} = 0,4\text{V} + 0,1 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 20\text{cm}$$

$$C = 0,6\text{V}$$

$$\varphi_2 = -0,1 \frac{\text{V}}{\text{cm}} (x - 20\text{cm}) + 0,6\text{V}$$

$$\varphi_2(x = 40\text{mm}) = 0,4\text{V}; \quad \varphi_2(x = 20\text{mm}) = 0,6\text{V}$$

$$\text{Gebiet 3: } \varphi_3 = -E_3 x + C$$

Au der Stelle $x = 20\text{mm}$ müssen die Potentiale von Gebiet 3 und Gebiet 2 übereinstimmen:

$$\varphi_3(x = 20\text{mm}) = \varphi_2(x = 20\text{mm}) = 0,6\text{V}$$

$$0,6\text{V} = -E_3 \cdot 20\text{mm} + C$$

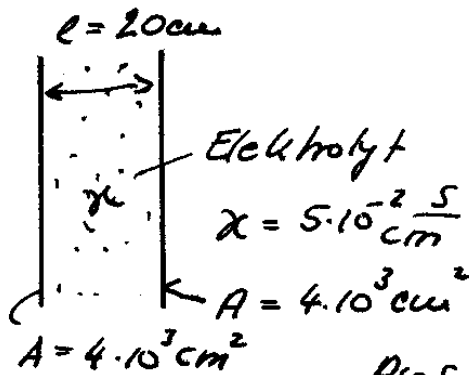
$$C = 0,6\text{V} + E_3 \cdot 20\text{mm} = 0,6\text{V} + 0,05 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 20\text{cm}$$

$$C = 0,7\text{V}$$

$$\varphi_3 = -0,05 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot x + 0,7\text{V}$$

$$\varphi_3(x = 0) = 0,7\text{V}; \quad \varphi_3(x = 20\text{mm}) = 0,6\text{V}$$

3. Aufgabe



$$R = \frac{l}{\chi A} = \frac{20 \text{ cm}}{0,05 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 4000 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{\underline{R = 0,1 \Omega}}$$

Aus $P = I^2 R$ folgt $I = \sqrt{P/R}$

$$\underline{\underline{I = \sqrt{\frac{750 \text{ W}}{0,1 \Omega}} = 86,6 \text{ A}}}$$

$$\underline{\underline{U = I \cdot R = 86,6 \text{ A} \cdot 0,1 \Omega = 8,66 \text{ V}}}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{U}{d} = \frac{8,66 \text{ V}}{20 \text{ cm}} = 0,433 \text{ V/cm}}}$$

4. Aufgabe Geometrie wie in Aufgabe 3!

a) Vorgegeben $E = 0,6 \text{ V/cm} \Rightarrow \underline{\underline{U = E \cdot l = \frac{0,6 \text{ V}}{\text{cm}} \cdot 30 \text{ cm} = 18 \text{ V}}}$

Widerstand: Aus $P = U^2/R$ folgt $R = U^2/P$

$$R = 18^2 \text{ V}^2 / 1000 \text{ W} = 0,324 \Omega$$

Plattenfläche: Aus $R = \frac{l}{\chi A}$ folgt $A = \frac{l}{\chi R}$

$$A = \frac{30 \text{ cm}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ S/cm} \cdot 0,324 \Omega} = 1851,9 \text{ cm}^2$$

Strom: $I = U/R = 18 \text{ V} / 0,324 \Omega = 55,6 \text{ A}$

b) $P = U \cdot I$

$$\underline{\underline{P = \frac{P}{V} = \frac{U \cdot I}{V} = \frac{E \cdot l \cdot S \cdot A}{l \cdot A} = E \cdot S = \chi E^2 = S^2/\chi}}}$$

5. Aufgabe

$$R = \frac{\ell}{\lambda A} = \frac{20 \text{ cm}}{0,1 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}} = 2 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10 \text{ V}}{2 \Omega} = 5 \text{ A}$$

$$S = \frac{I}{A} = \frac{5 \text{ A}}{100 \text{ cm}^2} = 0,05 \text{ A/cm}^2$$

$$E = \frac{U}{\ell} = \frac{10 \text{ V}}{20 \text{ cm}} = 0,5 \text{ V/cm}$$

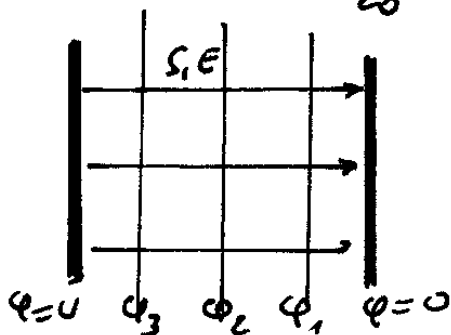
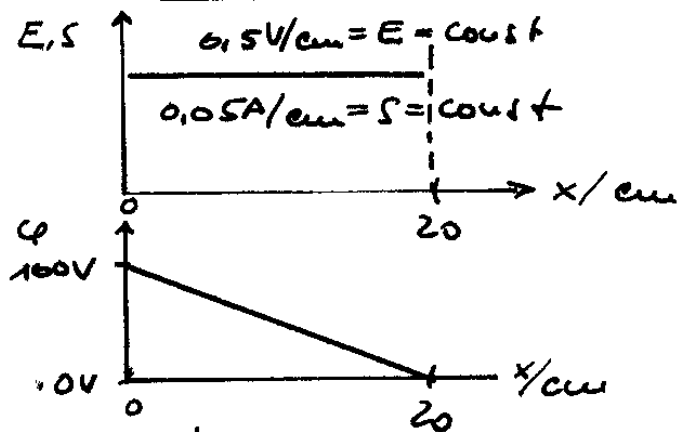
$$\varphi = - \int E dx = - 0,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot x + C$$

Bei $x = 20 \text{ cm}$ sei $\varphi = 0$

$$0 = - 0,5 \text{ V/cm} \cdot 20 \text{ cm} + C$$

$$C = 10 \text{ V}$$

$$\varphi = - 0,5 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot x + 10 \text{ V}$$



Äquipotentiallinien
verlaufen parallel
zu den Platten.

6. Aufgabe

Feldgleichungen für

Elektr. Feld

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$D \cdot 2\pi r l = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi r l}$$

$$\vec{E} = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{dr}{r}$$

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r + C$$

Am Außenleiter $r = R_a$ für $\varphi = 0!$

$$\varphi_{R_a} = 0 = -\frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln R_a + C$$

$$C = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln R_a$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln(R_a/r)$$

Am Innenleiter $r = R_i$ ist $\varphi = U$

$$U = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln(R_a/R_i)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(R_a/R_i)}$$

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(R_a/R_i)}$$

Strömungsfeld

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = I$$

$$S \cdot 2\pi r l = I$$

$$S = \frac{I}{2\pi r l}$$

$$E = \frac{S}{\chi} = \frac{I}{2\pi \chi l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{I}{2\pi \chi l} \frac{dr}{r}$$

$$\varphi = -\frac{I}{2\pi \chi l} \ln r + C$$

$$\varphi_{R_a} = 0 = -\frac{I}{2\pi \chi l} \ln R_a + C$$

$$C = \frac{I}{2\pi \chi l} \ln R_a$$

$$\varphi = \frac{I}{2\pi \chi l} \ln(R_a/r)$$

$$U = \frac{I}{2\pi \chi l} \ln(R_a/R_i)$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi \chi l}{\ln(R_a/R_i)}$$

$$G' = \frac{G}{l} = \frac{2\pi \chi}{\ln(R_a/R_i)}$$

Man erkennt: $\frac{C'}{G'} = \frac{\epsilon}{\chi}$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0}{\ln(R_o/R_i)}$$

$$G' = \frac{2\pi \sigma}{\ln(R_o/R_i)}$$

$$C' = \frac{2\pi \cdot 2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}}{\ln(2,5/0,6)}$$

$$G' = \frac{2\pi \cdot 10^{-4} \frac{S}{m}}{\ln(2,5/0,6)}$$

$$\underline{\underline{C' = 89,62 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}}}$$

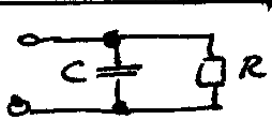
$$\underline{\underline{G' = 0,0004403 \frac{S}{m}}}$$

Kabel ist 10 km lang

$$C = C' \cdot l = 89,62 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 10^4 m \quad G = 0,0004403 \frac{S}{m} \cdot 10^4 m$$

$$\underline{\underline{C = 896,2 \mu F}}$$

$$\underline{\underline{G = 4,403 S}}$$



Ersatzschalt-
bild d. leer-
laufenden Kabels

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{G} = 0,227 \Omega}}$$

$$b) \quad E = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$Q = C \cdot U = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(R_o/R_i)} \cdot U$$

$$E = \frac{U}{\ln(R_o/R_i)} \cdot \frac{1}{r}$$

Die höchste Feldstärke tritt am Innenleiter auf

$$E_{\max} = \frac{U}{\ln(R_o/R_i)} \cdot \frac{1}{R_i} = \frac{1000V}{\ln(2,5)} \cdot \frac{1}{0,6 \text{ mm}}$$

$$\underline{\underline{E_{\max} = 1167,9 \text{ V/mm} \quad \parallel \quad Q = C \cdot U = 896,2 \mu AS}}$$

(1)

7. Aufgabe

Zylindersymmetrisches Problem. Die Feldstärke berechnet sich zu

$$E = \frac{U}{\ln(R_o/R_i)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\text{Es gilt } \frac{R_o}{R_i} = \frac{2R_o}{2R_i} = \frac{D_o}{D_i}$$

Gesucht ist die Feldstärke an der Oberfläche der Innenelektrode, dem Heizdraht

$$\rightarrow D_i = 0,06 \text{ m} \Rightarrow R_i = D_i/2 = 0,03 \text{ mm.}$$

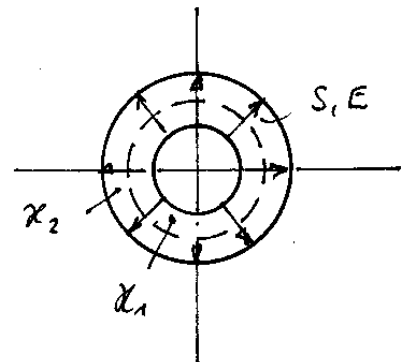
Somit folgt

$$E = \frac{U}{\ln(D_o/D_i)} \cdot \frac{2}{D_i} = \frac{120 \text{ V}}{\ln(20/0,06)} \cdot \frac{2}{0,06 \text{ mm}}$$

$$\underline{\underline{E = 688,6 \text{ V/mm}}}$$

8. Aufgabe

Der Strom beginnt am Innenzylinder, durchströmt ihn von innen nach außen zum Außenzylinder. Es handelt sich um ein zylindersymmetrisches Problem.



④

Der Ring wird von innen nach außen durchströmt. Der innerste Ring besteht aus Kupfer. Dann folgt ein Ring mit dem Innendurchmesser von 40 mm und dem Außendurchmesser von 80 mm, der eine Leitfähigkeit von $\chi_1 = 1 \text{ S/cm}$ aufweist. An diesem Ring, dem zweiten Ring, schließt sich ein dritter Ring mit dem Innendurchmesser von 80 mm und einem Außendurchmesser von 120 mm an, der die Leitfähigkeit von $\chi_2 = 2 \text{ S/cm}$ aufweist. Der äußere Ring ist wieder aus Kupfer.

Da Kupfer die Leitfähigkeit $\chi_{\text{Cu}} = 58 \text{ S} \cdot \text{m}/\text{mm}^2 = 580.000 \text{ S/cm}$ besitzt, also sehr viel leitfähiger ist als das Material der inneren Ringe, werden die Kupferringe bei der Lösung vernachlässigt!

Der Widerstand eines Zylinders berechnet sich aus der Formel

$$R = \frac{l \ln(R_a/R_i)}{2\pi \chi l}$$



*) In dieser Aufgabe liegt ein geschichteter Leitermaterial vor. Die Grenzschicht liegt auf einer Äquipotentialfläche, daher wird das Strömungsfeld nicht gestört. Man kann daher das Problem in zwei Teilprobleme, also in 2 in Reihe liegende Widerstände auffassen.

Widerstand R_1 : $\frac{40}{2} \text{ mm} \leq r \leq \frac{80 \text{ mm}}{2}$; χ_1 ; $l = 1 \text{ cm}$

$$R_1 = \frac{\ln(80/40)}{2\pi \cdot 1 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 1 \text{ cm}} = 0,110 \Omega$$

Widerstand R_2 : $\frac{80 \text{ mm}}{2} \leq r \leq \frac{120 \text{ mm}}{2}$; χ_2 ; $l = 1 \text{ cm}$

$$R_2 = \frac{\ln(120/80)}{2 \cdot \pi \cdot 2 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 1 \text{ cm}} = 0,032 \Omega$$

$$\underline{\underline{R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 = 0,142 \Omega}}$$

Spannung von innen nach außen:

$$\underline{\underline{U = R \cdot I = 0,142 \Omega \cdot 0,36 \text{ A} = 0,051 \text{ V}}}$$

(11)

4) Das Strömungsfeld

$$\text{Aus } \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = I$$

$$\text{folgt } S \cdot 2\pi r l = I$$

$$S = \frac{I}{2\pi r l} \cdot \frac{1}{r} = \frac{380 \mu\text{A}}{2\pi \cdot 10 \text{mm}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$S \approx \frac{5,7 \text{mA}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E = \frac{S}{\chi}$$

inneres Gebiet:

$$r = 20 \text{mm} : \chi_1 \rightarrow E_i = \frac{5,7 \text{mA}}{\text{mm} \cdot 15/\text{cm}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{57 \text{mV}}{r} = \frac{2,85 \text{mV}}{\text{mm}}$$

$$r = 30 \text{mm} : \chi_1 \rightarrow E_i = 1,9 \text{mV/mm}$$

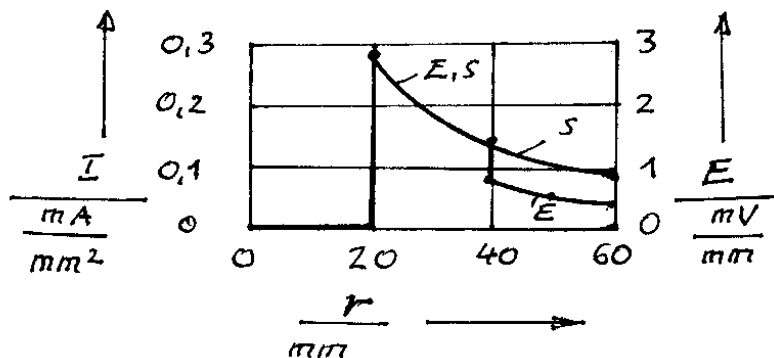
$$r = 40 \text{mm} : \chi \rightarrow E_i = 1,42 \text{mV/mm}$$

äußeres Gebiet

$$r = 40 \text{mm} : \chi_2 \rightarrow E_a = \frac{5,7 \text{mA}}{\text{mm} \cdot 25/\text{cm}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{28,5 \text{mV}}{r} = 0,71 \text{mV/mm}$$

$$r = 50 \text{mm} : \chi_2 \rightarrow E_a = 0,57 \text{mV/mm}$$

$$r = 60 \text{mm} : \chi_2 \rightarrow E_a = 0,475 \text{mV/mm}$$



Übung 6 - Verschiebungsstrom, Widerstände, geschichtete Materialien

1. Aufgabe

Aus einer Hülle fließt Ladung Q nach folgender Gesetzmäßigkeit ab: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-t/\tau}$.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Auf welche Größe ist die Ladung in der Hülle nach der Zeit $t = \tau$ gesunken? τ wird als Zeitkoeffizient oder (allerdings nicht zutreffend) als Zeitkonstante bezeichnet.

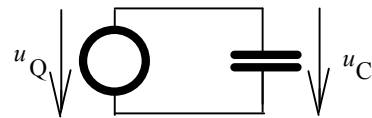
Welcher Strom ist mit der Ladungsänderung verbunden? Zeigen Sie, daß die Integration des Stromes von der Zeit $t = 0$ bis $t = \infty$ der Ladung in der Hülle zur Zeit $t = 0$ entspricht. Zeigen Sie, daß dies auch dem Produkt aus dem Strom zur Zeit $t = 0$ mit dem Zeitkoeffizienten τ entspricht.

2. Aufgabe

Erklären Sie anschaulich den Begriff des Verschiebungsstroms und des Konvektionsstromes und die damit verbundene Feldbedingung.

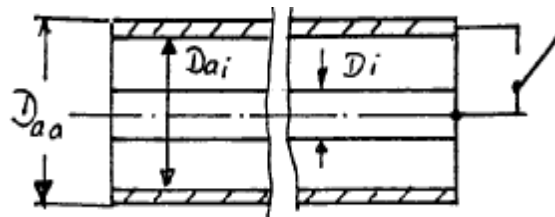
Beschreiben Sie ausführlich die Vorgänge an folgendem Schaltkreis:

Die Spannung u_Q ist zunächst eine Gleichspannung der Größe U und anschließend eine periodische, sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(2\pi f t)$. Welcher Strom fließt bei der Wechselspannung mit einer Amplitude von $u = 220\sqrt{2}$ V, einer Frequenz von $f = 50$ Hz und einer Kapazität von $C = 5$ nF.



3. Aufgabe

Berechnen Sie den Widerstand einer Koaxialleitung als Längswiderstand R_L und als Querwiderstand R_Q . Maße: $D_i = 1$ cm; $D_{ai} = 3$ cm; $D_{aa} = 3,5$ cm; $\kappa_L = 36$ Sm/mm² (Aluminium); $\kappa_{\text{isol}} = 0,001$ Sm/mm²; Kabellänge $l = 1000$ m.

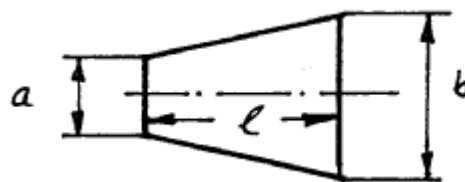


R_Q wenn Schalter offen

R_L wenn Schalter geschlossen

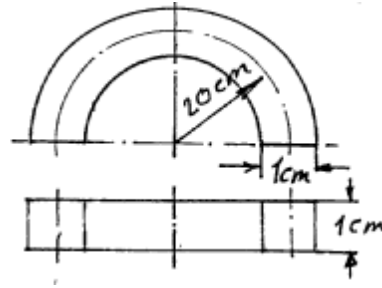
4. Aufgabe

Geben ist ein 0,1 mm dickes Blech, das die abgebildete Form hat. Wie groß ist näherungsweise sein Widerstand? ($a = 2$ cm, $b = 5$ cm, $l = 3,5$ cm, $d = 0,1$ mm, $\kappa = 56$ Sm/mm²).

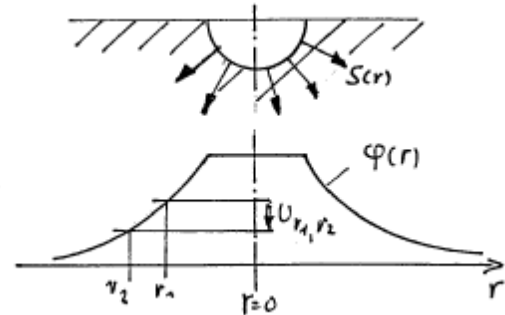


5. Aufgabe

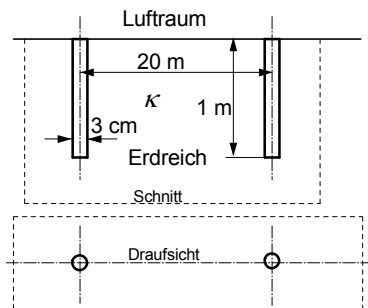
Gegeben ist ein Halbring mit quadratischem Querschnitt von $(1\text{ cm})^2$. Der mittlere Biegeradius beträgt 20 cm, das Material ist aus Kupfer. Wie groß ist der Widerstand des Ringes. Wie groß ist der Widerstand eines Stabes mit einer Länge, die dem mittlerem Bogen entspricht? (Stromdichte über Leiterquerschnitt konstant.)

**6. Aufgabe**

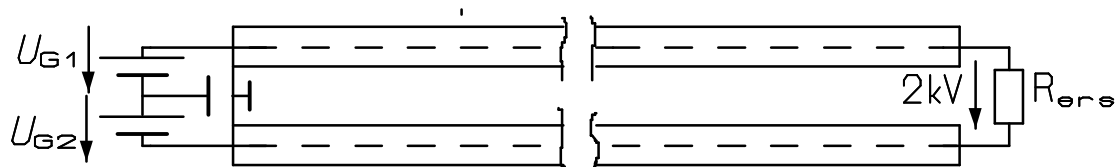
Berechnen Sie den Potentialverlauf eines Halbkugelerders. Geben Sie den Erdübergangswiderstand an, wenn der Erderradius 0,3 m beträgt. Was versteht man unter den Begriffen Berührungsspannung und Schrittspannung? Wie groß ist die Schrittspannung in einer Entfernung von 10 m und 20 m vom Erdermast bei einer Schrittweite von 0,8 m, wenn der Erder einen Strom von 10 kA führt und die Leitfähigkeit des Bodens mit 10^{-2} S/m angenommen wird? Wie groß ist die Berührungsspannung zum Erdermast in einem Abstand von 0,6 m?

**7. Aufgabe**

Zwei 1 m lange Metallstäbe sind senkrecht in den Boden getrieben. Sie haben einen runden Querschnitt, der Durchmesser beträgt 3 cm. Der Abstand zwischen beiden Stäben beträgt 20 m, die Bodenleitfähigkeit 10^{-2} S/m . Wie groß ist der Widerstand zwischen beiden Stäben? Es wird eine Spannung von 220 V zwischen beide Stäbe gelegt. Welche Stromdichte und welche elektrische Feldstärke stellt sich näherungsweise an der Oberfläche der Stäbe ein?

**8. Aufgabe**

Ein Großverbraucher wird über eine Energieleitung, die aus 2 Koaxialleitungen besteht, mit dem Generator verbunden, siehe Skizze. Die Leitungslänge beträgt 10 km. Der Verbraucher nimmt bei Vollast eine Leistung von 100 kW bei einer Klemmenspannung von 2000 V auf.



a) Wie groß ist der Ersatzwiderstand R_{ers} des Verbrauchers?

b) Der Verbraucher ist während des 24h-Tages 6 Stunden voll ausgelastet und während weiterer 2 Stunden nur zur Hälfte, in der übrigen Zeit ist er außer Betrieb.

Welcher Strom fließt in diesen Zeiten in den Leitern?

Welche mittlere Leistung nimmt der Verbraucher auf, welche Spitzenlast trat auf?

c) Die zulässige Stromdichte in den Leitern sei 1 A/mm^2 . Wie groß muß der Leiterdurchmesser sein?

d) Welche Übertragungsverluste entstehen, wie groß ist der Wirkungsgrad der Übertragung und wie groß muß die Spannung am Generator sein, damit am Verbraucher die erforderliche Spannung auftritt? Leiterwerkstoff ist Kupfer mit der Leitfähigkeit von 56 Sm/mm^2 . Welche Arbeit muß vom Generator geleistet werden?

e) Die zulässige elektrische Feldstärke sei 2 kV/mm . Wie groß muß aus Gründen der elektrischen Festigkeit die Isolierdicke der Koaxialleitung mindestens sein?

f) Welche elektrische Feldstärke herrscht im Leiter? Welche Ladungsträgerart findet sich im Kupferleiter, welche Beweglichkeit und welche Geschwindigkeit haben sie?

9. Aufgabe

Ein Koaxialkabel besteht aus einem geschichteten Dielektrikum. Der Durchmesser des Innenleiters sei 10 mm , der innere Durchmesser des äußeren Leiters sei 20 mm . Der Innenleiter ist mit einer 3 mm dicken Isolierung aus Polyäthylen überzogen (Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 2,3$, spezifischer Widerstand $\rho = 10^{17} \Omega\text{cm}$, Durchschlagfestigkeit $E_{\max} = 70 \text{ kV/mm}$, $\tan \delta = 10^{-4}$), anschließend besteht die Isolierung aus ölgetränktem Papier (Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 3,6$, spezifischer Widerstand $\rho = 10^{15} \Omega\text{cm}$, Durchschlagfestigkeit $E_{\max} = 30 \text{ kV/mm}$, $\tan \delta = 4 \cdot 10^{-4}$).

Ab welcher Frequenz ist die Stromdichte aufgrund der Leitfähigkeit des Isoliermaterials kleiner als diejenige aufgrund des Verschiebungsstroms?

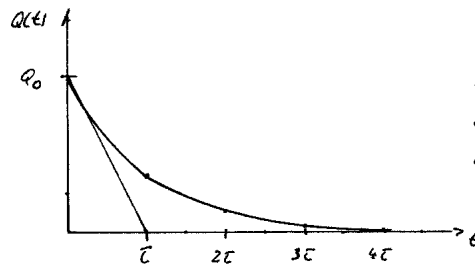
Für eine Gleichspannung und für eine Wechselspannung im technischen Frequenzbereich sind die Feldgrößen \mathbf{S} , \mathbf{E} , und \mathbf{D} zwischen Innen- und Außenleiter in Abhängigkeit vom Radius und die Spannungen zwischen den einzelnen Gebieten zu bestimmen und ihr Verlauf zu skizzieren. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Isolierstoffe nur eine begrenzte elektrische Festigkeit E_{\max} aufweisen. Die zulässige Spannung ist zu bestimmen. Wie groß ist die Flächenladungsdichte in der Grenzschicht?

Das Kabel sei 1 km lang. Für dieses Kabel ist eine Ersatzschaltung aus konzentrierten Bauelementen zu bestimmen. Wie groß ist die vom Kabel aufgenommene Wirkleistung, wie groß ist die Blindleistung? Wie ist die Spannungs- und Stromaufteilung in den Elementen? Es sind der Gleichspannungsfall und der Wechselspannungsfall zu berechnen..

Wie sieht die Ersatzschaltung des Kabels aus, wenn es mit der Schering-Brücke ausgemessen würde?

Lösungen

1. Aufgabe



$$e^{-1} = 0,368$$

$$e^{-2} = 0,135$$

$$e^{-3} = 0,050$$

$$e^{-4} = 0,018$$

$$e^{-5} = 0,007$$

$$Q(t=\tau) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{Q_0}{e} = Q_0 \cdot 0,368$$

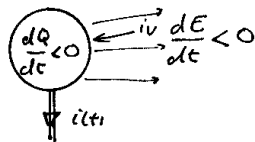
$$i(t) = -\frac{dQ}{dt} = -\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\int_0^{\infty} i(t) dt = \frac{Q_0}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt \quad \int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$$

$$\int_0^{\infty} i(t) dt = \frac{Q_0}{\tau} \left(-\tau\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = -Q_0 \left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^0} \right] = \underline{\underline{Q_0}}$$

$$i(t=0) = \frac{Q_0}{\tau} \Rightarrow \underline{\underline{i(t=0) \cdot \tau = Q_0}}$$

2. Aufgabe



Der Verschiebungsstrom tritt immer dann auf, wenn sich das elektr. Feld mit der Zeit ändert. Nach Maxwell gilt:

$$I_v = \oint \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{A} = \epsilon \oint \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Wird das elektrische Feld mit der Zeit stärker, tritt aus der Hülle der Verschiebungsstrom aus, wird das Feld kleiner, tritt in die Hülle d. Verschiebungsstrom ein. Wenn aber in die Hülle ein Strom eintritt, der über den Leiter wieder austritt, gilt $\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ bzw. $\text{div } \vec{J} = 0$

\Rightarrow i.o. Fall ist das Stromfeld quellen- u. senkenfrei!

liegt am Kondensator eine Gleichspannung, ist das Feld konstant, es entsteht kein Verschiebungsstrom.

liegt am Kondensator eine Wechselspannung an, entsteht ein zeitabhängiges Feld $E(t) = \hat{E} \cdot \sin \omega t$. Damit ist die Verschiebungsstromdichte $S(t) = \epsilon \cdot \frac{dE}{dt} = \epsilon \hat{E} \cdot \omega \cdot \cos \omega t$ verbunden. Da $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ ist, folgt, dass die Verschiebungsstromdichte gegenüber der Feldstärke um 90° phasenverschoben ist.

Berechnung des Stromes:

Es gilt

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\int i dt}{U}$$

$$\int i dt = C \cdot U$$

$$\frac{d}{dt} \int i dt = i = \frac{d}{dt} (C \cdot U) = C \frac{dU}{dt} + U \cdot \frac{dC}{dt}$$

Da der Kondensator zeitlich konstant ist, folgt

$$i = C \frac{dU}{dt}$$

$$u = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

$$\frac{dU}{dt} = \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos \omega t = \hat{u} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i = C \cdot \omega \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i = 5 \cdot 10^{-9} \frac{As}{V} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 220 V \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\underline{\underline{i = 481,7 \cdot 10^{-6} A \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)}}$$

3. Aufgabe

Die Kapazität des Koaxialkabels ist $C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(R_a/R_i)}$

Aus der Beziehung $R \cdot C = \epsilon/\sigma$ folgt:

$$\underline{\underline{R_q = \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \frac{1}{C} = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi \epsilon l} = \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi \sigma l}}}$$

$$R_q = \frac{\ln 3}{2\pi \cdot 0,001 \frac{Sm}{mm^2} \cdot 1000m} = \frac{\ln 3}{2\pi} \frac{\Omega}{m^2/mm^2} = \frac{\ln 3}{2\pi} \frac{\Omega}{10^6}$$

$$\underline{\underline{R_q = 0,175 \cdot 10^{-6} \Omega = 0,175 \mu\Omega}}$$

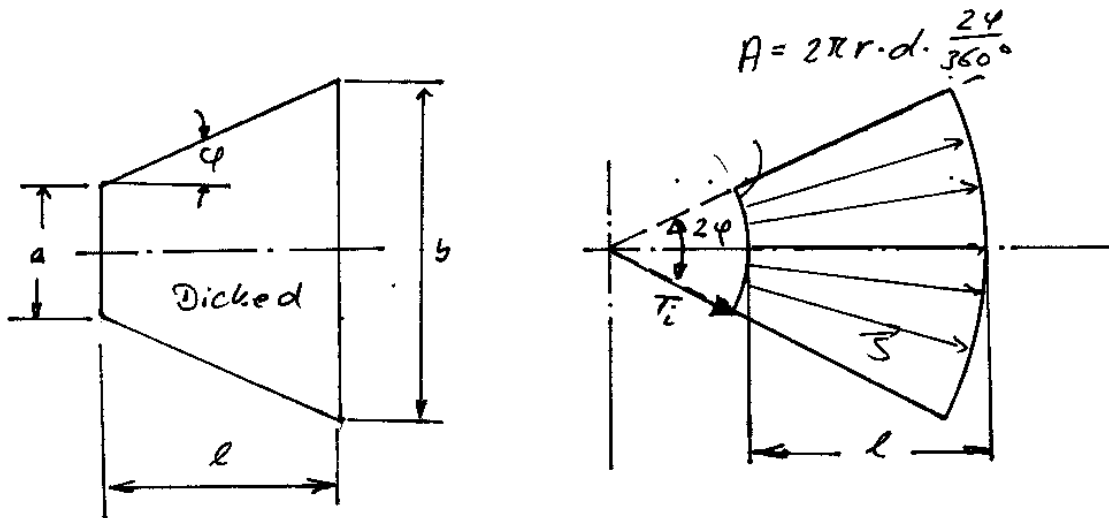
$$\underline{\underline{R_L = R_{Li} + R_{La} = \frac{l}{\sigma A_i} + \frac{l}{\sigma A_a} = \frac{l}{\sigma \pi R_i^2} + \frac{l}{\sigma \pi (R_a^2 - R_i^2)}}$$

$$\underline{\underline{R_{Li} = \frac{1000m}{56 \frac{Sm}{mm^2} \pi (5mm)^2} = 0,227 \Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_{La} = \frac{1000m}{56 \frac{Sm}{mm^2} \pi \left[\frac{17,5^2 - 15^2}{8,25} \right] mm^2} = 0,07 \Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_L = 0,227 \Omega + 0,07 \Omega = 0,3 \Omega}}$$

4. Aufgabe



$$a = 2 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, l = 3,5 \text{ cm}; d = 0,1 \text{ mm}; \chi = 56 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$$

Die rechte Form ist geschlossen lösbar. Dort gilt

$$R = \frac{U}{I}$$

$$\text{mit } I = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = S \cdot A = 2\pi r d \frac{2\phi}{360}$$

$$S(r) = \frac{I}{2\pi r d \frac{2\phi}{360}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_i+l} E \cdot dr = \int_{r_i}^{r_i+l} \frac{S(r)}{\epsilon} dr$$

$$U = \frac{1}{\epsilon} \int_{r_i}^{r_i+l} \frac{I}{2\pi r d \frac{2\phi}{360}} \cdot \frac{dr}{r}$$

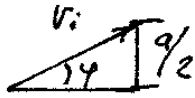
$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2I} \int_{r_i}^{r_i+l} \frac{I}{2\pi r d \frac{2\phi}{360}} \frac{dr}{r} = \frac{180^\circ}{2\pi \phi d} \ln r \Big|_{r_i}^{r_i+l}$$

$$R = \frac{180^\circ \cdot \ln\left(\frac{r_i+l}{r_i}\right)}{2\pi \chi \phi \cdot d}$$

Bestimmung von φ , r_i :

$$\tan \varphi = \frac{(b-a)/2}{l} = \frac{1,5}{3,5} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{1,5}{3,5} = \underline{\underline{23,2^\circ}}$$

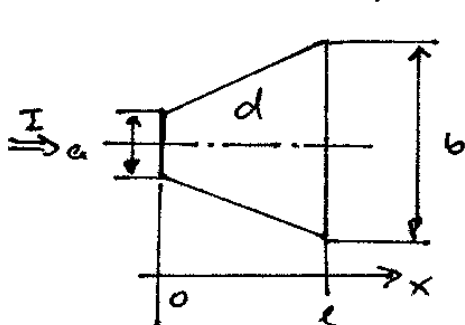
$$\sin \varphi = \frac{a/2}{r_i}$$



$$\underline{\underline{r_i}} = \frac{a/2}{\sin \varphi} = \frac{1 \text{ cm}}{\sin 23,2^\circ} = \underline{\underline{2,54 \text{ cm}}}$$

$$\underline{\underline{R}} = \frac{180^\circ \cdot l \cdot \left(\frac{2,54 \text{ cm} + 3,5 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm}} \right)}{2\pi \frac{565 \text{ m}}{\text{mm}^2} \cdot 0,0001 \text{ m} \cdot 23,2^\circ} = \underline{\underline{19 \mu\Omega}}$$

Eine Näherungslösung für die linke Form



$$S(x=0) = \frac{I}{a \cdot d}$$

$$S(x=l) = \frac{I}{b \cdot d}$$

$$\Delta S = S(x=0) - S(x=l) = \frac{I}{d} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$S(x) = S(x=0) + \frac{\Delta S}{l} \cdot x$$

$$S(x) = \frac{I}{a \cdot d} - \frac{I}{d} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{x}{l}$$

$$S(x) = \frac{I}{a \cdot d} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \frac{I}{d} \frac{x}{b \cdot l}$$

$$E(x) = \frac{S(x)}{x} = \frac{I}{x a d} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \frac{I \cdot x}{x b d l}$$

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{x=0}^{\ell} E(x) dx = \frac{I}{\epsilon_0 a d} \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx + \frac{I}{\epsilon_0 b d \ell} \int_0^{\ell} x dx \\
 &= \frac{I}{\epsilon_0 a d} \left[x - \frac{x^2}{2\ell} \right]_0^{\ell} + \frac{I}{\epsilon_0 b d \ell} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} \\
 &= \frac{I}{\epsilon_0 a d} \left[\underbrace{\ell - \frac{\ell^2}{2\ell}}_{\ell/2} \right] + \frac{I}{\epsilon_0 b d} \frac{\ell^2}{2\ell} = \frac{I}{\epsilon_0 a d} \frac{\ell}{2} + \frac{I}{\epsilon_0 b d} \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

$$U = \frac{I \cdot \ell}{2 \epsilon_0 d} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

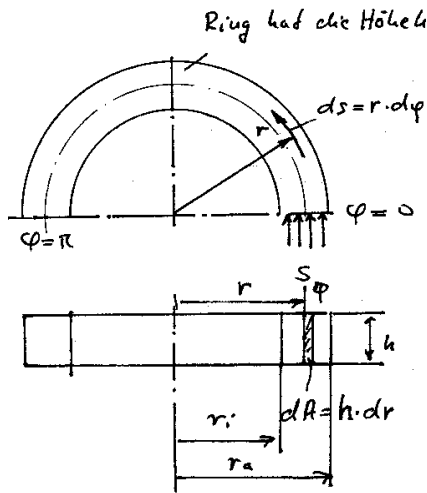
$$\underline{\underline{R = \frac{U}{I} = \frac{\ell \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{2 \epsilon_0 d}}}$$

$$R = \frac{3,5 \text{ cm} \left(\frac{1}{2 \text{ cm}} + \frac{1}{5 \text{ cm}} \right)}{2 \cdot 56 \text{ S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \cdot 0,1 \text{ mm}} = \frac{2,54}{2 \cdot 56 \cdot 0,1 \cdot 10^3} \Omega$$

$$\underline{\underline{R = 218,8 \mu\Omega}}$$

Der tatsächliche Widerstand liegt zwischen diesen beiden Grenzfällen.

5. Aufgabe



$$r_i = 20\text{cm} - 0,5\text{cm} = 19,5\text{cm}$$

$$r_a = 20\text{cm} + 0,5\text{cm} = 20,5\text{cm}$$

$$h = 1\text{cm}$$

$$\chi = 560 \cdot 10^3 \frac{\text{S}}{\text{cm}}$$

1. Lösung aus Definition

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{1}{\chi} \int \vec{S} \cdot d\vec{s}}{\int \vec{S} \cdot d\vec{A}}$$

$$R = \frac{\frac{1}{\chi} \int_0^\pi S \cdot r \cdot d\varphi}{\int_{r_i}^{r_a} S \cdot h \cdot dr}$$

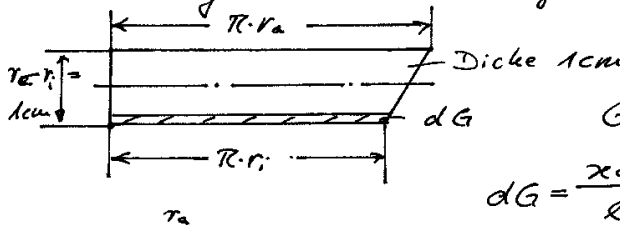
$$R = \frac{1}{\chi} \frac{S \cdot r \cdot \varphi \Big|_0^\pi}{S \cdot h \cdot \int_{r_i}^{r_a} dr}$$

$$R = \frac{\pi}{\chi \cdot h} \frac{1}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r}} = \frac{\pi}{\chi \cdot h} \frac{1}{\ln(r_a/r_i)}$$

$$R = \frac{\pi}{\chi \cdot h \cdot \ln(r_a/r_i)}$$

$$R = \frac{\pi}{560 \cdot 10^3 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 1\text{cm} \cdot \ln(\frac{20,5}{19,5})} = \underline{\underline{112,2 \mu\Omega}}$$

2. Lösung aus d. Parallelschaltf. von Leitern



$$G = \frac{1}{R} = \int dG$$

$$dG = \frac{\chi dA}{l} = \frac{\chi \cdot h \cdot dr}{\pi \cdot r} = \frac{\chi h}{\pi} \frac{dr}{r}$$

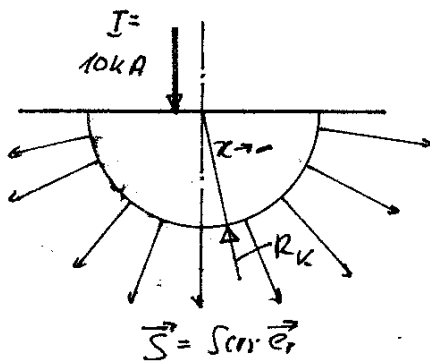
$$G = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\chi h}{\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\chi h}{\pi} \ln(\frac{r_a}{r_i}) \Rightarrow R = \frac{\pi}{\chi h \ln(r_a/r_i)}$$

Widerstand als gestrecktes Stab auffassen mit dem Querschnitt $A = 1\text{cm}^2$ (also wie vorgegeben) und der Länge des mittleren Radius bzw. Freyradius

$$l = \pi \cdot R$$

$$R = \frac{\pi \cdot R}{\chi A} = \frac{\pi \cdot 20\text{cm}}{560 \cdot 10^3 \frac{\text{S}}{\text{cm}} \cdot 1\text{cm}^2} = \underline{\underline{112,2 \mu\Omega}}$$

6. Aufgabe



Der Strom wird eingepreßt in die Halbkugel. Da keine Gegen Elektrode vorhanden ist, breitet sich der Strom eingestört von der kugelförmigen Elektrode radial aus. Nach dem Gaußschen Satz folgt daher:

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = I$$

$$\vec{S} = S(r) \cdot \vec{e}_r$$

Dann ist $\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = S(r) \int dA = S(r) \cdot 2\pi r^2$

Also gilt

$$S(r) \cdot 2\pi r^2 = I$$

$$S(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$E(r) = \frac{I}{2\pi \kappa r^2}$$

$$\underline{\underline{\varphi = - \int E_r dr = - \frac{I}{2\pi \kappa} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi \kappa r} + C}}$$

Als Erdübergangswiderstand bezeichnet man den Widerstand des Erden zwischen dem Ort des Erdens und dem unendlich entfernten Ort:

$$R_E = \frac{\varphi_{\text{Erd}} - \varphi_0}{I}$$

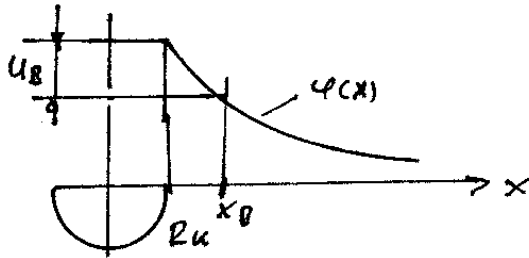
Da das Potential für $r \rightarrow \infty$ Null ist, folgt für den Erdübergangswiderstand

$$\underline{\underline{R_E = \varphi_E = \frac{I}{2\pi \kappa R_k} / I = \frac{1}{2\pi \kappa R_k}}}$$

Mit $R_k = 0,3 \text{ m}$ und $\kappa = 10^{-2} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ folgt

$$\underline{\underline{R_E = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 0,3} \Omega = 53,05 \Omega}}$$

Die Berührungsspannung ist diejenige Spannung zwischen dem Ort x_B und der Elektrode

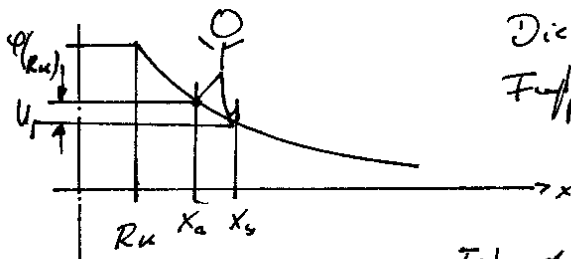


$$U_B = \varphi|_{\text{Elektrode}} - \varphi|_{x_B}$$

$$U_B = \frac{10.000 \text{ A}}{2\pi \cdot 10^{-2} \frac{\text{S}}{\text{m}}} \left[\frac{1}{0,3 \text{ m}} - \frac{1}{0,6 \text{ m}} \right]$$

$$\underline{\underline{U_B = 265,3 \text{ kV}}}$$

Durch die Stromeinprägung entsteht ein Potentialgefälle um den Erder.



Die Spannung zwischen den Fußpunkten x_a , x_b wird als Schrittspannung bezeichnet

Ist die Schrittweite $0,5 \text{ m}$ folgt ein enger Abstand von 10 m zum Erdmittelpunkt:

$$\begin{aligned} U_S &= \varphi|_{10 \text{ m}} - \varphi|_{10,5 \text{ m}} = \frac{I}{2\pi R 10 \text{ m}} - \frac{I}{2\pi R 10,5 \text{ m}} \\ &= \frac{I}{2\pi R} \left[\frac{1}{10 \text{ m}} - \frac{1}{10,5 \text{ m}} \right] = \frac{10.000 \text{ A}}{2\pi \cdot 10^{-2} \frac{\text{S}}{\text{m}}} \left[\frac{1}{10 \text{ m}} - \frac{1}{10,5 \text{ m}} \right] \end{aligned}$$

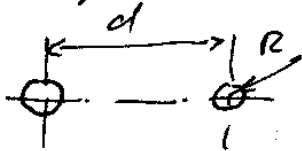
$$\underline{\underline{U_S = 757,9 \text{ V}}}$$

Bei einer Entfernung von 20 m :

$$\underline{\underline{U_S = 194,1 \text{ V}}}$$

7. Aufgabe

7. Aufgabe
Aus dem elektrischen Feld entnimmt man für die Kapazität zweier paralleler Leiter:



$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(d/R)}$$

Wegen $\frac{C}{\epsilon} = \frac{E}{\chi}$ folgt

$$R = \frac{1}{C} = \frac{E}{\chi} \cdot \frac{1}{C} = \frac{\ln(d/R)}{\chi \cdot \pi \cdot \epsilon}$$

$$R = \frac{\ln(20/0,015)}{10^{-2} \frac{S}{m} \cdot \pi \cdot 1 \mu m} = \frac{7,2}{\frac{\pi}{100}} \cdot \Omega$$

$$R = \frac{720}{\pi} \Omega = 229,2 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220V}{229,2 \Omega} = 0,95986 A$$

$$S = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi R \cdot l} = \frac{I}{2\pi \cdot 1,5 \text{ cm} \cdot 1 \text{ m}}$$

$$S = \frac{0,95986 A}{2\pi \cdot 15 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm}} = 0,0102 \mu A / \text{mm}^2$$

$$S = 10,2 \mu A / \text{mm}^2 \text{ an der Staboberfläche}$$

$$E = \frac{S}{\chi} = \rho \cdot S \quad \rho = \frac{1}{\chi} = 100 \Omega \cdot m$$

$$E = 100 \Omega \cdot m \cdot 10,2 \cdot 10^{-6} \frac{A}{\text{mm}^2}$$

$$= 100 \frac{V}{\Omega} \cdot m \cdot 10,2 \cdot 10^{-6} \frac{A}{10^{-3} m \cdot mm}$$

$$E = 1,02 \text{ V/m an der Staboberfläche}$$

8. Aufgabe

a)

$$\underline{P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 R}$$

$$\underline{R_V} = \frac{U^2}{P} = \frac{2000^2 \text{ V}^2}{100 \cdot 10^3 \text{ VA}} = \underline{40 \Omega}$$

$$b) \quad \overline{p(t)} = P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

$$P = \frac{1}{24 \text{ h}} \left[\int_0^{6 \text{ h}} 100 \cdot 10^3 \text{ W} dt + \int_0^{2 \text{ h}} \frac{100}{2} \cdot 10^3 \text{ W} dt \right]$$

$$= \frac{1}{24 \text{ h}} \left[10^5 \cdot 6 \text{ Wh} + 50 \cdot 10^3 \cdot 2 \text{ Wh} \right]$$

$$\underline{P} = \frac{600 \text{ kWh} + 100 \text{ kWh}}{24 \text{ Wh}} = \underline{29,17 \text{ kW}}$$

c)

$$\underline{I} = \sqrt{P/R} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^3 \text{ VA}}{40 \text{ V/A}}} = \underline{50 \text{ A}}$$

$$I = S \cdot A = S \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{d} = \sqrt{\frac{4I}{\pi S}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \text{ A}}{\pi \cdot 1 \text{ A/mm}^2}} = 7,98 \text{ mm} \approx \underline{8 \text{ mm}}$$

$$(A = \frac{I}{S} = 50 \text{ mm}^2 \text{ falls Leiterquerschnitt gesucht})$$

d) Leiterswiderstand

$$R_L = \frac{\rho}{\lambda A} = \frac{10\,000\ \mu\Omega}{56 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2} \cdot 50,3\ \text{mm}^2} = 3,55\ \Omega$$

Leitungswiderstand

$$\underline{R_L = 2 \cdot R_L = 7,1\ \Omega}$$

Bei Vollast

Leitungs- oder Übertragungsverluste

$$I_{\text{max}} = \frac{P}{U} = \frac{100.000\ \text{VA}}{2000\ \text{V}} = 50\ \text{A}$$

$$\underline{P_{\text{verl}}} = I_{\text{max}}^2 \cdot R_L = 50^2\ \text{A}^2 \cdot 7,1\ \Omega = \underline{17,75\ \text{kW}}$$

$$\underline{\eta} = \frac{P_{\text{nutz}}}{P_{\text{verl}} + P_{\text{nutz}}} = \frac{100}{17,75 + 100} = \underline{0,849}$$

$$U_G = I \cdot R_V + U_N = 50\ \text{A} \cdot 7,1\ \Omega + 2000\ \text{V}$$

$$\underline{U_{G_{\text{min}}}} = 2355\ \text{V}$$

Bei Teillast

$$I_{\text{Teil}} = \frac{P/2}{U} = \frac{100.000\ \text{VA}}{2 \cdot 2000\ \text{V}} = 25\ \text{A}$$

$$\underline{P_{\text{verl}}} = (25\ \text{A})^2 \cdot 7,1\ \Omega = \underline{4,438\ \text{kW}}$$

$$\underline{\eta} = \frac{100}{100 + 4,44} = \underline{0,958}$$

$$\underline{U_{G_T}} = 25\ \text{A} \cdot 7,1\ \Omega + 2000\ \text{V} = \underline{2178\ \text{V}}$$

Der Generator leistet die Arbeit

$$W_G = U_{G_1} \cdot I_{\max} \cdot 6h + U_{G_2} \cdot I_{\text{rel}} \cdot 2h$$

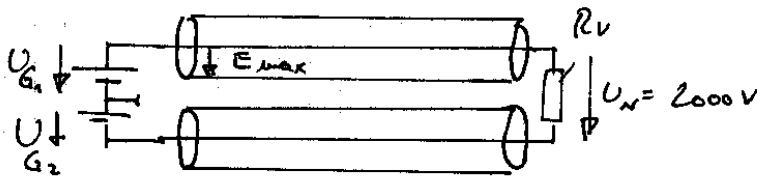
$$= 2355V \cdot 50A \cdot 6h + 2178V \cdot 25A \cdot 2h = 706,5kWh + 109,1$$

$W_G = 815,4 kWh$

e) Es gilt bei Koaxialen Systemen:

$$E = \frac{U}{\ln(R_a/R_i)} \cdot \frac{1}{r}$$

Die max. Feldstärke tritt bei der größten Spannung am Innenleiter auf.



$$U_G = U_{G_1} + U_{G_2}$$

$$U_{G_1} = U_{G_2} = \frac{U}{2}$$

$$U_{G_1, \max} = \frac{2355V}{2} = 1178V$$

$$R_i = \frac{d}{2} = 4mm$$

$$U = R_i \cdot E_{\max} \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$$

$$\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) = \frac{U_{G_1}}{R_i \cdot E_{\max}} \Rightarrow \frac{R_a}{R_i} = e^{\frac{U}{R_i \cdot E_{\max}}}$$

$$R_a = R_i \cdot e^{\frac{U_{G_1}}{R_i \cdot E_{\max}}} = 4mm \cdot e^{\frac{1178V}{4mm \cdot 2kV/mm}}$$

$$R_a = 4mm \cdot 1,159 = 4,635mm$$

$d_{\text{Isol.erd.}} = (4,635 - 4) mm = 0,635mm$

#1 Elektrische Feldstärke im Leiter:

$$\underline{\underline{E_L = \frac{S}{\chi} = \frac{1 \text{ A/mm}^2}{56 \text{ S/mm}^2} = \frac{1}{56} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,0179 \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

In Metallen, also auch in Kupfer sind die Elektronen die freien Ladungsträger, sie übernehmen den Stromtransport.

In Metallen gilt für die Raumladungsdichte der freien Ladungsträger:

$$\rho = n \cdot e$$

Die damit verbundene Stromdichte ist

$$S = n \cdot e \cdot v$$

Wegen $S = \chi \cdot E$ folgt

$$\chi = \frac{S}{E} = \frac{n \cdot e \cdot v}{E} = n \cdot e \cdot b$$

Also ist die Beweglichkeit

$$b = \frac{\chi}{n \cdot e} = \frac{\chi}{\rho}$$

$\rho = 13,5 \cdot 10^3 \text{ As/cm}^3$, siehe Übg. 6, 1. A-A.

$$\underline{\underline{b = \frac{56 \text{ S/mm}^2}{13,5 \cdot 10^3 \text{ As/cm}^3} = \frac{560 \cdot 10^3 \text{ S/cm}}{13,5 \cdot 10^3 \text{ As/cm}^3} = 41,5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}}}$$

$$\underline{\underline{v = b \cdot E = 41,5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot \frac{1}{56} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{41,5}{56 \cdot 100} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,074 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}}$$

9. Aufgabe

1) Es gilt $S = S_R + S_V$

$$S = \alpha E + \epsilon \frac{dE}{dt}$$

Die elektrische Feldstärke sei sinusförmig,
dann gilt $E = \hat{E} \cdot \sin \omega t$

$$\frac{dE}{dt} = \omega \hat{E} \cdot \cos \omega t$$

Also ist

$$S = \alpha \cdot \hat{E} \cdot \sin \omega t + \omega \epsilon \cdot \hat{E} \cdot \cos \omega t$$

Der zweite Term ist frequenzabhängig, er steigt proportional zur Frequenz. Vernachlässigt man die Zeitabhängigkeit und setzt beide Terme gleich, läßt sich daraus eine Kreisfrequenz bestimmen, bei der die Amplituden übereinstimmen:

$$\alpha \hat{E} = \omega \cdot \epsilon \cdot \hat{E},$$

also $\omega = \frac{\alpha}{\epsilon} = 2\pi f$

Ist die Frequenz der Feldstärke größer, wird das 3-fache, dann bestimmt ein wesentlicher der zweite Term die Stromdichte

$$S \approx \omega \cdot \epsilon \cdot \hat{E} \cdot \cos \omega t$$

Bestimmung der Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ in m^2 ②
 den beiden Isolierstoffen

Isolierstoff 1: Polyäthylen

$$\rho_1 = \frac{1}{10^{17} \Omega \cdot \text{cm}} = \frac{1}{10^{15} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}}}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 = 2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\omega_1 = \frac{\kappa_1}{\epsilon_1} = \frac{1}{10^{15} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot 2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = \frac{4,9 \cdot 10^{-5}}{\text{s}}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 7,82 \cdot 10^{-6} \text{ Hz} \Rightarrow f > 3f_1 = 23,5 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$$

Bei der Frequenz oberhalb $7,82 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}$ dominiert der Verdrängungsstrom, bei kleineren Frequenzen kann der Leitfähigkeitsstrom vernachlässigt werden.

Isolierstoff 2: Öl-Papier-Isolierung

$$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{10^{15} \Omega \cdot \text{cm}} = \frac{1}{10^{13} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}}}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 = 3,6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\rho_2 \cdot \epsilon_2} = \frac{1}{10^{13} \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot 3,6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = \frac{3,14 \cdot 10^{-3}}{\text{s}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

$$f > 3f_2 = 15 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

2) Feldgrößen

③

a) Gleichstrom \rightarrow Strömungsfeld bekennt das Feld

$$\text{Es gilt } \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = I$$

$$S_r \cdot 2\pi r \cdot l = I$$

$$S_r = \frac{I}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r}$$

Es gilt

$$S_r = \alpha \cdot E_r$$

$$\rightarrow E_r = \frac{S_r}{\alpha} = \frac{I}{2\pi \alpha l} \cdot \frac{1}{r}$$

Gebiet 1:

$$E_{r1} = \frac{I}{2\pi \alpha_1 l} \cdot \frac{1}{r}$$

Gebiet 2:

$$E_{r2} = \frac{I}{2\pi \alpha_2 l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E \cdot dr = \int_{r_i}^{r_{12}} E_1 \cdot dr + \int_{r_{12}}^{r_a} E_2 \cdot dr$$

$$U = \frac{I}{2\pi \alpha_1 l} \int_{r_i}^{r_{12}} \frac{dr}{r} + \frac{I}{2\pi \alpha_2 l} \int_{r_{12}}^{r_a} \frac{dr}{r}$$

$$U = \frac{I}{2\pi l} \left[\frac{1}{\alpha_1} \ln r \Big|_{r_i}^{r_{12}} + \frac{1}{\alpha_2} \ln r \Big|_{r_{12}}^{r_a} \right]$$

$$U = \frac{I}{2\pi l} \left[\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{r_{12}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{r_a}{r_{12}} \right]$$

$$U = \frac{I}{2\pi l} \left[\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{d_{12}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{d_a}{d_{12}} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi l \cdot U}{\frac{\ln(d_{12}/d_i)}{\alpha_1} + \frac{\ln(d_a/d_{12})}{\alpha_2}}$$

Einsetzen liefert

(4)

$$S_r = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{U}{\frac{\ln(d_{1,2}/d_i)}{\epsilon_1} + \frac{\ln(d_a/d_{1,2})}{\epsilon_2}} \cdot \frac{1}{r}$$

oder

$$S_r = \frac{U}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \rho_2 \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

und daraus mit

$$E_r = \frac{1}{\epsilon} S_r = \rho \cdot S_r$$

Gebiet innen $d_i < d < d_{1,2}$

$$E_{r,i} = \frac{\rho_1 \cdot U}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \rho_2 \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_{r,i} = \frac{U}{\ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Gebiet außen $d_{1,2} < d < d_a$

$$E_{r,a} = \frac{\rho_2 \cdot U}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \rho_2 \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_{r,a} = \frac{U}{\frac{\rho_1}{\rho_2} \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Dann bestimmen sich die Felder der elektrischen ⁽⁵⁾ Verschiebungsdichte zu:

innen: $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$

$$D_i = \frac{\epsilon_i \cdot \epsilon_0 \cdot U}{\ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

außen:

$$D_a = \frac{\epsilon_a \cdot \epsilon_0 \cdot U}{\frac{\rho_1}{\rho_2} \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Bestimmung der zulässigen Spannung aus der maximalen Feldstärke; die immer am kleinsten Radius der Gebiete liegt:

Gebiet innen:

$$U_{zul} = r_i \cdot E_{ri} \max\left(\ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)\right)$$

Gebiet außen:

$$U_{zul} = r_{1,2} \cdot E_{ra} \max\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)\right)$$

Einsetzen der Werte:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{10^{17} \Omega \cdot \text{cm}}{10^{15} \Omega \cdot \text{cm}} = 100 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{100}$$

$$\ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) = \ln\left(\frac{16}{10}\right) = \ln 1,6 = 0,47$$

$$\ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right) = \ln\left(\frac{20}{16}\right) = 0,2231$$

$$r_i = 5 \text{ mm}$$

$$r_{1,2} = 8 \text{ mm}$$

$$\text{Gebiet Ima: } E_{i \max} = 70 \text{ kV/mm}$$

$$U_{zul} = 5 \text{ mm} \cdot 70 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \left(0,47 + \frac{1}{100} \cdot 0,2231\right)$$

$$\underline{\underline{U_{zul} = 165,3 \text{ kV}}}$$

$$\text{Gebiet IIa: } E_{a \max} = 30 \text{ kV/mm}$$

$$U_{a \text{ zul}} = 8 \text{ mm} \cdot 30 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \left(\underbrace{100 \cdot 0,47 + 0,2231}_{= 47,2231}\right)$$

$$\underline{\underline{U_{a \text{ zul}} = 11.333,54 \text{ kV}}}$$

Die kleinere der beiden Spannungen ist die zulässige Spannung, damit die zulässige Feldstärke nicht überschritten wird:

$$\underline{\underline{U_{zul} = 165,3 \text{ kV}}}$$

(7)

Berechnung und Zeichnungen der Feldgrößen S, E, D

$U = 165,3 \text{ kV}$

$$S(r) = \frac{U}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{i2}}{d_i}\right) + \rho_2 \ln\left(\frac{d_a}{d_{i2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

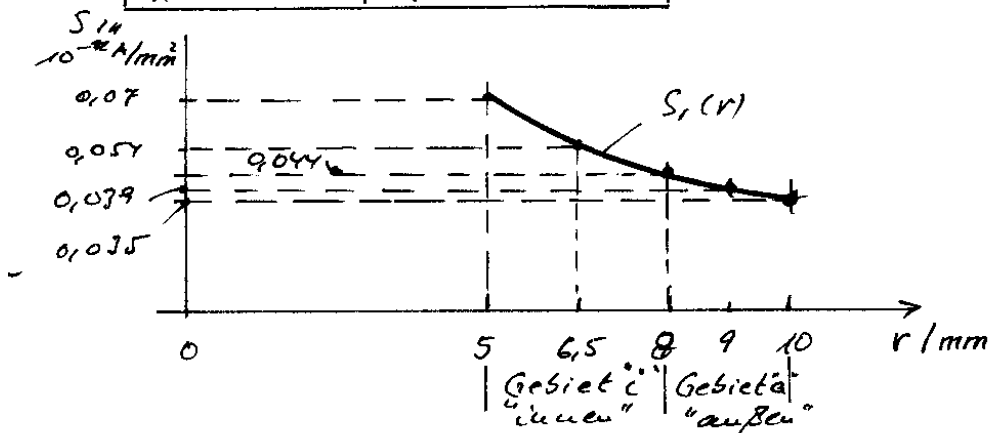
$$S(r) = \frac{165,3 \text{ kV}}{10^{17} \Omega \cdot \text{cm} \cdot 0,47 + 10^{15} \Omega \cdot \text{cm} \cdot 0,2231} \cdot \frac{1}{r}$$

$$S(r) = \frac{165,3 \cdot 10^3 \text{ V}}{(100 \cdot 0,47 + 0,2231) \cdot 10^{15} \frac{\text{V} \cdot \text{cm}}{\text{A}}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$S(r) = \frac{165,3}{47,2231} \cdot \frac{10^{-12} \text{ A}}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{r} = 3,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$S(r) = 0,35 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{r}$$

r/mm	$S(r)/\text{A}/\text{mm}^2$
5	$0,07 \cdot 10^{-12}$
6,5	$0,054 \cdot 10^{-12}$
8	$0,044 \cdot 10^{-12}$
9	$0,039 \cdot 10^{-12}$
10	$0,035 \cdot 10^{-12}$



Aus der Stromdichte wird die Feldstärke bestimmt

⑧

$$E = \frac{1}{\sigma} \cdot J = \rho \cdot J$$

Wegen der unterschiedlichen Gebiete mit ρ_1, ρ_2 muß die Feldstärke gebietsweise berechnet werden:

Wobei:

Gebiet 1: (innen) $\rho_1 = 10^{12} \Omega \cdot \text{cm}; \rho_2 = 10^{15} \Omega \cdot \text{cm}; \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{100}$

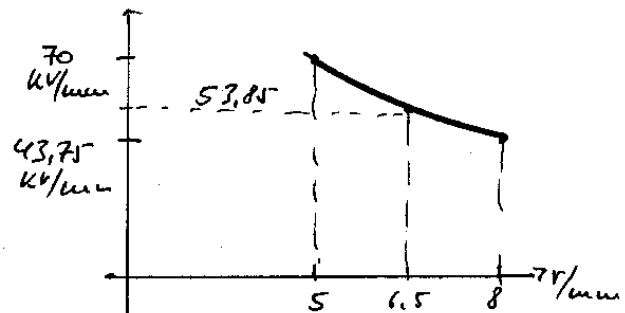
$$E_1 = \rho_1 \cdot \frac{U}{\rho_1 \cdot \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \rho_2 \cdot \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_1 = \frac{U}{\ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \ln\left(\frac{d_a}{d_{1,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_1 = \frac{165,3 \text{ kV}}{0,47 + \frac{0,2231}{100}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{165,3 \text{ kV}}{0,472231} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_2 = 350 \text{ kV} \cdot \frac{1}{r}$$

r / mm	E / kV/mm
5	70
6,5	53,85
8	43,75



Die Spannung zwischen Innenleiter bis zur Grenzschicht $r_{1,2}$ 8 mm

$$U_{1,2} = \int_{r_i}^{r_{1,2}} E dr = 350 \text{ kV} \int_{5 \text{ mm}}^{8 \text{ mm}} \frac{dr}{r} = 350 \text{ kV} \cdot \ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$\underline{\underline{U_{1,2} = 164,5 \text{ kV}}}$$

Gebiet 2: außen

9

$$E_2 = \rho_2 \frac{U}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{i2}}{d_i}\right) + \rho_2 \ln\left(\frac{d_s}{d_{i2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

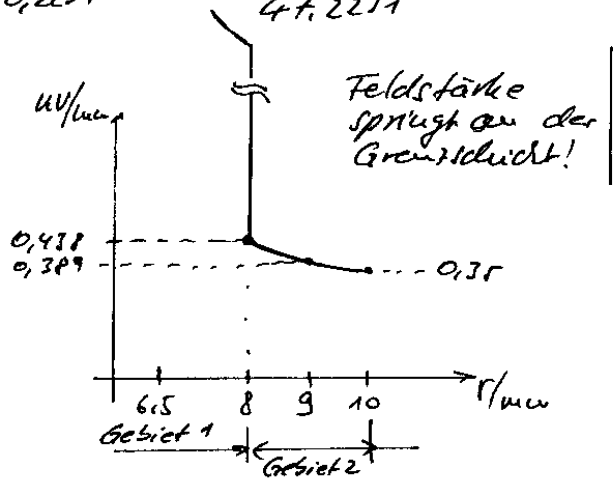
$$E_2 = \frac{U}{\frac{\rho_1}{\rho_2} \ln\left(\frac{d_{i2}}{d_i}\right) + \ln\left(\frac{d_s}{d_{i2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

mit $\rho_1/\rho_2 = 100$ folgt

$$E_2 = \frac{165,3 \text{ kV}}{100 \cdot 0,47 + 0,2231} \cdot \frac{1}{r} = \frac{165,3 \text{ kV}}{47,2231} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_2 = 3,5 \text{ kV} \cdot \frac{1}{r}$$

r/mm	E ₂ /kV/mm
8	0,438
9	0,389
10	0,35



Spannung zwischen Grenzschicht und Außenleiter

$$\underline{U_2 = 3,5 \text{ kV} \cdot \ln\left(\frac{20}{16}\right) = 0,781 \text{ kV}}$$

$$U = U_1 + U_2 = 164,5 \text{ kV} + 0,781 \text{ kV}$$

$$\underline{\underline{U = 165,28 \text{ kV} \approx 165,3 \text{ kV}}}$$

Elektrische Verschiebungsdichte

(10)

$$\underline{D = \epsilon \cdot E = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E}$$

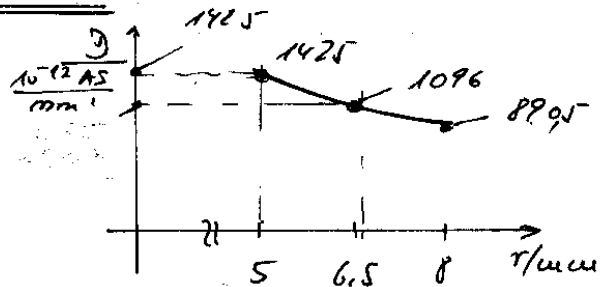
Gebiet 1 $\Rightarrow \epsilon_{r1} = 2,3$

$$D_1(r) = 2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm} \cdot 350 \cdot 10^3 V \cdot \frac{1}{r}$$

$$D_1(r) = 712,4 \cdot 10^{-9} \frac{AS}{m} \cdot \frac{1}{r} = \frac{712,4 \cdot 10^{-9} AS}{10^3 mm} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\underline{D_1(r) = 712,4 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{mm} \cdot \frac{1}{r}}$$

r/mm	$D_1 / \frac{10^{-12} AS}{mm^2}$
5	142,5
6,5	109,6
8	89,05



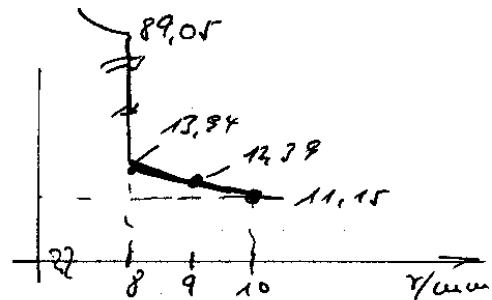
Gebiet 2 $\Rightarrow \epsilon_{r2} = 3,6$

$$D_2(r) = 3,6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm} \cdot 3500 \frac{V}{r}$$

$$D_2(r) = 111,5 \cdot 10^{-9} \frac{AS}{m} \cdot \frac{1}{r} = \frac{111,5 \cdot 10^{-9} AS}{1000 mm} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\underline{D_2(r) = 111,5 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{mm} \cdot \frac{1}{r}}$$

r/mm	$D_2 / \frac{10^{-12} AS}{mm^2}$
8	13,94
9	12,39
10	11,15



Verschiebungsdichte springt an der Grenzfläche!

Flächenladung in der Grenzschicht:

$$\sigma = (\epsilon_{r2} \rho_2 - \epsilon_{r1} \rho_1) \epsilon_0 \cdot S_m$$

S_m ist die Stromdichte in der Grenzschicht

$$S_m(r = r_{Grenz}) = 0,044 \cdot 10^{-12} \frac{A}{mm^2}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{r2} \cdot \rho_2 - \epsilon_{r1} \cdot \rho_1 &= 3,6 \cdot 10^{16} \frac{\text{V} \cdot \text{mm}}{\text{A}} - 2,3 \cdot 10^{18} \frac{\text{V} \cdot \text{mm}}{\text{A}} \\ &= -2,264 \cdot 10^{18} \frac{\text{V} \cdot \text{mm}}{\text{A}} \end{aligned}$$

$$\sigma = -2,264 \cdot 10^{18} \frac{\text{V} \cdot \text{mm}}{\text{A}} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V} \cdot 1000 \text{mm}} \cdot 0,044 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma = -881,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{18} \cdot \frac{10^{-24}}{10^3} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}$$

$$\underline{\underline{\sigma = -881,6 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}}}$$

In der Grenzschicht befindet sich eine negative Flächenladung.

Anderer Berechnungsweg:

$$\sigma = D_{n2} - D_{n1} \quad \text{in der Grenzschicht.}$$

$$D_{n2} = 13,94 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}$$

$$D_{n1} = 890,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}$$

Wurden schon berechnet, also in

$$\sigma = (13,94 - 890,5) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}$$

$$\underline{\underline{\sigma = -876,6 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}}}$$

(Abweichung nur aufgrund v. Rundungsfehler!)

= Ende des Gleichspannungsfalls =

12

b) Wechselstromfall

Für das Feld wird die elektrische Verschiebungsdichte bestimmt:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$D_r \cdot 2\pi r l = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{2\pi r l} \cdot \frac{1}{r}$$

Aus $D = \epsilon \cdot E$

folgt $E_r = \frac{1}{\epsilon} D = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \cdot \frac{1}{r}$

Gebiet 1: $E_{r1} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 l} \cdot \frac{1}{r}$

Gebiet 2: $E_{r2} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_2 l} \cdot \frac{1}{r}$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E dr = \int_{r_i}^{r_{1,2}} E dr + \int_{r_{1,2}}^{r_a} E dr$$

Analog zum Gleichstromfall folgt:

$$U = \frac{Q}{2\pi l} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{r_a}{r_{1,2}}\right) \right]$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi l U}{\frac{\ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right)}{\epsilon_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_{1,2}}\right)}{\epsilon_2}}$$

$$D = \frac{Q}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r} =$$

$$D = \frac{U}{\frac{\ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right)}{\epsilon_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_{1,2}}\right)}{\epsilon_2}} \cdot \frac{1}{r}$$

13

Die elektrische Feldstärke

$$E = \frac{1}{\epsilon} \cdot D$$

Gebiet 1:

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \cdot D$$

$$E_1 = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_{i,2}}{r_i}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{r_a}{r_{i,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Gebiet 2:

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{r_{i,2}}{r_i}\right) + \ln\left(\frac{r_a}{r_{i,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Das Strömungsfeld

$$S = \chi \cdot E$$

Gebiet 1:

$$S_1 = \frac{\chi_1 \cdot U}{\ln\left(\frac{r_{i,2}}{r_i}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{r_a}{r_{i,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Gebiet 2:

$$S_2 = \frac{\chi_2 \cdot U}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{r_{i,2}}{r_i}\right) + \ln\left(\frac{r_a}{r_{i,2}}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

(14)

Berechnung der FeldgrößenElektrische Verschiebungsdichte

Dazu ist zunächst die Spannung U_{zul} zu bestimmen, dazu müssen die max. Feldstärken verwendet werden:

Gebiet 1: $E_{max} = 70 \text{ kV/mm}$

$$U_{1zul} = E_{1max} \cdot r_i \cdot \left(\ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_{1,2}}\right) \right)$$

$$E_{1max} = 70 \text{ kV/mm} \quad ; \quad r_i = 5 \text{ mm} \quad ; \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{2,3}{3,6} = 0,639$$

$$\ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right) = \ln\left(\frac{d_{1,2}}{d_i}\right) = \ln\left(\frac{16}{10}\right) = \ln 1,6 = 0,47$$

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_{1,2}}\right) = \ln\left(\frac{d_2}{d_{1,2}}\right) = \ln\left(\frac{20}{16}\right) = 0,2231$$

$$U_{1zul} = 70 \frac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 5 \text{ mm} (0,47 + 0,639 \cdot 0,2231) = 214,4 \text{ kV}$$

Gebiet 2:

$$U_{2zul} = E_{2max} \cdot r_{1,2} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \ln\left(\frac{r_{1,2}}{r_i}\right) + \ln\left(\frac{r_2}{r_{1,2}}\right) \right)$$

$$U_{2zul} = 30 \frac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 8 \text{ mm} \left(\frac{1}{0,639} \cdot 0,47 + 0,2231 \right) = 230,06 \text{ kV}$$

Da $U_{1zul} < U_{2zul}$ ist die Spannung U_{1zul} die Spannung mit der in folgenden gerechnet wird:

$$\underline{\underline{U = 214,4 \text{ kV}}}$$

15

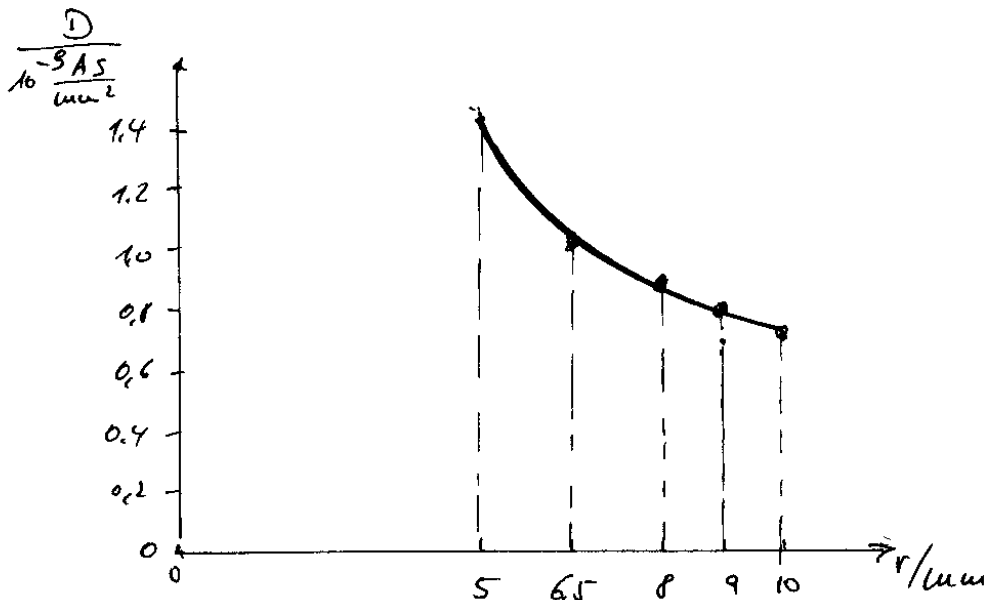
$$D = \frac{214,4 \text{ kV}}{\left(\frac{0,47}{2,3} + \frac{0,2231}{3,6}\right) \frac{1}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{r}$$

Mit $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ folgt:

$$D = \frac{8,85 \cdot 10^{-15} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 214,4 \cdot 10^3 \text{ V}}{0,26632} \cdot \frac{1}{r}$$

$$D = 7,125 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{r}$$

r/mm	$D / \frac{10^{-9} \cdot \text{As}}{\text{mm}^2}$
5	1,425
6,5	1,096
8	0,891
9	0,792
10	0,713



Die elektrische Feldstärke

(16)

Gebiet 1: $E_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \cdot D$

$$E_1 = \frac{1}{2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-15} \frac{As}{Vm}} \cdot 7,125 \cdot 10^{-9} \frac{As}{mm} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\underline{\underline{E_1 = 350 \text{ kV} \cdot \frac{1}{r}}}$$

Feldstärkeverlauf wie im Gleichstromfall!

Spannung zwischen Innenleiter bis zur Grenzschicht:

$$U_1 = 350 \text{ kV} \int_{r_i}^{r_2} \frac{dr}{r} = 350 \text{ kV} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_i}\right)$$

$$\underline{\underline{U_1 = 164,5 \text{ kV}}}$$

Gebiet 2:

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_2} \cdot D = \frac{7,125 \cdot 10^{-9} \frac{As}{mm}}{3,1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-15} \frac{As}{Vm}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\underline{\underline{E_2 = 226,3 \text{ kV} \cdot \frac{1}{r}}}$$

Sprung nicht so stark wie vorher!

Feldstärke an der Grenzschicht

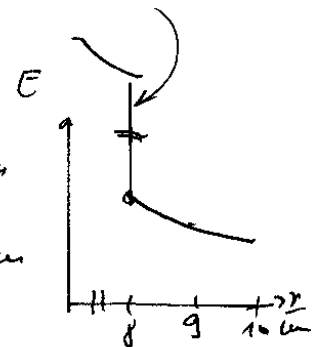
$$E_2(r = r_{1,2} = 8 \text{ mm}) = 28,29 \text{ kV/mm}$$

$$E_2(r = 9 \text{ mm}) = 25,14 \text{ kV/mm}$$

$$E_2(r = 10 \text{ mm}) = 22,63 \text{ kV/mm}$$

Spannung Grenzschicht - Außenradius

$$\underline{\underline{U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_2 dr = 226,3 \text{ kV} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 226,3 \text{ kV} \cdot \ln\left(\frac{10}{8}\right) = 50,5 \text{ kV}}}$$



(17)

$$U = U_1 + U_2 = 164,5 \text{ kV} + 50,5 \text{ kV}$$

$$U = 215 \text{ kV} \approx 214,4 \text{ kV}$$

Die Stromdichte bedingt durch Eigenleitung:

$$S_{\text{E}} = \alpha \cdot E = \frac{E}{\rho}$$

$$\text{Gebiet 1: } S_1 = E_1 / \rho_1 = \frac{350 \text{ kV}}{10^{-8} \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{mm}} \cdot \frac{1}{\text{V}}$$

$$S_{12} = 0,35 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{\text{V}}$$

r/mm	S in $10^{-12} \text{ A}/\text{mm}^2$
5	0,07
6,5	0,054
8	0,044

Stromdichte bedingt durch Feldstärkeänderung:

$$S_{\text{V}} = \frac{dD}{dt} = \omega \cdot D = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 7,125 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{\text{V}}$$

$$S_{1V} = 2,24 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{\text{V}}$$

r/mm	S in $10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$
5	0,448
6,5	0,345
8	0,3

Unterschied zwischen den Stromdichten
 \Rightarrow Faktor 10^6 !

(18)

Gebiet 2 :
Leitfähigkeit: $S_{2x} = \frac{E_2}{\rho_2} = \frac{226,3 \text{ kV}}{10^{16} \Omega \text{ mm}} \cdot \frac{1}{r}$

$$S_{2x} = 22,63 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

r/mm	S in $10^{-12} \text{ A}/\text{mm}^2$
8	2,83
9	2,51
10	2,26

Diese Stromdichte springt an der Grenzfläche!

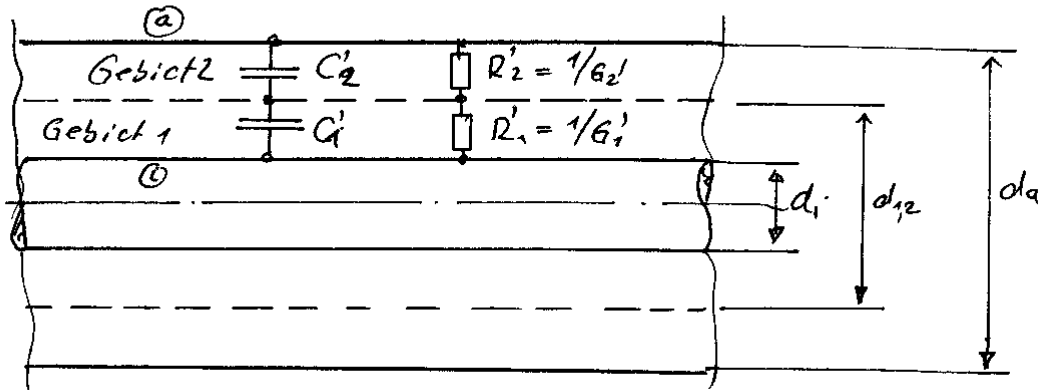
Stromdichte bedingt durch Feldänderung:
hier gibt es keinen Gebietsunterschied,
da die Verschiebungsdichte gebietsunabhängig ist!

r/mm	S in $10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$
8	0,3
9	0,249
10	0,224

$$S = 2,24 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{mm}} \cdot \frac{1}{r}$$

(19)

3) Nachbildung durch konzentrierte Parameter



Es gilt $C = C'e$ $R = R'e$

$\Rightarrow C' = C/e$ $R' = R/e$

Koaxiales System

$$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(d_2/d_1)} \Rightarrow C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(d_2/d_1)}$$

Gebiet 1:
$$C' = \frac{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0}{\ln(d_{12}/d_1)} = \frac{2\pi \cdot 2,3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}}{\ln(16)}$$

$$C' = 272,1 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

Bestimmung des Widerstandes aus dem Leitwert $R = \frac{1}{G}$

wegen $\frac{G}{C} = \frac{1}{\rho \epsilon}$ bzw. $\frac{G'}{C'} = \frac{1}{\rho \epsilon}$

folgt $G' = \frac{C'}{\rho \epsilon} = \frac{2\pi}{\rho \ln(d_2/d_1)}$

$$\text{bzw. } G_1' = \frac{2\pi}{\rho_1 \ln\left(\frac{d_{12}}{\alpha_i}\right)} = \frac{2\pi}{10^{17} \Omega \cdot \text{cm} \cdot \ln\left(\frac{16}{10}\right)}$$

$$G_1' = \frac{2\pi}{10^{15} \Omega \cdot \text{m} \ln(1,6)}$$

$$G_1' = 13,37 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \cdot 10^{-15}$$

$$\Rightarrow R_1' = \frac{1}{G_1'} = 74,8 \cdot 10^{+12} \Omega \cdot \text{m}$$

(Ist das Kabel 100 m lang, hat es zwischen Innen- und Außenleiter einen Widerstand von $R = \frac{R_1'}{l} = \frac{74,8 \cdot 10^{12}}{100} \Omega = 748 \text{ G}\Omega$.)

Gebiet 2:

$$C_2' = \frac{2\pi \cdot 3,6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}}{\ln\left(\frac{20}{16}\right)} = 897,1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$G_2' = \frac{2\pi}{10^{15} \Omega \cdot \text{cm} \ln\left(\frac{20}{16}\right)} = \frac{2\pi}{10^{13} \Omega \cdot \text{m} \cdot 0,2231}$$

$$R_2' = \frac{10^{13} \Omega \cdot \text{m} \cdot 0,2231}{2\pi}$$

$$R_2' = 355,1 \cdot 10^9 \Omega \cdot \text{m}$$

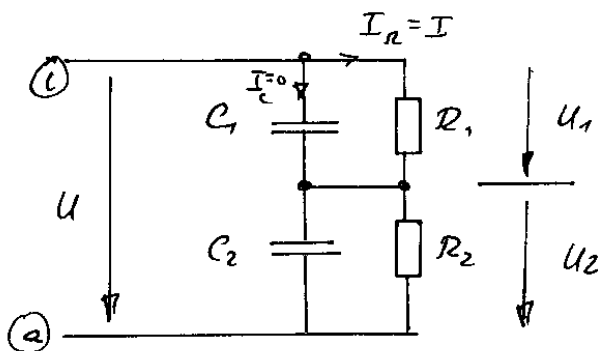
Das Kabel ist 1km lang, dann folgt (21)

$$C_1 = C_1' \cdot 1000 \text{ m} = 272,1 \cdot \mu\text{F}$$

$$R_1 = \frac{R_1'}{l} = \frac{74,8 \cdot 10^{12} \Omega \cdot \text{m}}{1000 \text{ m}} = 74,8 \text{ G}\Omega$$

$$C_2 = C_2' \cdot l = 897,1 \cdot \mu\text{F}$$

$$R_2 = 355,1 \text{ M}\Omega$$



Gleichspannungsfall $U = 165,3 \text{ kV}$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U = \frac{74,8 \cdot 10^9}{74,8 \cdot 10^9 + 355,1 \cdot 10^6} \cdot 165,3 \text{ kV}$$

$$\underline{U_1 = 164,5 \text{ kV}}; \quad \underline{U_2 = U - U_1 = 0,8 \text{ kV}}$$

$$\underline{R_{\text{Ges}}} = R_1 + R_2 = 75,16 \cdot \text{G}\Omega$$

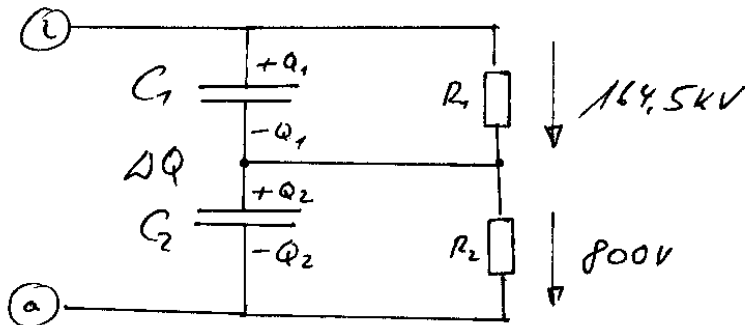
$$\underline{C_{\text{ges}}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{272,1 \cdot 897,1}{272,1 + 897,1} \mu\text{F} = \underline{208,8 \mu\text{F}}$$

$$I = \frac{U}{R} = 165,3 \text{ kV} / 75,16 \text{ G}\Omega$$

$$\underline{I = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ A}} \Rightarrow \underline{P = U \cdot I = 165,3 \text{ kV} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 0,364 \text{ W}}$$

(22)

Die Ladungen auf den einzelnen Kondensatoren:



$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 272,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 164,5 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$Q_1 = 44,76 \cdot 10^{-3} \text{ As}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 897,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 800 \text{ V}$$

$$Q_2 = 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ As}$$

Au der Verbindung wird von C_1 auf C_2 die Ladung $-Q_1 = -44,76 \cdot 10^{-3} \text{ As}$ geschoben.

Durch die Spannung wird an C_2 die Ladung

$$Q_2 = 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ As}$$

gebunden.

Es existiert daher zwischen den Kondensatoren C_1 und C_2 ein Ladungsüberschuss von

$$\Delta Q = -44,76 \cdot 10^{-3} \text{ As} + 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ As} = -44,04 \cdot 10^{-3} \text{ As},$$

diese Ladg. befindet sich in der Trennschicht und bildet dort die Flächenladungsdichte σ .

(23)

Wird die Flächenladungsdichte mit der Fläche multipliziert, ergibt daher ΔQ herauskommen

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \sigma \cdot A = \sigma \cdot 2\pi r_i \cdot l = \\ &= -881,6 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ mm} \cdot 1000 \cdot \text{m} \\ \Delta Q &= -44,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As} \cdot \text{m}}{\text{mm}} \quad \leftarrow = 10^3 \cdot \text{mm}! \\ \underline{\underline{\Delta Q}} &= \underline{\underline{-44,3 \cdot 10^{-6} \text{ As}}}\end{aligned}$$

Wechselspannungsfall $U = 214,4 \text{ kV}$

⇒ ACHTUNG: Es handelt sich um den Scheitelwert der Spannung, die die größte maximale Feldstärke hervorruft. Alle Größen, die im Wechselstromfall bisher berechnet wurden stellen daher Scheitelwerte dar.

Die Wechselspannung sei sinusförmig

$$u = 214,4 \text{ kV} \cdot \sin \omega t = 214,4 \text{ kV} \cdot \sin(2\pi f t)$$

mit $f = 50 \text{ Hz}$; Der Effektivwert dieser Spannung ist dann

$$\underline{\underline{U_{\text{eff}}}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{151,6 \text{ kV}}}$$

(24)

Da die Kondensatoren das Feld bestimmen, bestimmen sie auch die Spannungsverteilung:

$$\underline{\underline{I_c}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C_{ges}}} = j\omega C_{ges} \cdot U$$

$$\underline{\underline{I_c}} = j \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 208,8 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 151,6 \text{ kV}$$

$$\underline{\underline{I_c}} = j \cdot 9,94 \text{ A}$$

Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.

Die Spannung an C_1

$$U_{C_1} = \frac{\underline{I_c}}{j\omega C_1} = \frac{9,94 \text{ A}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 272,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}}}$$

$$\underline{\underline{U_{C_1}}} = 116,28 \text{ kV} \Rightarrow \hat{u}_1 = 164,4 \text{ kV}$$

$$\underline{\underline{U_{C_2}}} = U - U_{C_1} = 35,32 \text{ kV} \Rightarrow \hat{u}_2 = 49,95 \text{ kV}$$

Strom durch Widerstand R_1

$$\underline{\underline{I_{R_1}}} = \frac{U_{C_1}}{R_1} = \frac{116,28 \text{ kV}}{74,8 \cdot 10^9 \Omega} = \underline{\underline{1,555 \cdot 10^{-6} \text{ A}}}$$

Strom durch Widerstand R_2 :

$$\underline{\underline{I_{R_2}}} = \frac{U_{C_2}}{R_2} = \frac{35320 \text{ V}}{355,1 \text{ M}\Omega} = \underline{\underline{99,46 \cdot 10^{-6} \text{ A}}}$$

(25)

Wirkleistung aufgrund d. Leitfähigkeit!

$$P = P_1 + P_2 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2$$

$$P = (6,56 \cdot 10^{-6} \text{ A})^2 \cdot 748 \cdot 10^9 \Omega + (99,46 \cdot 10^{-6} \text{ A})^2 \cdot 355,1 \cdot 10^6 \Omega$$

$$\underline{\underline{P_2 = 0,182 \text{ mW} + 3,513 \text{ W} = 3,695 \text{ W}}}$$

Blindleistung

$$Q = \frac{I_C^2}{\omega C}$$

$$Q_1 = \frac{I_C^2}{\omega C_1} + \frac{I_C^2}{\omega C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{I_C^2}{\omega} = \frac{I_C^2}{\omega \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$Q = \frac{I_C^2}{\omega C_{\text{ges}}} = \frac{9,94^2 \text{ A}^2}{2\pi 50 \text{ s}^{-1} \cdot 208,8 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ VA}$$

$$\underline{\underline{Q = 1,5 \cdot 10^6 \text{ VA}}}$$

Wirkleistung aufgrund der Polarisation:

$$P_V = \omega \cdot \epsilon \cdot U^2 \cdot A \cdot \text{and}$$

$$\text{Kondensator 1: } P_{V_1} = 2\pi 50 \text{ s}^{-1} \cdot 272,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (116,28 \text{ kV})^2 \cdot 10^{-4}$$

$$P_{V_1} = 115,58 \text{ W}$$

Kondensator 2:

$$P_{V_2} = 2\pi 50 \text{ s}^{-1} \cdot 197,1 \mu\text{F} \cdot (35,32 \text{ kV})^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} =$$

$$P_{V_2} = 140,63 \text{ W}$$

$$\underline{\underline{P_{V_{\text{ges}}} = 256,21 \text{ W}}}$$

Daraus bestimmt sich der Verlustfaktor des Kabels zu

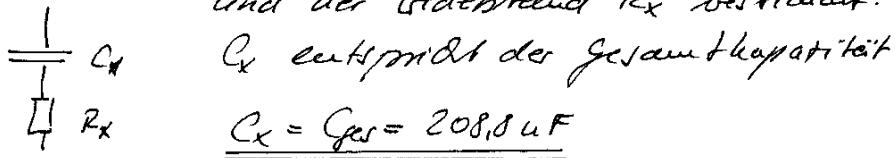
$$\tan \delta = \frac{P}{Q} = \frac{256,21 \text{ W} + 3,695 \text{ W}}{1,5 \cdot 10^6 \text{ VA}}$$

$$\tan \delta = 1,73 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta \approx 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,569^\circ$$

4) Schering-Brücke

Mittels der Scheringbrücke wird die Kapazität C_x und der Widerstand R_x bestimmt.



Außerdem wird der Verlustfaktor bestimmt $\tan \delta$. Daraus berechnet sich der Widerstand zu

$$R_x = \frac{\tan \delta}{\omega C_x} = 2,677 \Omega$$

Der Widerstand R_p berechnet sich zu

$$R_p = \frac{1}{\omega C_x \tan \delta} = \frac{1}{2\pi \cdot 208,8 \mu\text{F} \cdot 1,73 \cdot 10^{-4}}$$

$$R_p = 88,12 \text{ M}\Omega$$

Wegen für C_x die zuvor bestimmte Gesamtkapazität $C_{\text{ges}} = 208,8 \mu\text{F}$ und für $\tan \delta$ den oben bestimmte Wert $\tan \delta = 1,73 \cdot 10^{-4}$ eingesetzt wird.

Ersatzschaltz



ENDE

Fragen zum elektrischen Feld und zum Strömungsfeld

1	Was ist die kleinste Ladungsmenge?
2	Was sagt der Ladungserhaltungssatz aus?
3	Welche vier Grundarten idealer elektrischer Ladungen gibt es?
4	Wie lautet das Coulombsche-Gesetz, was sagt es aus?
5	Wie wird die elektrische Feldstärke aus dem Coulombschen-Gesetz hergeleitet?
6	In welchem Zusammenhang stehen elektrische Feldstärke und elektrische Verschiebungsdichte?
7	Warum wurden diese beiden Felder eingeführt?
8	Was versteht man unter Permittivität oder Dielektrizitätskonstante, was unter elektrischer Feldkonstante und was unter Permittivitätszahl oder Dielektrizitätszahl? Die Frequenzabhängigkeit der Permittivität ist zu erläutern.
9	Wie sind die Dielektrizitätszahlen von Luft, Polyäthylen (PE), Polyvinylchlorid (PVC, Öl-Papier-Isolierungen, Transformator-Öl und Wasser?
10	Was versteht man unter Influenz? Warum stehen Feldlinien immer senkrecht auf Metalloberflächen oder auf Oberflächen anderer leitfähiger Materialien? Was ist Spitzenwirkung?
11	Was versteht man unter elektrischem Fluß? Wie lautet die Definitionsgleichung?
12	Was sagt der Gaußsche-Satz aus? Ist er auf das elektrische Feld beschränkt?
13	Wie bestimmt man für die idealen Ladungen die elektrische Verschiebungsdichte? (Alle Formeln sind anzugeben und zu erläutern.)
14	Wie verhalten sich an der Grenzschicht Metallelektrode - Dielektrikum die Flächenladungsdichte σ im Metall und der Betrag der Verschiebungsdichte D im Dielektrikum?
15	Eine elektrische Ladung wird im elektrischen Feld über einen geschlossenen Weg geführt. Welche Arbeit wird dabei verrichtet?
16	Wie kommt man zur Definition der Spannung?
17	Wie groß ist das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke und warum hat es diesen Wert?
18	Welche Abhängigkeit vom Weg weist die Spannung im elektrischen Feld auf?
19	Wie kommt es zum Begriff des Potentials?
20	Wie kann man das Potential anschaulich deuten?
21	Was sind Äquipotentiallinien (Äquipotentialflächen)? Warum stehen sie senkrecht auf den Feldlinien? Warum sind die Oberflächen leitender Materialien Äquipotentialflächen?
22	Für Punktladung, Linienladung und Flächenladung sind die Gleichungen für das \mathbf{D} -, \mathbf{E} - und φ -Feld herzuleiten.
23	Wie verhalten sich die Feldgrößen \mathbf{E} , \mathbf{D} und φ an einer Grenzschicht $\epsilon_1 - \epsilon_2$?
24	Wie ist die Kapazität definiert?
25	Was ist ein Kondensator?
26	Die Kapazität des Plattenkondensators, des Kugelkondensators und des Zylinderkondensators ist herzuleiten.

27	Die Kapazität zwischen zwei Kugeln und zwei zueinander parallel verlaufender Zylinder ist herzuleiten.
28	Was versteht man unter einem Dipol? Das Feldlinienbild des Dipols ist zu zeichnen.
29	Die Erdkapazitäten von Kugel - Erde und Zylinder - Erde sind herzuleiten.
30	Die Ersatzkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist herzuleiten.
31	Wie ist das Übertragungsverhältnis U_a/U_e bei einem kapazitiven Spannungsteiler?
32	Die Ersatzkapazität einer Parallelschaltung von Kondensatoren ist herzuleiten.
33	Das Koaxialkabel ist zu erklären. Wo wird es eingesetzt? Welche Kapazität hat es?
34	Es liegt ein Koaxialkabel mit geschichtetem Dielektrikum vor. Welche Teilkapazitäten hat es, wie groß ist seine Gesamtkapazität. Die Gleichungen für das \mathbf{D} -, \mathbf{E} - und φ -Feld in beiden Schichten sind anzugeben.
35	Wie groß ist die in einem Kondensator gespeicherte Energie? Herleitung ist erforderlich.
36	Wie groß ist die Energiedichte im elektrischen Feld?
37	Wie berechnet man die Kraft aus der Energie?
38	Wenn zwei Elektroden, zwischen denen eine Spannung auftritt, sich selbst überlassen werden, wie bewegen sie sich und welche Auswirkung hat das auf die Kapazität?
39	Ein Isolator kann sich frei bewegen. Wohin bewegt er sich, wenn er sich im elektrischen Feld befindet?
40	Was sind Ferroelektrika, was ist Elektrostriktion, was ist der piezoelektrische Effekt, was ist Pyroelektrizität und was sind Elektrete?
41	Welche Stromarten gibt es?
42	Wie ist der elektrische Strom definiert
43	Was sagt die Kontinuitätsgleichung aus?
44	Was ist die Stromdichte? Wie bestimmt sich ihr Betrag, wohin weist ihr Vektor?
45	Wie bestimmt man aus der Stromdichte die elektrische Feldstärke?
46	Wie bestimmt man aus der Stromdichte den Strom?
47	Wie lautet der Gaußsche-Satz für das Strömungsfeld?
48	Für eine Punktelektrode, eine Linienlektrode und eine Flächenelektrode ist die Stromdichte als Funktion des Stroms und des Abstandes durch Anwendung des Gaußschen-Satzes herzuleiten. Die Gleichungen für \mathbf{S} , \mathbf{E} und φ sind anzugeben.
49	Wie bestimmt man den Widerstand?
50	Der Widerstand zwischen zwei Platten, zwischen einer inneren Kugel und einer die Kugel konzentrisch umgebenden Kugelschale und zwischen dem Innen- und Außenleiter eines Koaxialkabels sind herzuleiten.
51	Welcher Zusammenhang besteht zwischen Widerstand und Kapazität einer Anordnung aus zwei Elektroden, zwischen denen sich ein Werkstoff befindet, der die Leitfähigkeit κ und die Dielektrizitätszahl ϵ aufweist?
52	Wie lauten die Grenzbedingungen im Strömungsfeld?
53	Die Feldgleichungen (\mathbf{D} , \mathbf{S} , \mathbf{E} und φ) eines verlustbehafteten Koaxialkabels sind herzuleiten. Die prinzipiellen Feldverläufe sind zu skizzieren.
54	Die Feldgleichungen (\mathbf{D} , \mathbf{S} , \mathbf{E} und φ) eines verlustbehafteten Koaxialkabels mit geschichtetem Dielektrikum sind herzuleiten. Die prinzipiellen Feldverläufe sind zu skizzieren.
55	Die Ersatzschaltung eines verlustbehafteten Koaxialkabels (kein geschichtetes Dielektrikum) mit Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit des Innen- und Außenleiters ist zu entwickeln.
56	Was sagt die Relaxationszeit aus?

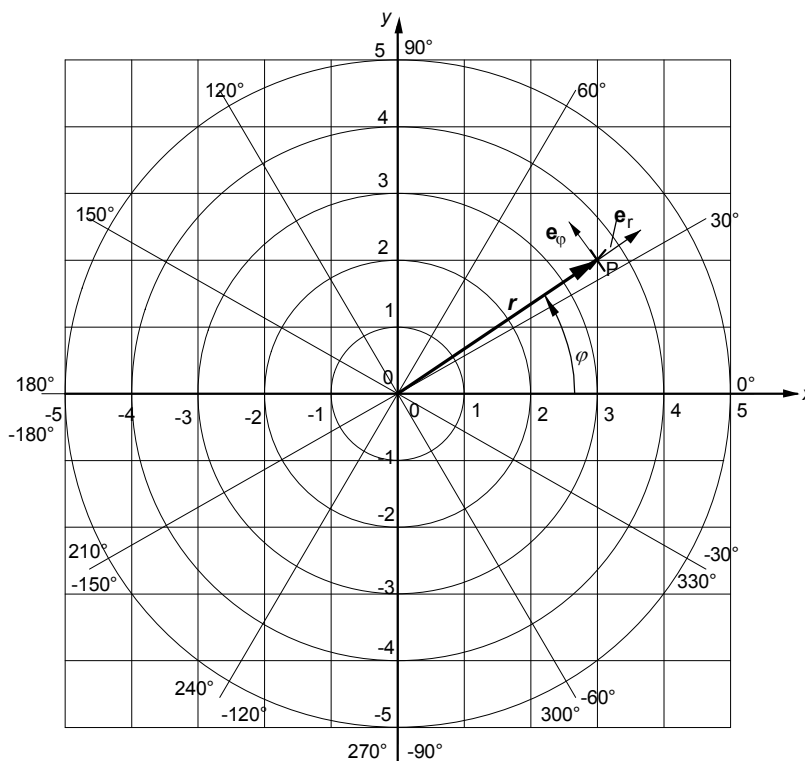
Einführung in die Vektorrechnung

Vektoren und Koordinatensysteme

Die numerische Darstellung von Vektoren erfordert ein Koordinatensystem, das die Richtungen vorgibt, in der die Komponenten des Vektors liegen. Beschränkt man sich auf die Ebene, werden vorzugsweise das kartesische Koordinatensystem oder das Polarkoordinatensystem eingesetzt.

Beim kartesischen Koordinatensystem liegt in der Horizontalen die x -Koordinate (auch x -Achse genannt) und senkrecht dazu in der Vertikalen die y -Koordinate (auch y -Achse genannt). Der Kreuzungspunkt der beiden Koordinaten stellt den Ursprung dar, da dort sowohl die x - als auch die y -Koordinate den Wert 0 haben. Das Netz des Koordinatensystems ist rechtwinkelig. Ein Punkt im kartesischen Koordinatensystem ist durch die Angabe der x - und y -Koordinate eindeutig festgelegt: $P(x, y)$.

Das Polarkoordinatensystem besteht aus Kreisen, die konzentrisch um den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegen. Der Abstand vom Ursprung zum Kreis stellt den Radius r dar. Auf dem Kreis wird ein Punkt durch die Angabe des azimutalen Winkels φ festgelegt. Dieser Winkel beginnt auf der x -Achse mit dem Wert 0. Die Verdrehung des Winkels entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn oder in mathematisch positiver Richtung wird durch den positiven Wert von φ angegeben. Die Angabe des Winkels im Uhrzeigersinn ergibt einen negativen Wert von φ . Ein Punkt im Polarkoordinatensystem ist eindeutig durch seinen Radius und seinen Winkel festgelegt: $P(r, \varphi)$.



kartesisches Koordinatensystem und Polarkoordinatensystem

Polarkoordinatensystem und kartesisches Koordinatensystem in graphischer Darstellung

Einheitsvektoren

Der Einheitsvektor liegt in der Richtung einer der beiden Koordinatenachsen. Sein Betrag ist 1, er hat keine Einheit. Im kartesischen Koordinatensystem gibt es die Einheitsvektoren

in x-Richtung \mathbf{e}_x

und in y-Richtung \mathbf{e}_y

Im Polarkoordinatensystem gibt es die Einheitsvektoren in

r-Richtung \mathbf{e}_r

und in φ -Richtung \mathbf{e}_φ .

Vektor in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$$

A_x ist die x-Komponente

A_y ist y-Komponente

\mathbf{e}_x ist der Einheitsvektor in x-Richtung

\mathbf{e}_y ist der Einheitsvektor in y-Richtung

Vektor in Polarkoordinaten

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

A_r ist die r-Komponente oder Radialkomponente

A_φ ist φ -Komponente oder Azimutkomponente

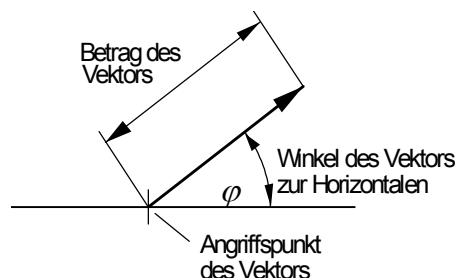
\mathbf{e}_r ist der Einheitsvektor in r-Richtung

\mathbf{e}_φ ist der Einheitsvektor in φ -Richtung

Vektoren und ihre graphische Darstellung

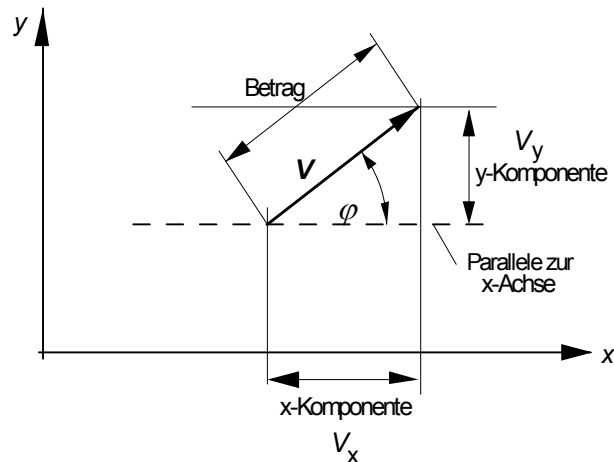
Vektor in einer Zeichnung

In einer graphischen Vektordarstellung wird der Betrag des Vektors durch eine Linie dargestellt. Die Neigung der Linie gegenüber der Horizontalen stellt die Richtung bzw. den Winkel φ des Vektors dar. Der Anfangspunkt, Angriffspunkt oder die Wurzel des Vektorpfeils wird durch eine Ortsangabe $P(x,y)$ festgelegt.



Angabe von Vektoren

Vektoren werden durch ihre Komponenten oder durch Betrag und dem Winkel zur x-Achse angegeben. (Im Folgenden werden nur 2-dimensionale Vektoren im kartesischen x-y-Koordinatensystem oder dem r- φ -Koordinatensystem bzw. Polarkoordinatensystem behandelt.)



Anhand der Zeichnung erkennt man folgende Zusammenhänge
Angabe des Vektors durch seine Komponenten:

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y$$

Dieser Vektor hat einen Betrag von

$$|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Der Winkel, den der Vektor mit der x-Achse einschließt, bestimmt sich aus den Komponenten

zu
$$\varphi = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right).$$

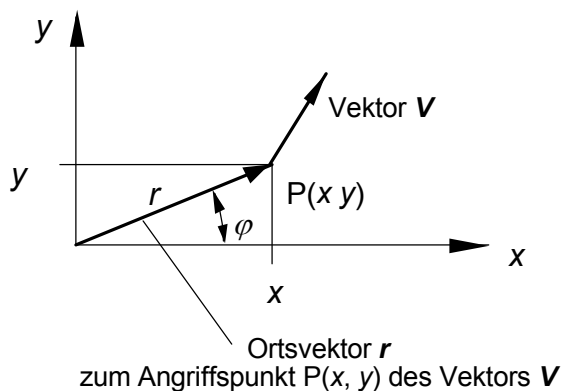
Umgekehrt werden die x- und die y-Komponente des Vektors aus seinem Betrag und dem Winkel berechnet:

$$V_x = V \cdot \cos(\varphi)$$

$$V_y = V \cdot \sin(\varphi)$$

Hinweis: Dies sind nur andere Möglichkeiten zur Angabe der x- und y-Komponenten. Es stellt aber nicht die Umrechnung des Vektors in das Polarkoordinatensystem dar.

Ortsvektor und Lagepunkt



In einem Koordinatensystem wird der Angriffspunkt $P(x,y)$ eines Vektors durch eine x-y-Angabe gemacht. Der Vektor \mathbf{r} zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und dem Punkt $P(x,y)$ wird als **Ortsvektor** bezeichnet. Statt der Koordinaten x und y kann auch die

Entfernung zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems, das entspricht der des Radius r , zum Punkt $P(x,y)$ und der Winkel φ zur x -Achse angegeben werden. Es gelten folgende Umrechnungen:

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Maßstab

Zur graphischen Darstellung muß der Betrag des Vektors in die Länge einer Linie umgerechnet werden. Dazu bedarf es eines Maßstabes m .

Als Maßstab oder Maßstabsfaktor m bezeichnet man das Verhältnis von Originalgröße zu Bildgröße:

$$m = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Originalgröße}}$$

Ist der Maßstab bekannt, berechnet sich daraus die

$$\text{Originalgröße} = \text{Bildgröße} / m$$

und

$$\text{Bildgröße} = m \cdot \text{Originalgröße}$$

Beispiele

a) Längen im Atlas

Der Maßstab in einem Atlas ist mit $m = 1 : 20000$ angegeben. Dann entspricht eine Strecke von 2,5 cm im Atlas einer Strecke in der Natur von

$$l = 2,5 \text{ cm} / (1 : 20000) = 2,5 \text{ cm} \cdot 20000 = 50000 \text{ cm}$$

oder 50 Kilometer.

b) Ortsvektor

Der Punkt $P(x,y)$ möge bei $x = 12 \text{ m}$ und $y = 15 \text{ m}$ liegen. Dieser Punkt soll in einer Zeichnung dargestellt werden, wobei 2,5 Meter im Originalbereich durch 1 cm in der Zeichnung dargestellt werden soll. Dann beträgt der Maßstab

$$m = 1 \text{ cm} / 2,5 \text{ m} = 1 / 250.$$

Das Maß $x = 12 \text{ m}$ wird im Bild durch die Strecke

$$l = 12 \text{ m} / 250 = 0,048 \text{ m} = 4,8 \text{ cm}$$

dargestellt. In gleicher Weise erhält man für das Maß $y = 15 \text{ m}$ im Bild die Strecke von 6 cm.

c) Vektor der Feldstärke

Im Bild soll eine Feldstärke von 450 V/cm einer Strecke von 1 cm entsprechen. Dann ist der Maßstabsfaktor

$$m = 1 \text{ cm} / 450 \text{ V/m}.$$

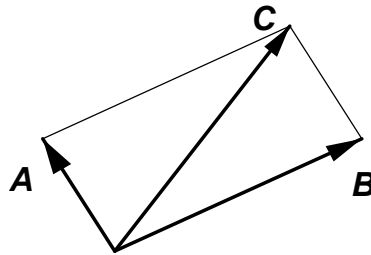
Eine Feldstärke von 1350 V/m wird im Bild durch eine Strecke mit der Länge l von

$$l = 1350 \text{ V/m} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{450 \text{ V/m}} = 3 \text{ cm}$$

dargestellt. Der Winkel φ des Vektors bleibt erhalten.

Überlagerung von Vektoren

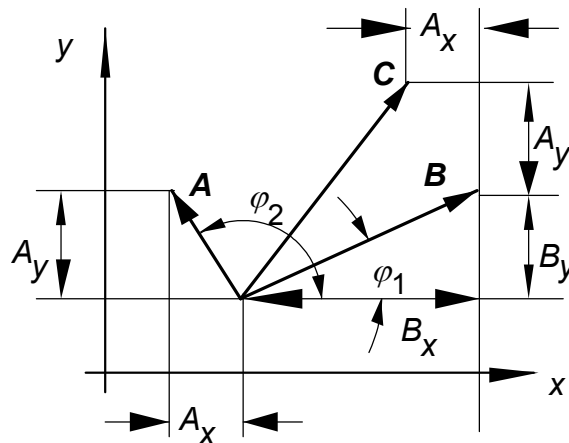
a) Durch Parallelverschiebung



Als erstes werden die Vektoren maßstabsgerecht gezeichnet. Anschließend wird durch Parallelverschiebung des Vektors **A** an die Spitze des Vektors **B** und durch Parallelverschiebung des Vektors **B** an die Spitze des Vektors **A** ein Parallelogramm erzeugt.

Die Verbindung vom Schnittpunkt der beiden Vektoren **A** und **B** zum gegenüberliegenden Punkt des Parallelogramms ergibt den Vektor $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

b) Durch Berechnung



Es werden zunächst die Komponenten der Vektoren **A** und **B** berechnet:

$$A_x = A \cos(\varphi_2) \quad \text{und} \quad A_y = A \sin(\varphi_2)$$

$$B_x = B \cos(\varphi_1) \quad \text{und} \quad B_y = B \sin(\varphi_1)$$

Die Addition der Komponenten liefert die Komponenten des Vektors **C**:

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

Dann ist

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{e}_x + C_y \mathbf{e}_y.$$

Betrag des neuen Vektors

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

Winkel des neuen Vektors zur x-Achse

$$\varphi = \arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right).$$

Vektorumrechnungen und Vektoroperationen

Vektoroperationen in kartesischen Koordinaten

Vektor $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = (A_x, A_y)$

Vektor $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y = (B_x, B_y)$

Vektorbetrag $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Vektoraddition Ergebnis ist ein Vektor in der Ebene der beiden Vektoren

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y) = \mathbf{C}$$

Skalarprodukt Ergebnis ist eine Zahl, ein Skalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = C$$

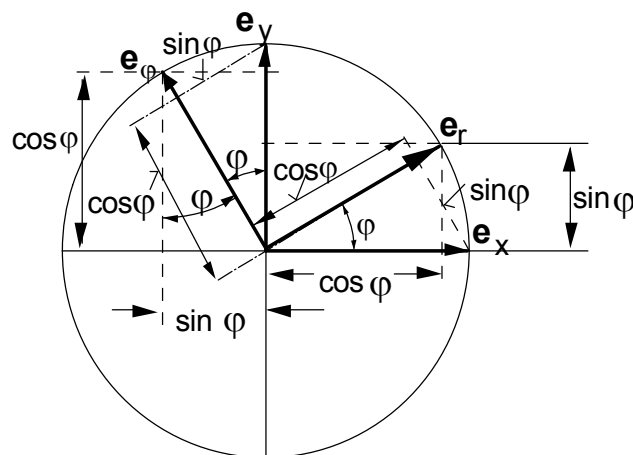
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A \cdot B \cos(\alpha) = C$$

Vektorprodukt Ergebnis ist ein neuer Vektor, der senkrecht auf der Ebene der beiden Vektoren steht.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \mathbf{e}_z = \mathbf{C}$$

Betrag des Vektorproduktes ist $C = A \cdot B \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A \cdot B \sin(\alpha)$

Umrechnungen der Einheitsvektoren



$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_y$$

und

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Umrechnung eines Vektors von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

Vektor in kartesischen Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$ ist gegeben.

Es ist der Vektor in Polarkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ ist gesucht.

Dazu werden in der kartesischen Darstellung die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten angegeben:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_x (\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi) + A_y (\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi)$$

$$\mathbf{A} = (A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi) \cdot \mathbf{e}_r + (-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = A_r \cdot \mathbf{e}_r + A_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Da $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ist, folgt für den Vektor \mathbf{A} in Polarkoordinaten

$$\mathbf{A} = \left(A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_r + \left(-A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Die Radialkomponente ist $A_r = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und die Azimutkomponente $A_\varphi = -A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Umrechnung eines Vektors von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

Vektor in Polarkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ ist gegeben.

Der Vektor in kartesischen Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = (A_x, A_y)$ ist gesucht.

Dazu werden in der Polarkoordinatendarstellung die Einheitsvektoren in kartesische Koordinaten angegeben:

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = A_r (\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_y) + A_\varphi (-\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{A} = (A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi) \cdot \mathbf{e}_x + (A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi) \cdot \mathbf{e}_y = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$$

mit der x-Komponente $A_x = A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$

und der y-Komponente $A_y = A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$

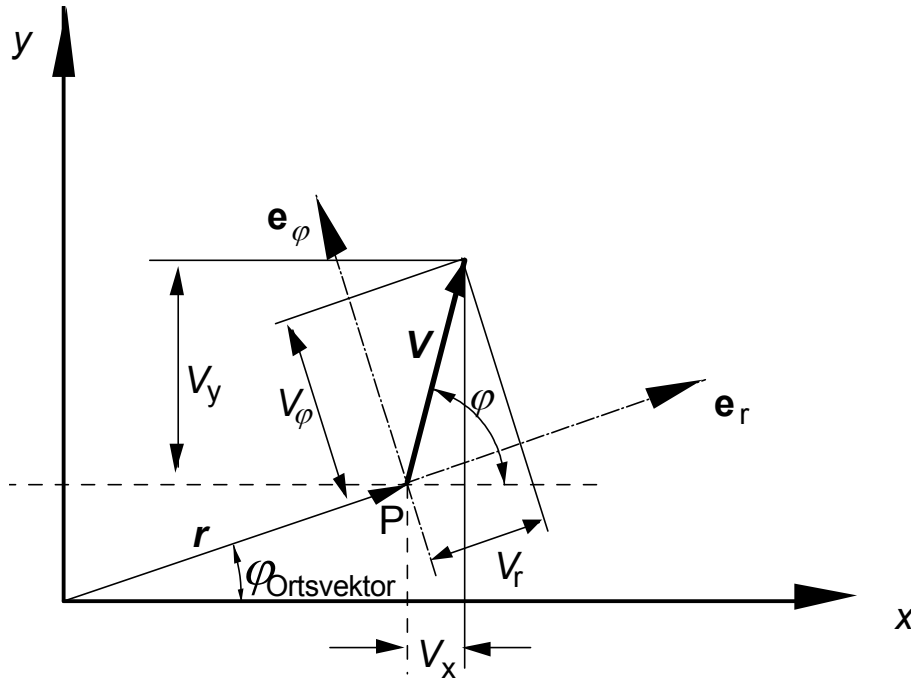
Mit $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

folgt für den Vektor \mathbf{A} in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{A} = \left(A_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_x + \left(A_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_y$$

Die x-Komponente ist $A_x = A_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und die y-Komponente ist $A_y = A_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



Der Vektor \mathbf{V} im Abstand r vom Koordinatenursprung

Speziell: Gegeben ist der Betrag A des Vektors und sein Winkel φ zur x -Achse. Der Vektor beginnt im Koordinatenursprung. Wie lautet seine Vektordarstellung in Polarkoordinaten?

Der Vektor in kartesischen Koordinaten:

x-Komponente: $A_x = A \cdot \cos \varphi$

y-Komponente: $A_y = A \cdot \sin \varphi$

$$\mathbf{A} = A \cdot \cos \varphi \mathbf{e}_x + A \cdot \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

Umrechnung auf Polarkoordinaten:

r-Komponente: $A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi = A \cdot \cos^2 \varphi + A \cdot \sin^2 \varphi = A$ (da $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$)

φ -Komponente: $A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi = -A \cos \varphi \cdot \sin \varphi + A \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 0$

Der Vektor hat keine φ - oder Azimutalkomponente!

Er lautet $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_r$

Beispielaufgaben I - Umrechnung von Vektoren

1) a) Das kartesische und das Polarkoordinatensystem ist zu erklären. Die allgemeine Schreibweise für Vektoren ist anzugeben.

b) Was ist ein Ort- oder Radiusvektor und was ist ein Kraftvektor?

c) Was ist der Unterschied zwischen einem Vektor und einem Vektorfeld?

2) Der Vektor \mathbf{V}_1 hat im Punkt $x_1 = 3, y_1 = 2$ des kartesischen Koordinatensystems die Komponenten $\mathbf{V}_1 = (2, 3)$. Wie lautet der Ortsvektor zum Punkt und wie lauten die Komponenten des Vektors im Polarkoordinatensystem? (Rechnerische und zeichnerische Lösung gesucht.) Wie groß ist sein Betrag?

3) Der Vektor \mathbf{V}_2 hat im Punkt $x_2 = 1, y_2 = -2$ des Polarkoordinatensystems die Komponenten $\mathbf{V}_2 = (2, -3)$. Wie lautet der Ortsvektor zum Punkt und wie lauten die Komponenten des im kartesischen Koordinatensystem? (Rechnerische und zeichnerische Lösung gesucht.) Wie groß ist sein Betrag?

4) Der Vektor \mathbf{V}_3 beginnt im Ursprung des Koordinatensystems und geht durch den $x_3 = 4, y_3 = 2$. Sein Betrag sei konstant 3. Wie lautet der Ortsvektor zum Punkt und wie lauten die Komponenten des im Polarkoordinatensystem? (Rechnerische und zeichnerische Lösung gesucht.)

5) Der Vektor \mathbf{V}_4 beginnt im Punkt $P(2,2)$. Er hat die kartesischen Koordinaten $(4, 4)$. Der Vektor ist in Polarkoordinaten umzurechnen.

Lösungen

1) a) Siehe Vorlesung.

b) Der Abstand eines Punktes zum Ursprung wird als Ort- oder Radiusvektor bezeichnet. Der Vektor zwischen zwei Punkten stellt einen Entfernungsvektor dar.

c) Weist eine physikalische Größe eine Richtungsabhängigkeit auf, wie z.B. die Kraft, dann wird diese Größe als vektorielle Größe oder einfach als Vektor bezeichnet.

Tritt der Vektor nur an einem Punkt auf, handelt es sich um einen polaren Vektor. Stellt der Vektor das Ergebnis einer Vektormultiplikation dar ($\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$), handelt es sich um einen axialen Vektor.

Treten die Vektoren überall im Raum oder in der Ebene auf, bilden sie ein Vektorfeld.

2) Ortsvektor zum Punkt $P(3, 2)$ des ersten Vektors:

kartesische Koordinaten: $\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{e}_x + r_y \cdot \mathbf{e}_y = 3 \cdot \mathbf{e}_x + 2 \cdot \mathbf{e}_y = (3, 2)$

Da der Ortsvektor im Ursprung beginnt, hat er keine φ -Komponente. Der Radiusvektor hat den Betrag bzw. die Radialkomponente

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6$$

und ist gegenüber der x-Achse um den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,7^\circ$$

im mathematisch positiven Sinn, also gegen die Uhrzeigerdrehung verdreht.

Umrechnung des gegebenen Vektors im Punkt $P(3, 2)$

Der Vektor ist in kartesischen Koordinaten gegeben (Einheit wurde nicht angegeben):

$$\mathbf{V}_1 = (2, 3) = 2 \cdot \mathbf{e}_x + 3 \cdot \mathbf{e}_y$$

Es gilt allgemein

Die Radialkomponente ist $A_r = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und die Azimutkomponente $A_\varphi = -A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Anwendung auf diesen Vektor liefert:

Die Radialkomponente $V_r = V_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$V_r = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = 3,33$$

Die Azimutkomponente $V_\varphi = -V_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$V_\varphi = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = 1,39$$

Vektor in Polarkoordinaten: $\mathbf{V}_r = V_r \cdot \mathbf{e}_r + V_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 3,33 \cdot \mathbf{e}_r + 1,39 \cdot \mathbf{e}_\varphi$

3) Ortsvektor zum Punkt P(1, -2) des zweiten Vektors:

kartesische Koordinaten: $\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{e}_x + r_y \cdot \mathbf{e}_y = 1 \cdot \mathbf{e}_x - 2 \cdot \mathbf{e}_y = (1, -2)$

Da der Ortsvektor durch den Ursprung geht, hat er keine φ -Komponente. Der Radiusvektor hat den Betrag bzw. die Radialkomponente

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,24$$

und ist gegenüber der x-Achse um den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -26,6^\circ$$

verdrehen. Der in Polarkoordinaten gegebenen Vektor $\mathbf{V}_2 = (2, -3) = 2 \cdot \mathbf{e}_r - 3 \cdot \mathbf{e}_\varphi$ ist im Punkt P(1, -2) auf kartesische Koordinaten umzurechnen. Es gilt

für die x-Komponente $A_x = A_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und für die y-Komponente $A_y = A_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Anwenden liefert für die x-Komponente

$$V_x = V_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - V_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} - (-3) \cdot \frac{-2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{5}} = -1,79$$

und für die y-Komponente

$$V_y = V_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \cdot \frac{-2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-7}{\sqrt{5}} = -3,13$$

4) Der Vektor geht durch den Ursprung, es liegt nur eine Radialkomponente vor. Seine Länge ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47$$

Er ist gegenüber der x-Achse um den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{4}\right) = -26,6^\circ$$

verdreht.

5) Der Vektor beginnt im Punkt P(2,2). Seine Komponenten in kartesischen Koordinaten sind $\mathbf{V}_4 = (4, 4)$.

Seine Komponenten in Polarkoordinaten sind:

Die Radialkomponente

$$V_r = V_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{8}} = 5,66$$

und Azimutkomponente

$$V_\varphi = -V_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = 0$$

Der Vektor hat nur eine Radialkomponente, seine Verlängerung geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.

Beispielaufgaben II - Vektoroperationen

Gegeben sind zwei Vektoren der elektrischen Feldstärken \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 :

$$E_1 = 5,5 \text{ V/m}; \quad \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_x) = 0,3;$$

$$E_2 = 8,1 \text{ V/m}; \quad \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_x) = 0,82;$$

Es sind zu berechnen:

die Vektorsumme $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

das skalare Produkt $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$

das vektorielle Produkt $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$

der Winkel zwischen $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$

Komponenten des Vektors 1:

$$E_{1x} = E_1 \cos \varphi = 5,5 \text{ V/m} \cdot 0,3 = 1,65 \text{ V/m}$$

$$E_{1y} = \sqrt{(E_1^2 - E_{1x}^2)} = \sqrt{((5,5 \text{ V/m})^2 - (1,65 \text{ V/m})^2)} = 5,25 \text{ V/m}$$

Komponenten des Vektors 2:

$$E_{2x} = E_2 \cos \varphi = 8,1 \text{ V/m} \cdot 0,82 = 6,64 \text{ V/m}$$

$$E_{2y} = \sqrt{(E_2^2 - E_{2x}^2)} = \sqrt{((8,1 \text{ V/m})^2 - (6,64 \text{ V/m})^2)} = 4,64 \text{ V/m}$$

a) die *Vektorsumme* $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$
 $\mathbf{E} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{e}_x + (E_{1y} + E_{2y})\mathbf{e}_y$
 x-Komponente: $E_x = E_{1x} + E_{2x} = (1,65 + 6,64) \text{ V/m} = 8,29 \text{ V/m}$
 y-Komponente: $E_y = E_{1y} + E_{2y} = (5,25 + 4,64) \text{ V/m} = 9,89 \text{ V/m}$
 Betrag: $\sqrt{(E_x^2 + E_y^2)} = \sqrt{((8,29 \text{ V/m})^2 + (9,89 \text{ V/m})^2)} = 12,9 \text{ V/m}$
 Winkel $\varphi = \arctan(E_y/E_x) = \arctan(9,89/8,29) = 50^\circ$

b) Das *Skalarprodukt* $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$
 $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_{1x} \cdot E_{2x} + E_{1y} \cdot E_{2y} =$
 $(1,65 \cdot 6,64 + 5,25 \cdot 4,64) \text{ V}^2/\text{m}^2 = 35,32 \text{ V}^2/\text{m}^2$

c) Winkel zwischen beiden Vektoren
 aus der Beziehung $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_1 E_2 \cdot \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$
 $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 / E_1 E_2$
 $\cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 35,32 / (5,5 \cdot 8,1) = 0,7928$
 $\varphi = \arctan 0,7928 = 38,4^\circ$

d) Das *vektorielle Produkt* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$
 Der Betrag des vektoriellen Produktes ist:
 $|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| = E_1 E_2 \cdot \sin(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 5,5 \cdot 8,1 \text{ V}^2/\text{m}^2 \sin 38,4^\circ =$
 $= 27,67 \text{ V}^2/\text{m}^2$

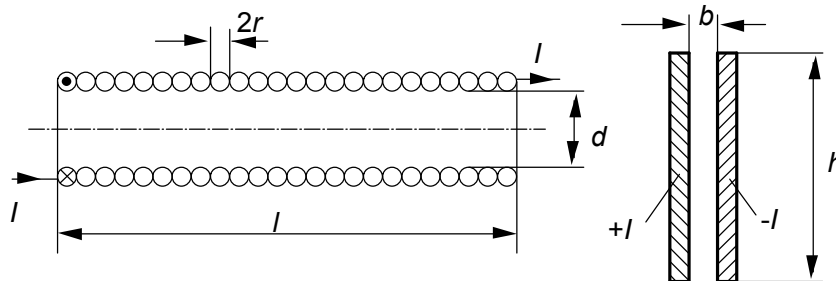
Der Vektor steht senkrecht auf der Ebene die durch die Vektoren \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 gebildet wird

Magnetisches Feld

Übungen

Übung 1- Feldberechnungen

1. Aufgabe



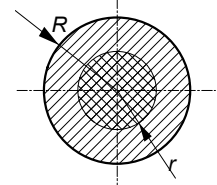
Wie groß ist das magnetische Feld zwischen den Platten und außerhalb der Platten? Es gilt $b \ll h$.

Wie groß ist das magnetische Feld innerhalb und außerhalb der Zylinderspule? Es gilt $r \ll d \ll l$.

2. Aufgabe

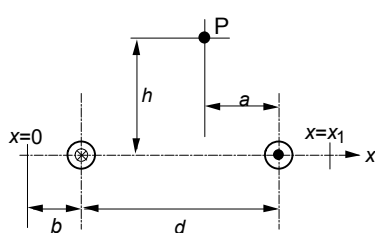
Für folgende Anordnungen ist die Formel der magnetischen Feldstärke herzuleiten:

a) Bei einem stromführenden, geraden Leiter ist die magnetische Feldstärke längs des Radius von $r = 0$ bis $r > R$ zu bestimmen.

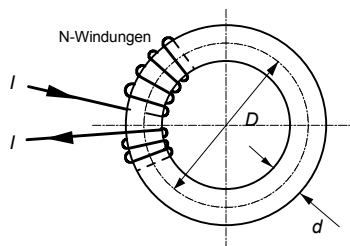


bI) Wie groß ist die magnetische Feldstärke im Punkt P bei zwei zueinander parallel verlaufender Leiter und

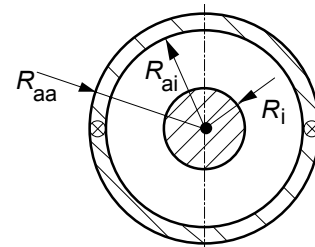
bII) längs der x-Achse von x_0 bis x_1 ? Maße: $d = 7$ cm, $a = 2$ cm, $b = 2$ cm, $x_1 = 11$ cm, $h = 3$ cm. Der Strom beträgt 10 Ampere.



2b



2c



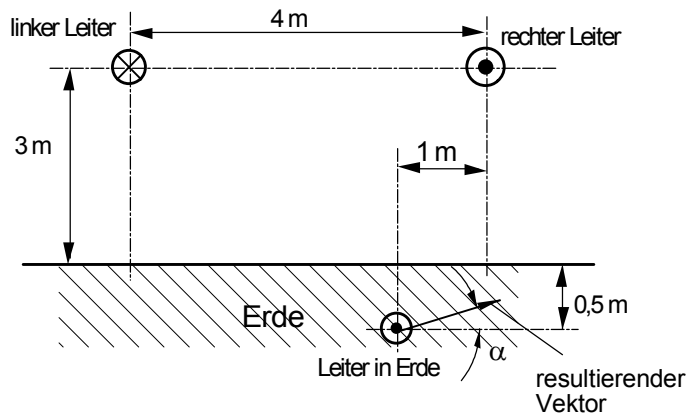
2d

c) Die magnetische Feldstärke ist im Ringquerschnitt der Toroidspule 2c ($D = 10$ cm, $d = 2$ cm) und im Querschnitt des Koaxialkabels von $r = 0$ bis $r = R_{aa}$ zu berechnen. $R_i = 2$ cm, $R_{ai} = 4,5$ cm, $R_{aa} = 5$ cm, $I = 150$ A.

3. Aufgabe

Zwei Leiter sind 3 Meter oberhalb der Erdoberfläche mit einem gegenseitigen Abstand von 4 Metern angeordnet. Der rechte Leiter führt den Strom von 1000 A. Die Stromrichtung kommt aus der Querschnittsebene Leiter - Erde heraus. Der linke Leiter führt den Strom 800 A. Der Strom tritt in die Querschnittsebene Leiter - Erde hinein. Ein dritter stromführender Leiter befindet sich 0,5 Meter unter der Erdoberfläche. Er liegt pa-

parallel zu den beiden anderen Leiter. Seine Achse liegt 1 Meter links vom rechten Leiter. Der Leiterstrom beträgt 500 A, die Stromrichtung kommt aus der Querschnittsebene Leiter - Erde heraus.



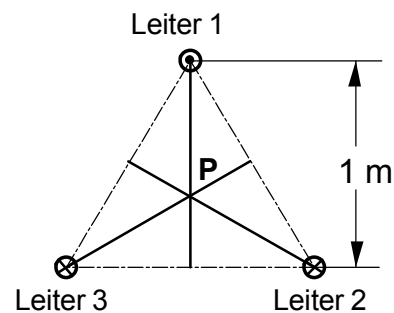
Zu bestimmen sind die resultierenden Vektoren der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flußdichte, die durch die beiden oberhalb der Erde befindlichen Ströme hervorgerufen werden und zwar für den Ort, an dem sich der stromführende Leiter in der Erde befindet.

Die Lösung soll graphisch, rechnerisch und mit einem Mathematik-Programm erfolgen.

4. Aufgabe

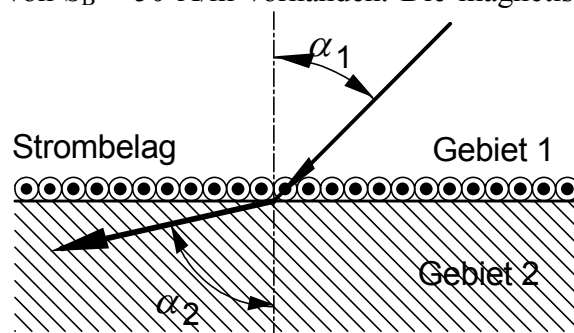
Gegeben ist folgende Anordnung: Drei zueinander parallel laufende Leiter bilden ein gleichseitiges Dreieck. Der Leiter 1 liegt 1 Meter über der Verbindungslinie der Leiter 2 und 3. Gesucht ist die magnetische Flußdichte B im Schwerpunkt P (Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten) des gleichseitigen Dreiecks.

Die Leiterströme sind Gleichströme: Leiter 1 führt den Strom von 100 A, Leiter 2 und 3 führen jeweils den Strom von -100 A.



5. Aufgabe - Brechung der Feldlinien

An der Grenzfläche zwischen Luft (Gebiet 1) und einem Werkstoff (Gebiet 2) mit der Permeabilitätszahl $\mu_t = 5$ trifft ein magnetisches Feld unter einem Winkel von 45° auf. In der Grenzschicht ist ein Strombelag von $S_B = 50$ A/m vorhanden. Die magnetische Flußdichte hat die Größe $B = 200$ μ T. Der Winkel zwischen den Feldlinien und der Flächennormalen beträgt 45° . Die beiden Vektoren \mathbf{B} und \mathbf{H} sind im Gebiet 2 zu bestimmen und zwar einmal für den Fall mit dem Strombelag ($S_B = 50$ A/m) und einmal ohne Strombelag ($S_B = 0$ A/m).



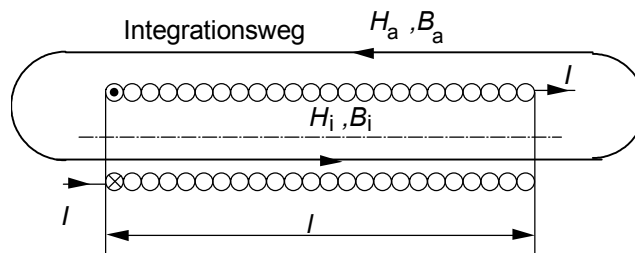
Lösungen

1. Aufgabe

Hinweis: Die Lösung wird hier auf einem anderen Weg als in der Vorlesung gefunden.

Die magnetische Energie wird bei langen Zylinderspulen vor allem im Bereich der Röhre mit dem Durchmesser d und der Länge l gespeichert. Da dann die Energie außerhalb der Röhre vernachlässigbar ist, existiert dort auch nur ein äußerst geringe magnetische Feldstärke und Flußdichte. Näherungsweise ist im Außenbereich $H_a \approx 0$ und $B_a \approx 0$.

Zur Anwendung des Durchflutungssatzes wird der Integrationsweg durch das Innere und Äußere der Spule gelegt:



Anwendung des Durchflutungssatzes:

$$\oint H ds = \int_{\text{innen}} H_i ds + \int_{\text{außen}} H_a ds = N \cdot I$$

Da das Linienintegral über den äußeren Weg wegen $H_a \approx 0$ null ist, existiert es nur im Innenbereich über die Länge l der Spule. Dort ist die magnetische Feldstärke konstant, so daß folgt

$$\int_{\text{innen}} H_i ds = H_i \cdot l = N \cdot I$$

und weiter

$$H_i = NI/l.$$

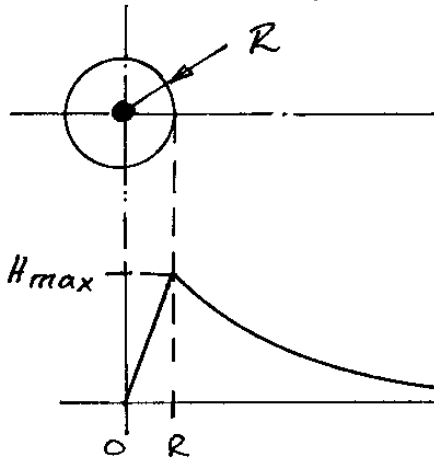
Führen zwei Stromschienen, wie in der Abbildung gezeigt, den Strom I , so konzentriert sich auch in diesem Fall das magnetische Feld auf den Raum zwischen den beiden Schienen, wenn die Breite b zwischen den Schienen viel geringes als die Schienenhöhe h ist.

Dann berechnet sich die magnetische Feldstärke zwischen den Schienen näherungsweise zu

$$H = I/l.$$

2. Aufgabe

a) langer, gerader Leiter



Im Inneren des Leiters

$$0 < r \leq R$$

$$S = \frac{I}{\pi R^2} \Rightarrow I_i = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$$

$$I_i = \frac{I}{R^2} \cdot r^2$$

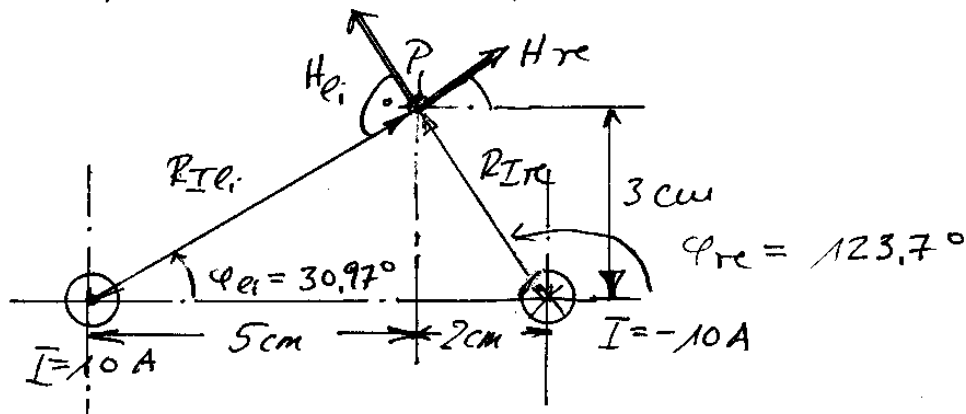
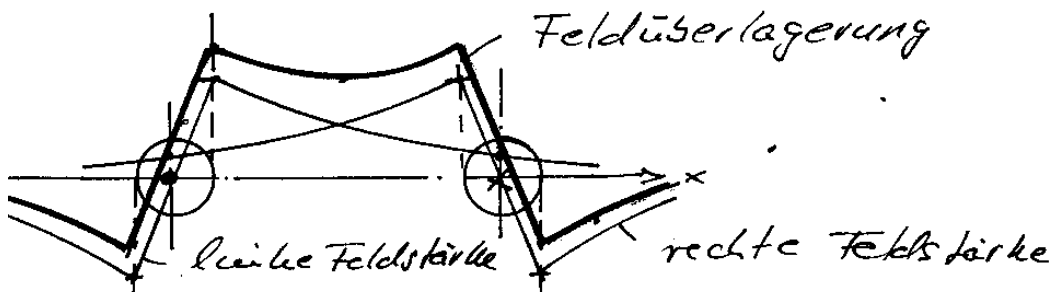
Aus $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$ folgt

$$\underline{H_i = \frac{I}{2\pi R^2} \frac{r^2}{r} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r}$$

Im Außenraum $r > R$ gilt

$$\underline{H_a = \frac{I}{2\pi r}}$$

$$H_{max} \text{ bei } r = R \Rightarrow \underline{H_{max} = \frac{I}{2\pi R}}$$

b) zwei Leiter parallel \rightarrow Felder überlagern sich.

$$R_{I_{ei}} = \sqrt{5^2 + 3^2} \text{ cm} = 5,83 \text{ cm}$$

$$\varphi_{ei} = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 30,97^\circ$$

$$\varphi_{He_i} = \varphi_{ei} + 90^\circ = 120,97^\circ$$

$$R_{I_{re}} = \sqrt{2^2 + 3^2} \text{ cm} = 3,61 \text{ cm}$$

$$\varphi_{re} = \arctan\left(\frac{3}{-2}\right) = -56,3^\circ + 180^\circ = 123,7^\circ$$

$$\varphi_{H_{re}} = 123,7^\circ - 90^\circ = 33,7^\circ$$

Beträge der Feldstärken:

$$H_{ei} = \frac{I_{ei}}{2\pi R_{I_{ei}}} = \frac{10 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,0583 \text{ m}} = 27,3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{re} = \frac{I_{re}}{2\pi R_{I_{re}}} = \frac{10 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,0361 \text{ m}} = 44,1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Komponenten der Feldstärken:

$$H_{eix} = H_{ei} \cdot \cos \varphi_{He_i} = 27,3 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \cos 120,97^\circ = -14,05 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{eiy} = H_{ei} \cdot \sin \varphi_{He_i} = 27,3 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \sin 120,97^\circ = 23,41 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{rex} = H_{re} \cdot \cos \varphi_{H_{re}} = 44,1 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \cos 33,7^\circ = 36,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{rey} = H_{re} \cdot \sin \varphi_{H_{re}} = 44,1 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \sin 33,7^\circ = 24,47 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Resultierender Vektor:

Komponenten

$$H_{resx} = H_{rex} + H_{eix} = (36,7 - 14,05) \frac{\text{A}}{\text{m}} = 22,65 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{resy} = H_{rey} + H_{eiy} = (24,47 + 23,41) \frac{\text{A}}{\text{m}} = 47,88 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Betrag:

$$H_{res} = \sqrt{H_{resx}^2 + H_{resy}^2} = \sqrt{22,65^2 + 47,88^2} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 53,0 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Winkel:

$$\varphi_{rs} = \arctan\left(\frac{H_{resy}}{H_{resx}}\right) = \arctan\left(\frac{47,88}{22,65}\right) = 64,7^\circ$$

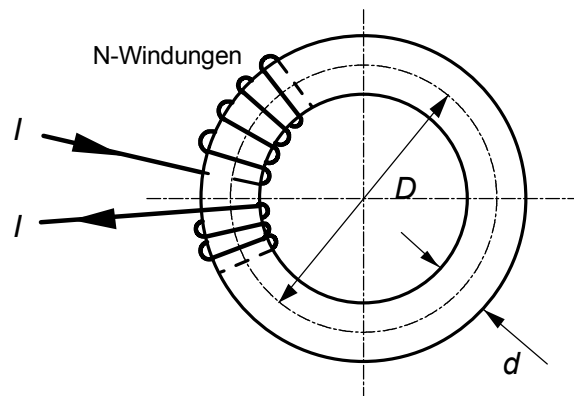
c) Toroidspule

Der Durchmesser d des Toroiden muss viel kleiner als der Ringdurchmesser D sein. Dann folgt aus dem Durchflutungssatz

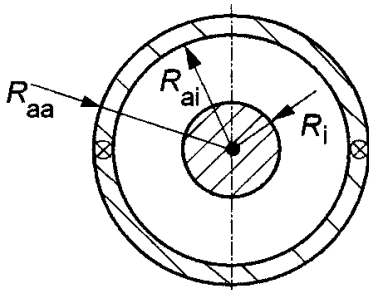
$$\oint_s \mathbf{H} ds = 2\pi R = \pi D = \Theta = N \cdot I$$

Daraus folgt

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NI}{\pi D}$$



d) Koaxialleiter



Innenleiter $0 \leq r < R_i$

$$I_i = S_i \cdot A_i = \frac{I}{\pi R_i^2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{I}{R_i^2} \cdot r^2$$

$$H_i = \frac{I}{2\pi \cdot R_i^2} \cdot r$$

Isolierung $R_i \leq r < R_{oi}$

$$H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

o) Außenleiter $R_{oi} \leq r \leq R_{oo}$

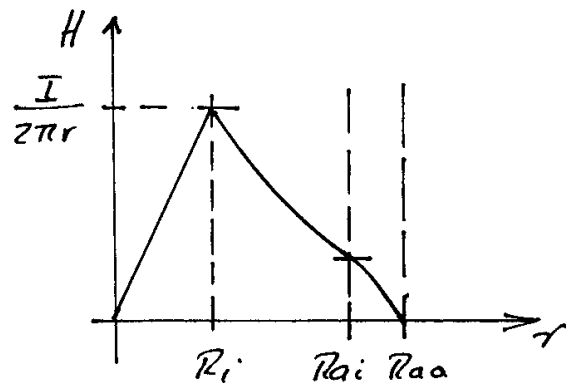
$$I_a = S_a \cdot A_a = \frac{I}{\pi(R_{oo}^2 - R_{oi}^2)} \cdot \pi \cdot (r^2 - R_{oi}^2)$$

$$I_a = \frac{r^2 - R_{oi}^2}{R_{oo}^2 - R_{oi}^2} \cdot I$$

$$H_a \cdot 2\pi r = -I_a + I$$

$$H_a = \frac{I - I_a}{2\pi r}$$

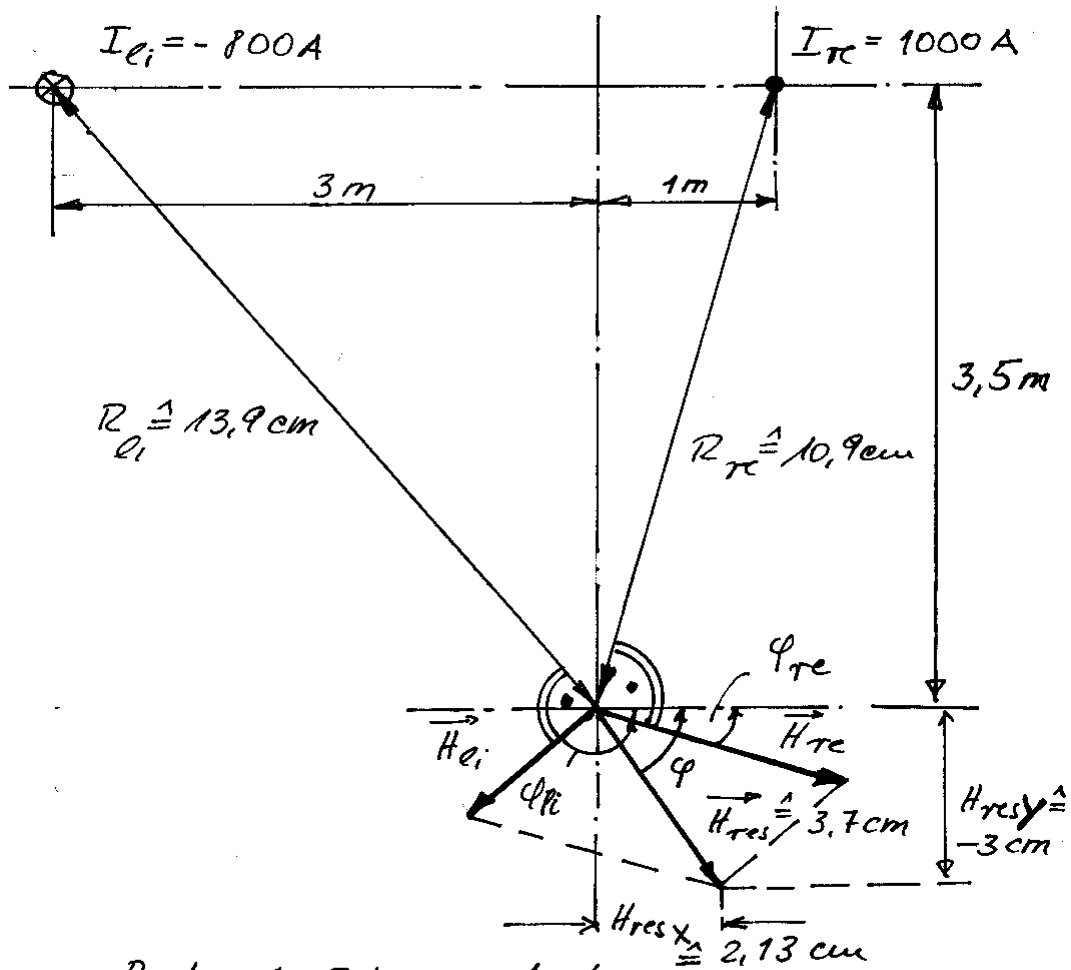
$$H_a = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_{oi}^2}{R_{oo}^2 - R_{oi}^2} \right)$$



3. Aufgabe

Graphische Lösung

a) graphische Lösung



Radius-Maßstab $m_R = 1 \text{ m} /$
 H-Maßstab $m_H = 10 \text{ A/m} / \text{cm}$

$R_{ei} = \frac{1 \text{ m}}{3 \text{ cm}} \cdot 13.9 \text{ cm} = 4.63 \text{ m}$

$R_{re} = \frac{1 \text{ m}}{3 \text{ cm}} \cdot 10.9 \text{ cm} = 3.63 \text{ m}$

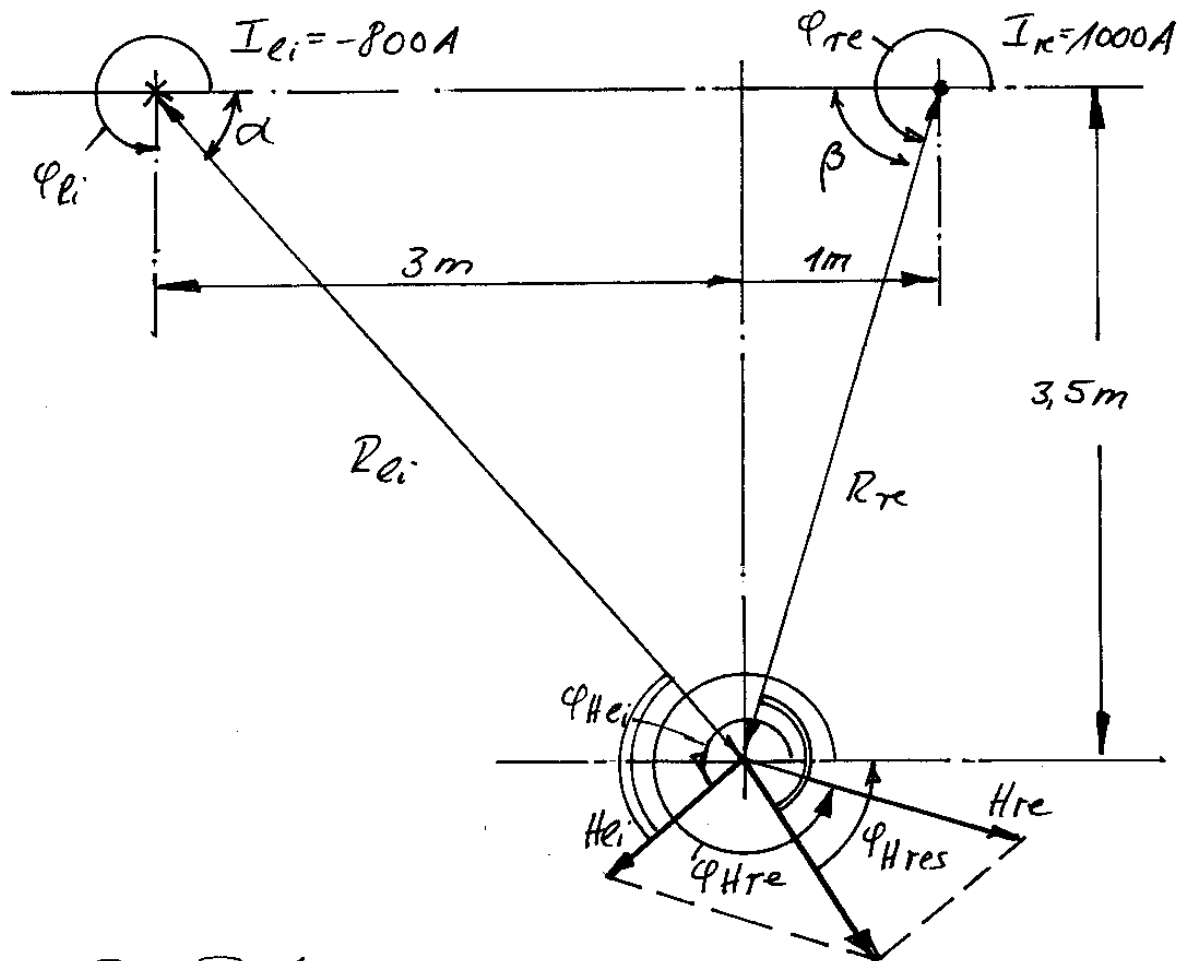
$H_{ei} = \frac{I_{ei}}{2\pi R_{ei}} = \frac{-800 \text{ A}}{2\pi \cdot 4.63 \text{ m}} = -27.5 \text{ A/m} ; \varphi_{ei} = -140^\circ$

$H_{re} = \frac{I_{re}}{2\pi R_{re}} = \frac{1000 \text{ A}}{2\pi \cdot 3.63 \text{ m}} = 43.8 \text{ A/m} ; \varphi_{re} = -16.8^\circ$

$H_{res} = 3.7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ A/m}}{\text{cm}} = 37 \text{ A/m} ; \varphi_{res} = -55^\circ$

$H_{resy} = -3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ A/m}}{\text{cm}} = -30 \text{ A/m} ; H_{resx} = 21.3 \text{ A/m}$

Rechnerische Lösung



Die Radien

$$R_{ei} = \sqrt{R_{eix}^2 + R_{eiy}^2} = \sqrt{3^2 + 3,5^2} \text{ m} = 4,61 \text{ m}$$

$$R_{re} = \sqrt{R_{rex}^2 + R_{rey}^2} = \sqrt{1^2 + 3,5^2} \text{ m} = 3,64 \text{ m}$$

Die Winkel

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R_{eiy}}{R_{eix}}\right) = \arctan\left(\frac{3,5}{3}\right) = 49,4^\circ$$

$$\varphi_{ei} = 360^\circ - \alpha = 310,5^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{R_{rey}}{R_{rex}}\right) = \arctan\left(\frac{3,5}{1}\right) = 74^\circ$$

$$\varphi_{re} = 180^\circ + \beta = 254^\circ$$

Feldstärke beträge

$$H_{re} = \frac{I_{re}}{2\pi R_{re}} = \frac{1000 \text{ A}}{2\pi \cdot 3,64 \text{ m}} = 43,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{ei} = \frac{I_{ei}}{2\pi R_{ei}} = \frac{800 \text{ A}}{2\pi \cdot 4,61 \text{ m}} = 27,62 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Die Winkel der H-Vektoren

$$\varphi_{H_{re}} = \varphi_{re} + 90^\circ = 254^\circ + 90^\circ = 344^\circ$$

$$\varphi_{H_{ei}} = \varphi_{ei} - 90^\circ = 310,5^\circ - 90^\circ = 220,5^\circ$$

(-90° , da der Strom $I_{ei} = -800 \text{ A}$, also negativ ist!)

Die Komponenten der Vektoren:

$$H_{rex} = H_{re} \cdot \cos \varphi_{H_{re}} = 43,7 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \cos 344^\circ = 42,0 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{rey} = H_{re} \cdot \sin \varphi_{H_{re}} = 43,7 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \sin 344^\circ = -12,05 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{eix} = H_{ei} \cdot \cos \varphi_{H_{ei}} = 27,62 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \cos 220,5^\circ = -21,0 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{eiy} = H_{ei} \cdot \sin \varphi_{H_{ei}} = 27,62 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \sin 220,5^\circ = -17,94 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Überlagerung der Komponenten:

$$H_{resx} = H_{rex} + H_{eix} = 42 \frac{\text{A}}{\text{m}} - 21 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 21 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{resy} = H_{rey} + H_{eiy} = -12,05 \frac{\text{A}}{\text{m}} - 17,94 \frac{\text{A}}{\text{m}} = -29,99 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Betrag des resultierenden Vektors:

$$H_{res} = \sqrt{H_{resx}^2 + H_{resy}^2} = \sqrt{21^2 + 29,99^2} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

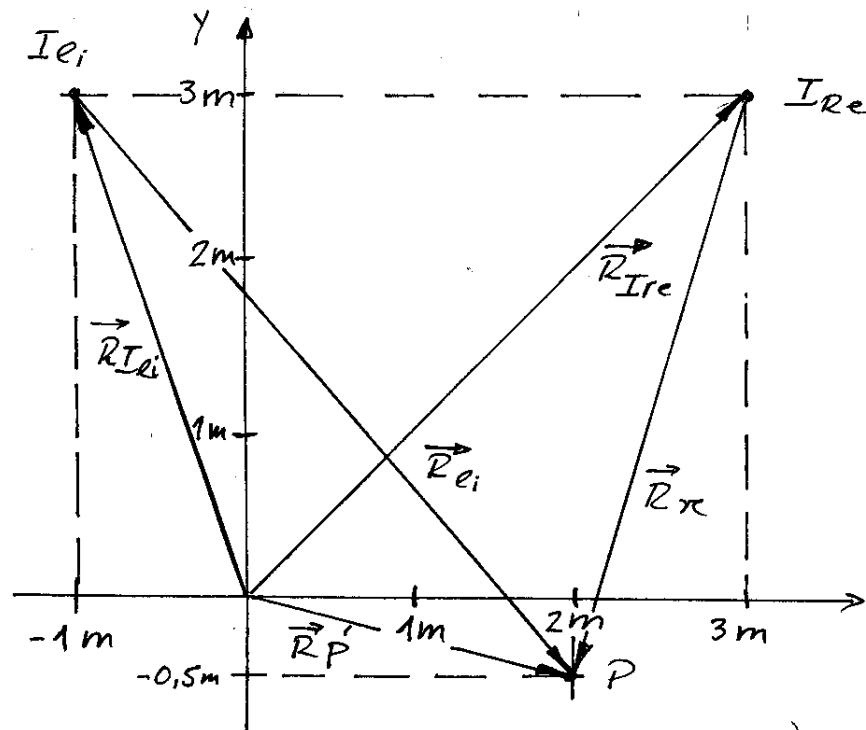
$$H_{res} = 36,6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Winkel des resultierenden Vektors

$$\varphi_{H_{res}} = \arctan\left(\frac{H_{resy}}{H_{resx}}\right) = \arctan\left(\frac{-29,99}{21}\right) = -55^\circ$$

Lösung mit Mathcad

Zuerst muß ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt werden. In diesem Beispiel wird der Ursprung des Koordinatensystems so gelegt, daß die Erdoberfläche auf $y=0$ liegt. $x = 0$ wird 1 Meter rechts vom linken Leiter festgelegt.



Nun können die Radian als Vektor angegeben werden (siehe Skizze):

$$R_{Ire} := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad R_{Ili} := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad R_P := \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$R_{re} := -R_{Ire} + R_P \quad R_{re} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3.5 \end{pmatrix} \quad |R_{re}| = 3.64$$

$$R_{li} := -R_{Ili} + R_P \quad R_{li} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3.5 \end{pmatrix} \quad |R_{li}| = 4.61$$

Winkel der Radian:

$$\phi_{re} := \text{atan2}(R_{re0}, R_{re1}) \quad \phi_{re\text{Grad}} := 180 \cdot \frac{\phi_{re}}{\pi} \quad \phi_{re\text{Grad}} = -105.945$$

$$\phi_{li} := \text{atan2}(R_{li0}, R_{li1}) \quad \phi_{li\text{Grad}} := 180 \cdot \frac{\phi_{li}}{\pi} \quad \phi_{li\text{Grad}} = -49.399$$

Die Ströme:

$$I_{li} := -800 \qquad I_{re} := 1000$$

Beträge der beiden H-Vektoren

$$H_{re} := \frac{|I_{re}|}{2 \cdot \pi \cdot |R_{re}|} \qquad H_{re} = 43.723$$

$$H_{li} := \frac{|I_{li}|}{2 \cdot \pi \cdot |R_{li}|} \qquad H_{li} = 27.62$$

Zur Überlagerung werden die Komponenten der beiden H-Vektoren berechnet:

Komponenten für H_{re}:

$$\phi_{H_{re}} := \phi_{re} + \frac{I_{re}}{|I_{re}|} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \phi_{H_{re}Grad} := 180 \cdot \frac{\phi_{H_{re}}}{\pi} \qquad \phi_{H_{re}Grad} = -15.945$$

$$H_{rex} := H_{re} \cdot \cos(\phi_{H_{re}}) \qquad H_{rex} = 42.041$$

$$H_{rey} := H_{re} \cdot \sin(\phi_{H_{re}}) \qquad H_{rey} = -12.012$$

Komponenten für H_{li}:

$$\phi_{H_{li}} := \phi_{li} + \frac{I_{li}}{|I_{li}|} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \phi_{H_{li}Grad} := 180 \cdot \frac{\phi_{H_{li}}}{\pi} \qquad \phi_{H_{li}Grad} = -139.399$$

$$H_{lix} := H_{li} \cdot \cos(\phi_{H_{li}}) \qquad H_{lix} = -20.971$$

$$H_{liy} := H_{li} \cdot \sin(\phi_{H_{li}}) \qquad H_{liy} = -17.975$$

Überlagerung der Komponenten

$$H_{resx} := H_{rex} + H_{lix} \qquad H_{resx} = 21.07$$

$$H_{resy} := H_{rey} + H_{liy} \qquad H_{resy} = -29.987$$

Der resultierende Vektor

$$H_{res} := \begin{pmatrix} H_{resx} \\ H_{resy} \end{pmatrix} \qquad H_{res} = \begin{pmatrix} 21.07 \\ -29.987 \end{pmatrix} \qquad |H_{res}| = 36.649$$

$$\phi_{res} := \text{atan2}(H_{resx}, H_{resy}) \qquad \phi_{resGrad} := 180 \cdot \frac{\phi_{res}}{\pi} \qquad \phi_{resGrad} = -54.907$$

4. Aufgabe

Allgemeines: Der Abstand r des Schwerpunktes P zur jeweiligen Ecke des Dreiecks ist bei einem gleichseitigen Dreieck immer gleich und beträgt zwei Drittel der Höhe des Dreiecks:

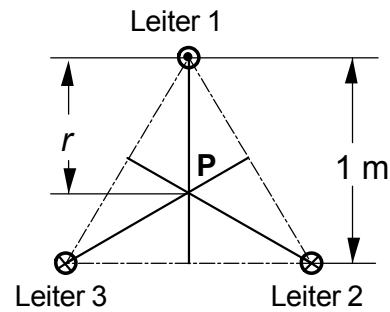
$$r = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ m} = 0,667 \text{ m}.$$

Die Stärke der magnetischen Feldstärke des Linienleiters im Abstand r beträgt

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Die Richtung des Magnetfeldes steht senkrecht auf der Abstandslinie (oder Verbindungslinie) zwischen dem Leiter und dem Punkt P. Handelt es sich um einen Strom, der aus der Ebene heraustritt ("Punktstrom"), steht das Magnetfeld im Punkt P um -90° verdreht auf der Abstandslinie. Tritt der Strom in die Ebene hinein ("Kreuzstrom"), steht das Magnetfeld um $+90^\circ$ verdreht auf der Abstandslinie.

Bei mehreren Linienleitern wird das Gesamtfeld durch Überlagerung der Felder eines jeden Leiters bestimmt.



Feld des Leiter 1

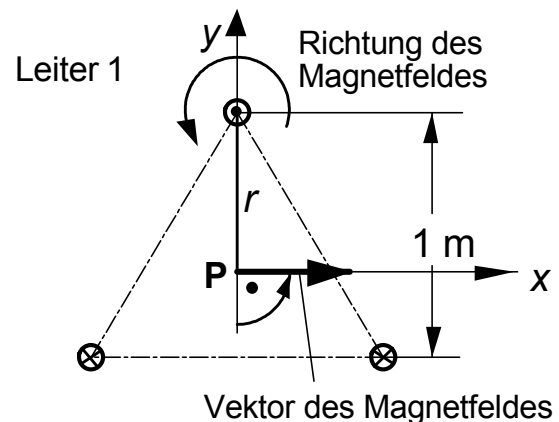
Leiter 1 führt den "Punktstrom" von 100 A.

Der Betrag der Feldstärke im Punkt P ist

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,667 \text{ m}} = 23,86 \text{ A/m}.$$

Im Punkt P steht das Feld senkrecht auf der Abstandslinie und zwar um -90° verdreht. Es weist daher nur in x-Richtung und hat keine y-Komponente. Für den Leiter 1 gilt daher:

$$\mathbf{H}_1 = 23,83 \text{ A/m} \cdot \mathbf{e}_x.$$

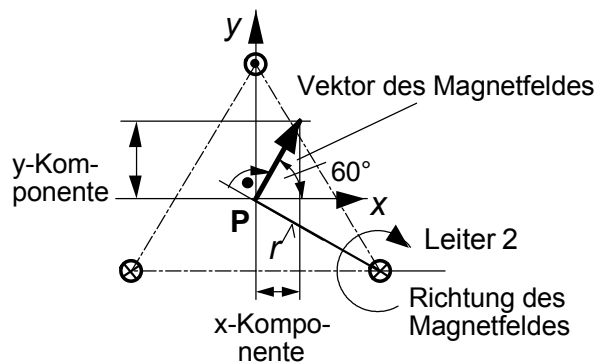


Feld des Leiters 2

Da der Abstand zum Punkt P genau so groß wie für den Leiter 1 ist und die Stromstärke ebenfalls gleich ist, ist auch der Betrag der Feldstärke gleich:

$$H_2 = H_1 = 23,86 \text{ A/m}.$$

Im Punkt P steht der Feldstärkevektor wieder senkrecht aus der Abstandslinie zum Leiter 2, allerdings ist er aufgrund des "Kreuzstroms" um $+90^\circ$ verdreht. Aus der Zeichnung entnimmt man, daß die Feldstärke nun eine x- und eine y-Komponente ausweist.



Es gilt

$$H_{2x} = H_2 \cos(60^\circ) = 23,86 \text{ A/m} \cdot 0,5 = 11,93 \text{ A/m.}$$

$$H_{2y} = H_2 \sin(60^\circ) = 23,86 \text{ A/m} \cdot 0,866 = 20,66 \text{ A/m}$$

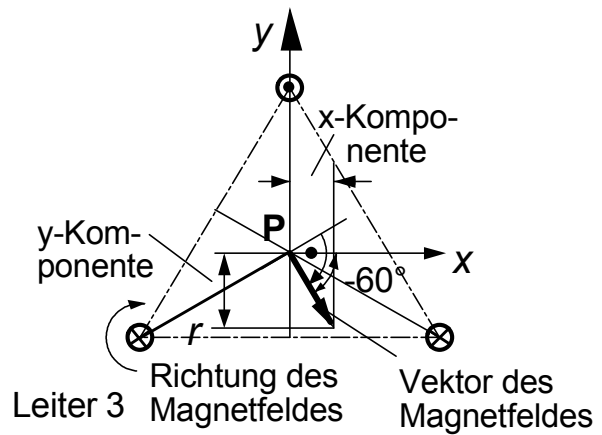
$$\mathbf{H}_2 = 11,93 \text{ A/m } \mathbf{e}_x + 20,662 \text{ A/m } \mathbf{e}_y$$

Feld des Leiters 3

Da Stromstärke und Abstand wieder gleich der Größen des Leiters sind, ist auch der Betrag der Feldstärke gleich:

$$H_3 = 23,86 \text{ A/m.}$$

Im Punkt P steht der Feldstärkevektor senkrecht aus der Abstandslinie zum Leiter 3 und ist, da es sich um einen "Kreuzstroms" handelt, um $+90^\circ$ verdreht. Aus der Zeichnung entnimmt man, daß die Feldstärke wieder eine x- und eine y-Komponente ausweist. Es gilt



$$H_{3x} = H_2 \cos(-60^\circ) = 23,86 \text{ A/m} \cdot 0,5 = 11,93 \text{ A/m.}$$

und
$$H_{3y} = H_2 \sin(-60^\circ) = 23,86 \text{ A/m} \cdot -0,866 = -20,66 \text{ A/m.}$$

$$\mathbf{H}_3 = 11,93 \text{ A/m } \mathbf{e}_x - 20,662 \text{ A/m } \mathbf{e}_y$$

Das Gesamtfeld

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3$$

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} + H_{3x} = 23,86 \text{ A/m} + 2 \cdot 11,93 \text{ A/m} = 47,72 \text{ A/m.}$$

$$H_y = H_{2y} + H_{3y} = 20,662 \text{ A/m} - 20,662 \text{ A/m} = 0$$

Es gibt keine y-Komponente: Daher folgt

$$\mathbf{H} = 47,72 \text{ A/m } \mathbf{e}_x.$$

5. Aufgabe

Bei der Brechung gelten folgende Gesetzmäßigkeiten

$$B_{2\text{nor}} = B_{1\text{nor}} = \cos(\alpha_1) B_1$$

ohne Strombelag $B_{2\text{tan}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \sin(\alpha_1) \cdot B_1$

mit Strombelag $B_{2\text{tan}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \sin(\alpha_1) \cdot B_1 - \mu_{2r} \cdot \mu_0 S_B$

$$B_{2\text{tan}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \sin(\alpha_1) \cdot B_1 - \mu_{2r} \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot S_B$$

$$B_2 = \sqrt{B_{2\text{nor}}^2 + B_{2\text{tan}}^2}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{B_{2\text{tan}}}{B_{2\text{nor}}}\right)$$

Lösung

Gebiet 1: $B_1 = 200 \mu\text{T}$, $\alpha_1 = 45^\circ$ $\mu_r = 1$, Gebiet 2 $\mu_r = 5$

mit Strombelag $B_{2\text{nor}} = \cos(\alpha_1) = \cos(45^\circ) 200 \mu\text{T} = 141,42 \mu\text{T}$

$$B_{2\text{tan}} = \frac{5}{1} \cdot \sin(45) \cdot 200 \mu\text{T} - 5 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 50 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 393,11 \mu\text{T}$$

$$B_2 = \sqrt{141,42 + 393,11} \mu\text{T} = 417,77 \mu\text{T}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{B_{2\text{tan}}}{B_{2\text{nor}}}\right) = \arctan\left(\frac{393,11}{141,42}\right) = 70,21^\circ$$

ohne Strombelag $B_{2\text{nor}} = \cos(\alpha_1) = \cos(45^\circ) 200 \mu\text{T} = 141,42 \mu\text{T}$

$$B_{2\text{tan}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \sin(\alpha_1) \cdot B_1 = \frac{5}{1} \cdot \sin(45) \cdot 200 \mu\text{T} = 707,11 \mu\text{T}$$

$$B_2 = \sqrt{141,42 + 707,11} \mu\text{T} = 721,11 \mu\text{T}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{B_{2\text{tan}}}{B_{2\text{nor}}}\right) = \arctan\left(\frac{721,11}{141,42}\right) = 78,9^\circ$$

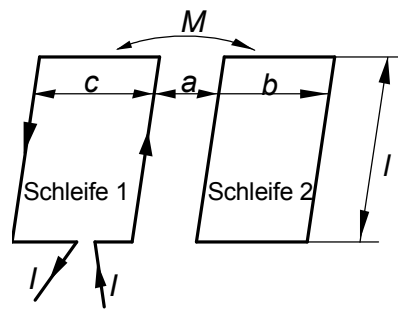
Übung 2 - Induktivitäten, Gegeninduktivitäten

1. Aufgabe

Zwei magnetisch gekoppelte Spulen sind schematisch zu zeichnen. An ihnen sind positive und negative Gegeninduktivität zu erklären. Die Schaltbilder sind zu zeichnen.

2. Aufgabe

a) Ein Leiter, der den Strom I führt, liegt parallel zu einer Schleife 2 im Abstand $a = 0,1$ m. Die Breite der Fläche sei $b = 0,5$ m, ihre Länge sei $l = 10$ m. Der Fluß in der Fläche ist zu berechnen, wenn der Strom $I = 10$ A beträgt. Wie groß ist die Gegeninduktivität? Beide Schleife haben nur eine Windung.



b) Im Abstand a zur Schleife 2 befindet sich eine Schleife 1 mit der Breite $c = 0,1$ m und der gleichen Länge l wie die der Schleife 2. Wie groß ist dann der Fluß in der Fläche der Schleife 2? Wie groß ist die Gegeninduktivität?

3. Aufgabe

Wie groß sind die Induktivitäten folgender Elemente:

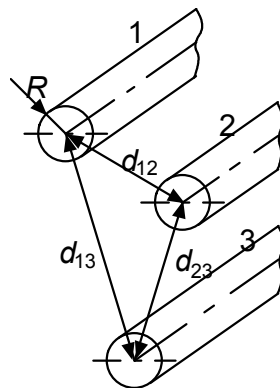
Zylinderspule: 1000 Windungen, 3 cm lang und innerer Durchmesser 4 mm

Toroid-Spule: 2000 Windungen, Ringdurchmesser $D = 8$ cm, Spulendurchmesser $d = 4$ mm.

Doppelleitung: 10 km lang, Leiterabstand 0,7 m, Leiterdurchmesser 1 cm

Koaxialleitung: Länge 2000 m, innerer Durchmesser 20 mm, äußerer Durchmesser 35 mm

4. Aufgabe



Welche Selbstinduktivitäten gibt es bei dem dargestellten Dreileitersystem und wie groß sind diese? Welche Gegeninduktivitäten gibt es, und wie groß sind sie?

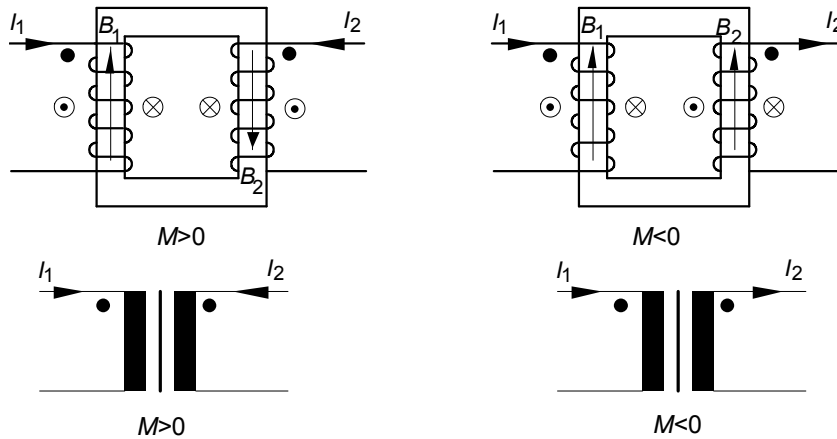
Länge der Leitung $l = 20$ km, alle Abstände $d = 0,5$ m, alle Leiterradien $R = 1$ cm.

Lösungen

1. Aufgabe

linkes Bild: Die Stromrichtungen in beiden Spulen ist so, daß die magnetische Flußdichten B_1 und B_2 gleiche Richtung aufweisen. Die magnetischen Flüsse beider Spulen addieren sich, daher ist die Gegeninduktivität positiv.

rechtes Bild: Die Stromrichtungen in beiden Spulen ist so, daß die magnetische Flußdichten B_1 und B_2 entgegengesetzte Richtung aufweisen. Die magnetischen Flüsse beider Spulen subtrahieren sich, daher ist die Gegeninduktivität zwischen den beiden Spulen negativ.



2. Aufgabe

a) Schleife und ein stromführender Leiter:

$$\Psi = N \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot I \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right).$$

Die Schleife hat nur eine Windung, daher ist $N = 1$ und es folgt

$$\Psi = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 10 \text{ m}}{2\pi} \cdot 10 \text{ A} \cdot \ln\left(\frac{0,1+0,5}{0,1}\right) = 3,582 \cdot 10^{-5} \text{ Vs.}$$

Die Gegeninduktivität:

$$M = \Psi/I = 3,582 \text{ } \mu\text{H.}$$

b) Zwei Schleifen:

$$\Psi = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot I \cdot \left(\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) - \ln\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right) \right)$$

$$\Psi = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 10 \text{ m}}{2\pi} \cdot 10 \text{ A} \cdot \left(\ln\left(\frac{0,1+0,5}{0,1}\right) - \ln\left(\frac{0,1+0,5+0,1}{0,1+0,1}\right) \right).$$

$$\Psi = 1,077 \text{ Vs.}$$

Die Gegeninduktivität

$$M = \Psi/I = 1,077 \text{ } \mu\text{H.}$$

3. Aufgabe

Zylinderspule: $N = 1000$, $l = 3 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ mm}$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 \pi d^2}{4l}$$

$$L = \frac{1000^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot \pi \cdot 0,004^2 \text{ m}^2}{4 \cdot 0,03 \text{ m}} = 0,526 \text{ mH}$$

Toroidspule: $N = 2000$, $D = 8 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ mm}$. (Bei der Toroidspule ist $l = \pi D$.)

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 \pi d^2}{4l} = \frac{N^2 \mu_0 d^2}{4D}$$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 d^2}{4D} = \frac{2000^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 0,004^2 \text{ m}}{4 \cdot 0,08 \text{ m}}$$

$$L = 0,251 \text{ mH}$$

Doppelleitung oder Schleife: $l = 10000 \text{ m}$, $b = d = 0,7 \text{ m}$, $R = d/2 = 0,005 \text{ m}$

$$\Psi = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \left(\ln \left(\frac{d}{R} \right) + \frac{1}{4} \right) = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 10000}{\pi} \cdot \left(\ln \left(\frac{0,7}{0,05} \right) + \frac{1}{4} \right)$$

$$L = 11,6 \text{ mH}$$

Koaxialleitung: $l = 2000 \text{ m}$, $D_a = 35 \text{ mm}$, $D_i = 20 \text{ mm}$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 2000 \text{ m}}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{35}{20} \right)$$

$$L = 0,224 \text{ mH}$$

4. Aufgabe

Selbstinduktivitäten

Es gibt drei Schleifen mit den drei Leitern, wenn diese an den Leiterenden miteinander verbunden sind. Induktivität einer Schleife mit dem Leiter 1 und dem Leiter 3:

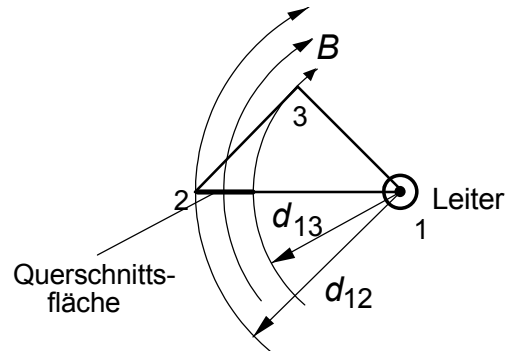
$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \left(\ln \left(\frac{d_{13}}{R} \right) + \frac{1}{4} \right) = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cdot 20000}{\pi} \cdot \left(\ln \left(\frac{0,5}{0,01} \right) + \frac{1}{4} \right)$$

$$L = 33,26 \text{ mH}$$

Ist der Abstand aller Leiter gleich, liegen die Leiter auf einem gleichschenkeligen Dreieck. Die beiden anderen Schleifen (Leiterabstand d_{12} oder d_{23}) haben die gleiche Induktivität.

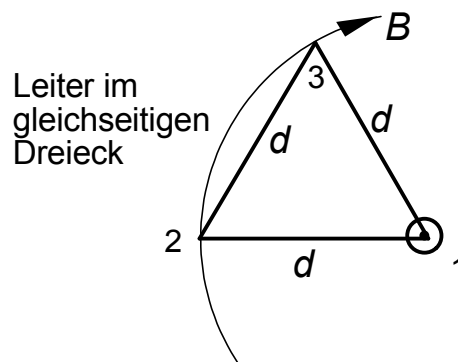
Gegeninduktivitäten

Sind die Leiterabstände ungleich, z.B. d_{13} ist anders als d_{23} , ergibt sich für das vom Leiter 1 ausgehende B-Feld eine Querschnittsfläche, in der ein Fluß hervorgerufen wird. Dann gibt es auch eine Gegeninduktivität:



$$M_{23,1} = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{d_{12}}{d_{13}} \right).$$

Liegen dagegen alle drei Leiter auf einem gleichseitigen Dreieck, dann tritt keine Querschnittsfläche auf, durch die der Fluß hindurchtreten, wie folgendem Bild zu entnehmen ist. Dann gibt es auch keine Gegeninduktivität: $M = 0$. In diesem Fall sind alle Leiterschleifen voneinander magnetisch entkoppelt.



Übung 3 - Magnetischer Kreis

1. Aufgabe

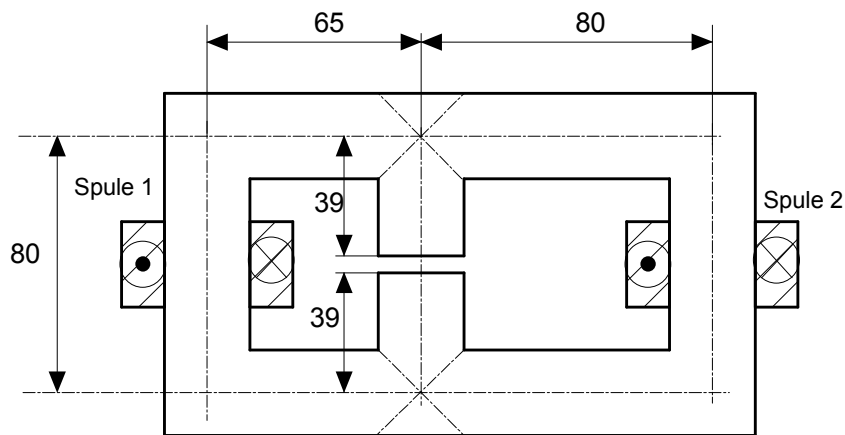
a) Gegeben ist eine Toroidspule mit $N = 3000$ Windungen. Der Ringdurchmesser beträgt $D = 8$ cm, der Toroidquerschnitt ist kreisförmig und weist einen Radius von $R = 1$ cm auf. Die Permeabilitätszahl ist $\mu_r = 100$. In der Spule fließt ein Strom von $I = 0,1$ A. Welchen Betrag hat der magnetische Fluß, die magnetische Flußdichte und die magnetische Feldstärke im Eisenkreis?

b) Im Eisenkreis sei ein Luftspalt mit $\delta = 1$ mm. Wie groß sind nun der magnetische Fluß, die magnetische Flußdichte und die magnetische Feldstärke im Eisenkreis? Wie teilt sich die magnetische Spannung auf den Eisenkreis und auf den Luftspalt auf?

c) Am Luftspalt tritt eine Streuung auf. Die Streuung führt dazu, daß im Luftspalt der magnetische Fluß nur 80% gegenüber dem Fluß im ungestörten Eisenkreis beträgt. Wie groß sind nun der magnetische Fluß, die magnetische Flußdichte und die magnetische Feldstärke im Eisenkreis? Wie teilt sich die magnetische Spannung auf den Eisenkreis und auf den Luftspalt auf?

2. Aufgabe

Gegeben ist der in der Skizze dargestellte magnetische Kreis mit zwei Spulen. Spule 1 führt den Strom 0,5 A und hat die Windungszahl $N_1 = 500$, Spule 2 führt den Strom 2,0 A und hat die Windungszahl $N_2 = 200$. Die Permeabilitätszahl sei $\mu_r = 800$. Der Eisenquerschnitt beträgt überall 20 mm mal 20 mm.



Alle Maße in mm Zeichnung nicht maßstäblich!

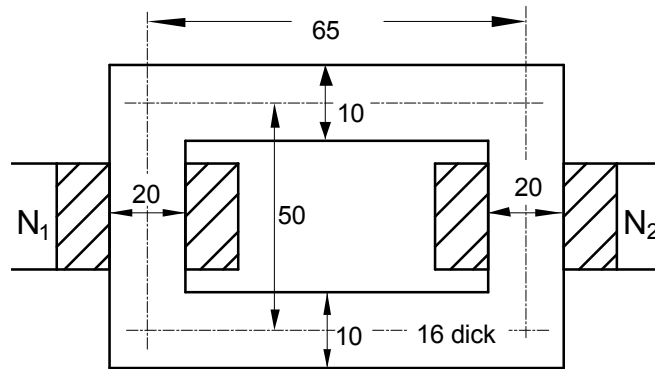
a) Das magnetische Ersatzschaltbild ist zu zeichnen und die magnetischen Widerstände sind zu berechnen.

b) Alle Flüsse in den verschiedenen Abschnitten des magnetischen Kreises sind zu berechnen.

c) Die Induktivitäten L_1 , L_2 und die Gegeninduktivität M sind zu berechnen.

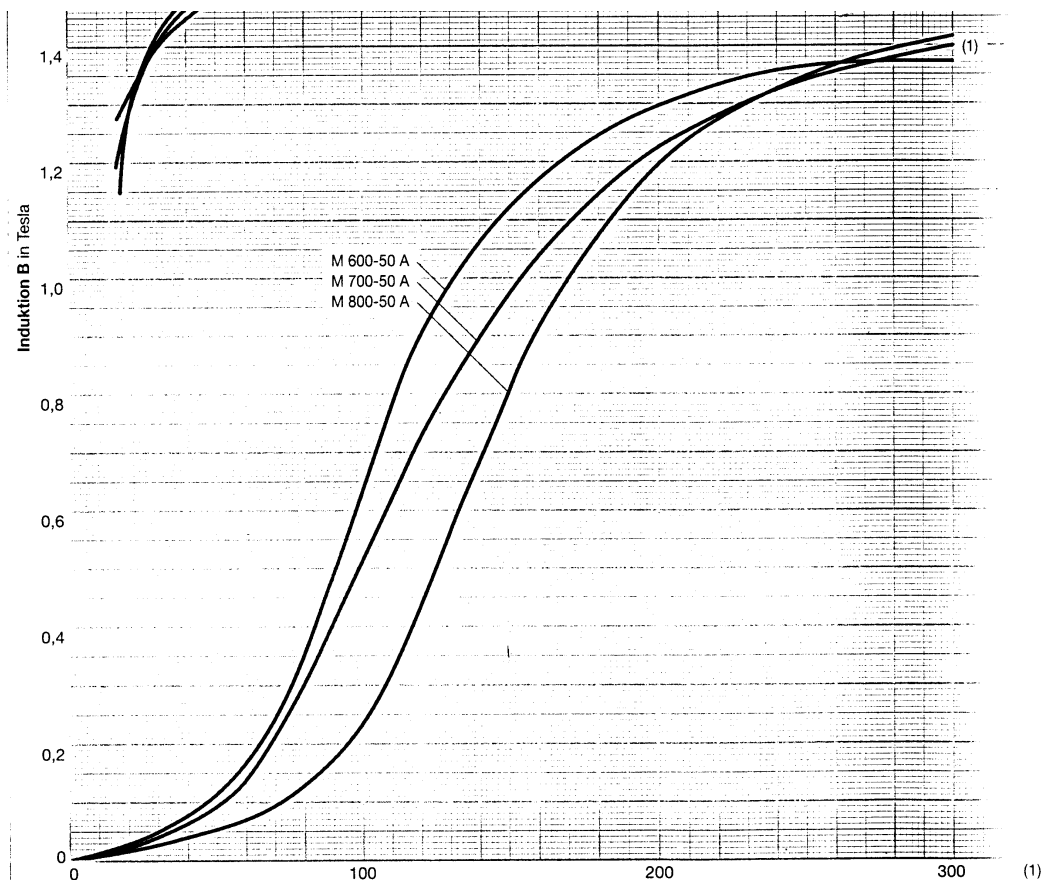
3. Aufgabe

Gegeben ist der in der Skizze dargestellte Eisenkreis mit zwei Spulen. Sie haben die Windungszahlen: $N_1 = 1150$ und $N_2 = 50$.



Alle Maße in mm
Zeichnung nicht maßstabsgerecht!

- a) Die Induktivitäten und die Gegeninduktivität sind zu bestimmen. Es sei $\mu_r = 2000$. Streuung wird vernachlässigt.
- b) Da μ_r von B bzw. H abhängig ist, sind Berechnungen mit einem konstante μ_r nur eine Näherung. Soll der richtige Zusammenhang zwischen Strom und Flußdichte bestimmt werden, muß dies mittels der nichtlinearen B-H-Kennlinie geschehen, die das Bild zeigt. Im magnetischen Kreis soll der Fluss $\Phi_{Fe} = 10^{-4}$ Wb betragen. Für diesem Fluss ist der Strom I_1 in der linken Spule zu berechnen.
- c) In der Spule 1 fließt ein Strom von 25 mA. Wie groß ist der Fluss Φ_{Fe} ?

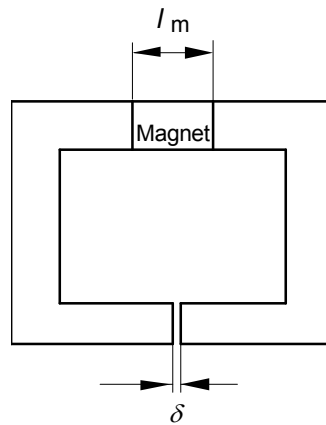


4. Aufgabe

Gegeben ist folgende Entmagnetisierungskurve des Magneten AlNiCo A35/5:

$\frac{H}{\text{kA/m}}$	0	-10	-20	-30	-35	-40	-44	-47
$\frac{B}{\text{T}}$	1,12	1,1	1,07	1,03	0,97	0,87	0,65	0

Aus diesem Magneten wird ein magnetischer Kreis mit Luftspalt aufgebaut, siehe Skizze. Der Querschnitt des Eisenkreises und des Magneten ist konstant und gleich dem Luftspaltquerschnitt, er beträgt 4 cm^2 . Bei der Berechnung wird die magnetische Spannung des Eisenkreises gegenüber der magnetischen Spannung des Luftspaltes vernachlässigt. Am Luftspalt tritt Streuung auf, der Streufaktor beträgt $s = 0,8$. Gesucht ist die magnetische Flußdichte im Luftspalt in Abhängigkeit von der Magnetlänge l_M . Die Luftspaltlänge beträgt $\delta = 2 \text{ mm}$.



Lösungen

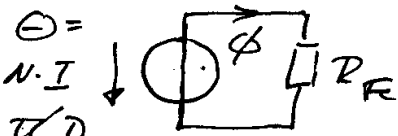
1. Aufgabe a) Toroidspule

$$\underline{H} = \frac{N \cdot I}{2\pi R} = \frac{N \cdot I}{\pi D} = \frac{3000 \cdot 0,1 \text{ A}}{\pi \cdot 0,08 \text{ m}} = \underline{1193,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

$$\underline{B} = \mu_r \mu_0 \cdot H = 100 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1193,7 \frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{0,15 \text{ T}}$$

$$\underline{\Phi} = B \cdot A_{\text{K}} = 0,15 \text{ T} \cdot \pi (0,01 \text{ m})^2 = \underline{47,14 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}$$

oder Berechnung nach der Methode des magu. Kreises:

$$R_{\text{Fe}} = \frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_r \mu_0 A_{\text{Fe}}} = \frac{\pi D}{\mu_r \mu_0 \pi R^2}$$


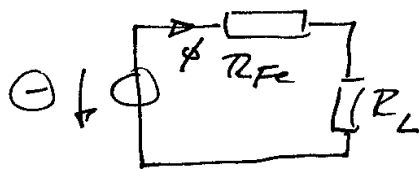
$$R_{\text{Fe}} = \frac{D}{\mu_r \mu_0 R^2} = \frac{0,08 \text{ m}}{100 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot (0,01 \text{ m})^2}$$

$$\underline{R_{\text{Fe}} = 6,365 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}}$$

$$\underline{\Phi} = \frac{\ominus}{R_{\text{Fe}}} = \frac{N \cdot I}{R_{\text{Fe}}} = \frac{3000 \cdot 0,1 \text{ A}}{6,365 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}} = \underline{47,13 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}$$

b) Toroid mit Luftspalt $\delta = 1 \text{ mm}$

Nach d. Methode des magu. Kreises:



$$l_{\text{Fe}} = \pi \cdot D - \delta \approx \pi D,$$

Wenn $\delta \ll D$ ist. Dann

ändert sich R_{Fe} gegenüber

der Toroidspule nicht!

$$\underline{R_{\text{Fe}} = 6,365 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}}$$

$$\underline{R_L} = \frac{\delta}{\mu_0 A} = \frac{0,001 \text{ mm}}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \pi \cdot (0,01 \text{ m})^2} = \underline{2,53 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{H}}}$$

$$\underline{\Phi} = \frac{\ominus}{R_{\text{Fe}} + R_L} = \underline{33,71 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}$$

Es liegt keine Streuung vor, daher ist

$\Phi_{Fe} = \Phi_L$ und $A_{Fe} = A_L$ und

$$\underline{B_{Fe}} = \underline{B_L} = \frac{\Phi}{A} = \frac{33,71 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}}{\pi (0,01 \text{ m})^2} = \underline{0,1073 \text{ T}}$$

$$\underline{H_L} = \frac{B_L}{\mu_0} = \frac{0,1073 \text{ Vs/m}^2}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = \underline{85,36 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

$$\underline{H_{Fe}} = \frac{B_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{H_L}{\mu_r} = \frac{85,36 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}}{100} = \underline{853,6 \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

Nachweis, dass $\overset{\circ}{V} = V_{Fe} + V_L$ ist

$$V_{Fe} + V_L = \ell_{Fe} \cdot H_{Fe} + \delta \cdot H_L = \pi \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 853,6 \frac{\text{A}}{\text{m}} + 0,001 \text{ m} \cdot 85,36 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

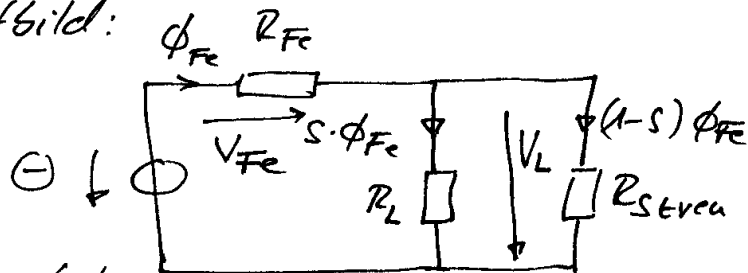
$$\overset{\circ}{V} = 214,53 \text{ A} + 85,36 \text{ A} = 299,8 \text{ A} = \ominus = 300 \text{ A}$$

c) Luftspalt mit Streuung $s = 0,8$ ($\hat{=} 80\%$)

Am Luftspalt tritt Streuung auf, dann gilt

$$\Phi_L = s \cdot \Phi_{Fe}$$

Ersatzschaltbild:



Maschenumlauf liefert

$$\ominus = V_{Fe} + V_L$$

oder $\ominus = R_{Fe} \cdot \Phi_{Fe} + R_L \cdot \Phi_L$

Nebenrechnung:

$$V = \ell \cdot H = \ell \cdot \frac{B}{\mu} = \frac{\ell}{\mu} \cdot B \cdot \frac{A}{A} = \frac{\ell}{\mu A} \cdot BA$$

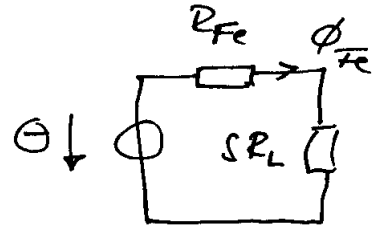
$$V = R_m \cdot \Phi$$

$$\text{Aus } \ominus = R_{Fe} \cdot \phi_{Fe} + R_L \cdot \phi_L$$

$$\text{folgt } \ominus = R_{Fe} \cdot \phi_{Fe} + R_L \cdot s \cdot \phi_{Fe} = (R_{Fe} + s \cdot R_L) \cdot \phi_{Fe}$$

$$\text{oder } \phi_{Fe} = \frac{\ominus}{R_{Fe} + s R_L}$$

Neues Ersatzschaltbild



$$\text{Mit } R_{Fe} = 6,365 \cdot 10^6 \frac{1}{H}$$

$$R_L = 2,53 \cdot 10^6 \frac{1}{H}$$

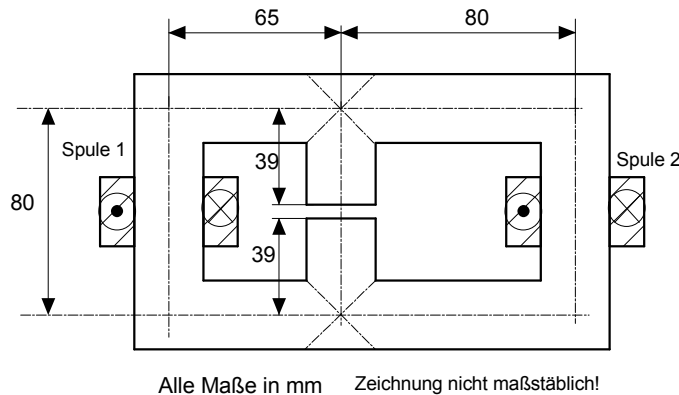
$$\text{folgt } \underline{\underline{\phi_{Fe}}} = \frac{300 \text{ A}}{(6,365 + 0,8 \cdot 2,53) \cdot 10^6 \frac{1}{H}} = \underline{\underline{35,76 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}}$$

$$\underline{\underline{\phi_L}} = 0,8 \cdot 35,76 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} = \underline{\underline{28,61 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}}$$

$$\underline{\underline{B_{Fe}}} = \frac{\phi_{Fe}}{A_{Fe}} = \frac{35,76 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2} = \underline{\underline{0,114 \text{ T}}}$$

$$\underline{\underline{B_L}} = \frac{\phi_L}{A_L} = \frac{28,61 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}}{\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2} = \underline{\underline{0,091 \text{ T}}}$$

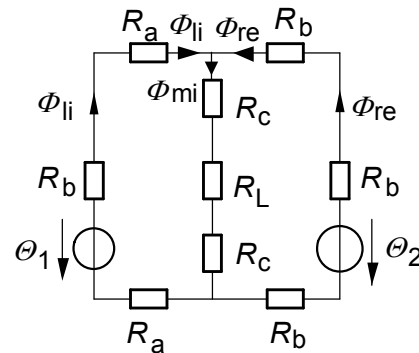
2. Aufgabe



Der gegebene Eisenkreis

a) Ersatzschaltbild und magnetische Widerstände

Hinweis: Als Länge der magnetischen Widerstände wird der Abstand zwischen den Mittellinien (Bei R_a oder R_b) oder zwischen einer Endfläche und einer dazu parallel verlaufenden Mittellinie (bei R_c) oder zwischen zwei Endflächen (bei R_L) genommen.



Die magnetischen Widerstände:

Die magnetische Ersatzschaltung

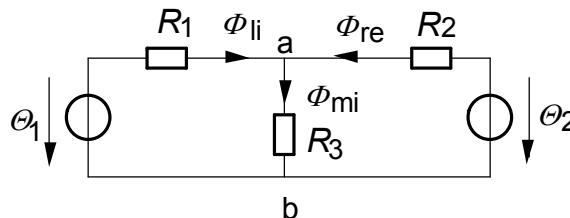
$$R_a = \frac{l_a}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,065 \text{ m}}{800 \cdot \mu_0 \cdot 0,02^2 \text{ m}^2} = 1,62 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_b = \frac{l_b}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,08 \text{ m}}{800 \cdot \mu_0 \cdot 0,02^2 \text{ m}^2} = 1,99 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_c = \frac{l_c}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,039 \text{ m}}{800 \cdot \mu_0 \cdot 0,02^2 \text{ m}^2} = 0,97 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_L = \frac{l_L}{\mu_0 \cdot A} = \frac{0,002 \text{ m}}{\mu_0 \cdot 0,02^2 \text{ m}^2} = 39,78 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

Daraus folgt ein **neues Ersatzschaltbild:**



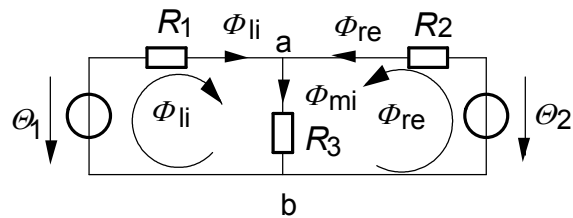
Berechnung der magnetischen Widerstände des neuen Ersatzschaltbildes:

$$R_1 = 2R_a + R_b = 5,23 \cdot 10^5 \text{ 1/H} \quad \text{und} \quad R_2 = 3R_b = 5,97 \cdot 10^5 \text{ 1/H}$$

$$R_3 = 2R_c + R_L = 41,74 \cdot 10^5 \text{ 1/H}$$

b) Berechnung der Flüsse (mehrere Wege!)

I) Die Berechnung der Flüsse erfolgt mit dem **Maschenstromverfahren**. Spannungen sind die Durchflutungen und Ströme sind die Flüsse. Schaltplan:



Gleichungssystem

$$\mathcal{O}_1 = (R_1 + R_3) \Phi_{li} + R_3 \Phi_{re}$$

$$\mathcal{O}_3 = R_3 \Phi_{li} + (R_1 + R_3) \Phi_{re}$$

Auflösen ergibt

$$\Phi_{li} = -95,61 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$$

und $\Phi_{re} = 167,49 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$

Daraus folgt

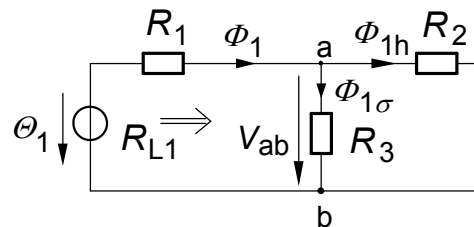
$$\Phi_{mi} = \Phi_{li} + \Phi_{re} = 71,88 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$$

II) Berechnung nach dem Überlagerungsverfahren.**Berechnung über Streugrad und Streufaktor:**

bI) $\mathcal{O}_1 = N_1 I_1 = 500 \cdot 0,5 \text{ A} = 250 \text{ A}$, $\mathcal{O}_2 = 0$

Der Streugrad ist definiert zu

$$\sigma = \frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_{1h}}$$



Da sich die Flüsse umgekehrt wie die magnetischen Widerstände verhalten, gilt in diesem Fall:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_{1h}} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{5,97 \cdot 10^5}{41,74 \cdot 10^5} = 0,143.$$

Der Streufaktor berechnet sich aus dem Streugrad zu

$$s_1 = \frac{1}{1 + \sigma_1} = \frac{1}{1 + 0,143} = 0,875$$

Zur Berechnung des Flusses Φ_1 muß der Widerstand R_{L1} bekannt sein. Er bestimmt sich zu

$$R_{L1} = R_1 + R_2 \parallel R_3 = (5,23 + 5,97 \parallel 41,74) \cdot 10^5 \text{ 1/H} = (5,22 + 5,22) \cdot 10^5 \text{ 1/H}$$

$$R_{L1} = 10,44 \cdot 10^5 \text{ 1/H.}$$

Dann folgt $\Phi_1 = \frac{\mathcal{O}_1}{R_{L1}} = \frac{250 \text{ A}}{10,44 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,239 \cdot 10^{-3} \text{ Vs.}$

Der Hauptfluß berechnet sich zu

$$\Phi_{1h} = s_1 \cdot \Phi_1 = 0,875 \cdot 0,239 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ Vs.}$$

Der Streufluß berechnet sich zu

$$\Phi_{1\sigma} = \Phi_1 - \Phi_{1h} = (0,239 - 0,209) \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,030 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

Berechnung mittels der magnetischen Spannungen

Es wird die magnetische Spannung V_{ab} bestimmt:

$$V_{ab} = \Theta_1 - R_1 \cdot \Phi_1 = 250 \text{ A} - 5,23 \cdot 10^5 \text{ 1/H} \cdot 0,239 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

$$V_{ab} = 250 \text{ A} - 123,95 \text{ A} = 125,0 \text{ A}$$

Daraus folgt für den Hauptfluß

$$\Phi_{1h} = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{125,0 \text{ A}}{5,97 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

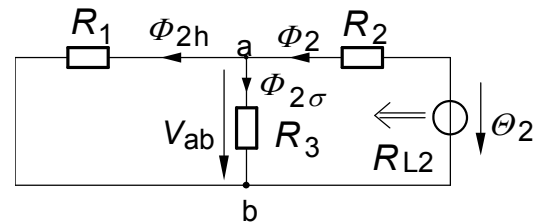
und für den Streufluß

$$\Phi_{1\sigma} = \frac{V_{ab}}{R_3} = \frac{125,0 \text{ A}}{41,74 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,0299 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

bII) $\Theta_2 = N_2 I_2 = 200 \cdot 2,0 \text{ A} = 400 \text{ A}$, $\Theta_1 = 0$

Im zweiten Teil werden die Berechnungen nur mittels Streugrad und Streufaktor durchgeführt.

Streugrad $\sigma_2 = \frac{\Phi_{2\sigma}}{\Phi_{2h}} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{5,23 \cdot 10^5}{41,74 \cdot 10^5} = 0,125$



Vereinfachtes Ersatzschaltbild

Streuziffer $s_2 = \frac{1}{1 + \sigma_2} = \frac{1}{1 + 0,125} = 0,889$

$$R_{L2} = R_2 + R_1 \parallel R_3 = (5,97 + 5,23 \parallel 41,74) \cdot 10^5 \text{ 1/H} = (5,97 + 4,65) \cdot 10^5 \text{ 1/H}$$

$$R_{L2} = 10,62 \cdot 10^5 \text{ 1/H.}$$

Dann folgt $\Phi_2 = \frac{\Theta_2}{R_{L2}} = \frac{400 \text{ A}}{10,62 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,377 \cdot 10^{-3} \text{ Vs.}$

Der Hauptfluß berechnet sich zu

$$\Phi_{2h} = s_2 \cdot \Phi_2 = 0,889 \cdot 0,377 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,335 \cdot 10^{-3} \text{ Vs.}$$

Der Streufluß berechnet sich zu

$$\Phi_{2\sigma} = \Phi_2 - \Phi_{2h} = (0,377 - 0,335) \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,042 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

bIII) **Überlagerung der Teilergebnisse:**

$$\Phi_{li} = \Phi_1 - \Phi_{2h} = (0,239 - 0,335) \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = -0,096 \text{ Vs}$$

$$\Phi_{re} = \Phi_2 - \Phi_{1h} = (0,377 - 0,209) \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,168 \text{ Vs}$$

$$\Phi_{mi} = \Phi_{1s} + \Phi_{2s} = (0,030 + 0,042) \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 0,072 \text{ Vs}$$

c) Bestimmung der Induktivitäten und der Gegeninduktivität

cI) Allgemein gilt bei einem magnetischen Kreis:

$$L = N^2/R_m \quad \text{und} \quad M = \sqrt{s_1 s_2} \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}.$$

Induktivität L_1 : $L_1 = \frac{N_1^2}{R_{L1}} = \frac{500^2}{10,44 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,239 \text{ H}$

Induktivität L_2 : $L_2 = \frac{N_2^2}{R_{L2}} = \frac{200^2}{10,62 \cdot 10^5 \text{ 1/H}} = 0,038 \text{ H}$

Gegeninduktivität: $M = \sqrt{s_1 s_2} \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{0,875 \cdot 0,889} \cdot \sqrt{0,239 \cdot 0,038} \text{ H}$

$$M = 0,882 \cdot 0,095 \text{ H} = 0,084 \text{ H}$$

Es gilt $M = M_{12} = M_{21}$

cII) Berechnung der Gegeninduktivität aus der Flußverkeftung.

Unter bI) wurde berechnet:

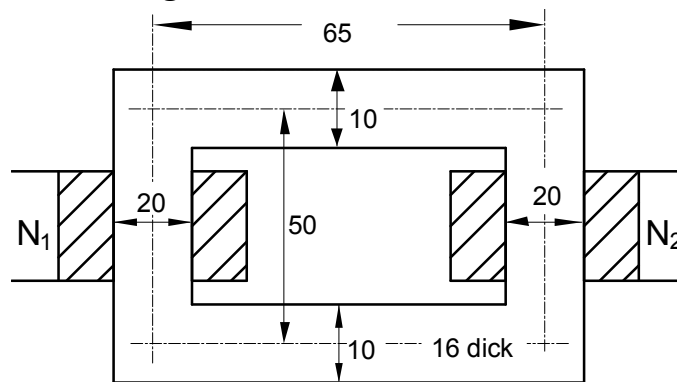
$$\Phi_{1h} = 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

Der Strom ist $I_1 = 0,5 \text{ A}$

Die Gegeninduktivität bestimmt sich aus diesen Daten zu

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{1h}}{I_1} = \frac{200 \cdot 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}{0,5 \text{ A}} = 0,084 \text{ H}$$

3. Aufgabe a) Bestimmung der Induktivitäten



Alle Maße in mm
Zeichnung nicht maßstabsgerecht!

$\mu_r = 2000$, $N_1 = 1150$, $N_2 = 50$. Zur Bestimmung der Induktivitäten ist der magnetische Widerstand des Kreises erforderlich.

$$R_m = 2R_1 + 2R_2$$

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,065 \text{ m}}{2000 \cdot \mu_0 \cdot (0,01 \cdot 0,016) \text{ m}^2} = 161,6 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} = \frac{0,05 \text{ m}}{2000 \cdot \mu_0 \cdot (0,02 \cdot 0,016) \text{ m}^2} = 62,2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_m = 2 \cdot (161,6 + 62,2) \cdot 10^3 \text{ 1/H} = 447,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H.}$$

Die Induktivitäten

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m} = \frac{1150^2}{447,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H}} = 2,95 \text{ H}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_m} = \frac{50^2}{447,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H}} = 4,58 \text{ mH}$$

$$M = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} = \frac{1150 \cdot 50}{571,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H}} = 0,128 \text{ H}$$

b) Berechnung eines nichtlinearen magnetischen Kreises

Bei den bisherigen Berechnungen wurden magnetische Widerstände verwendet, die aufgrund der linearen Annahme zwischen dem B- und H-Feld: $B = \mu H$, eine von B und H unabhängige, konstante Größe darstellen.

Wird dagegen der nichtlineare Zusammenhang zwischen dem B- und dem H-Feld berücksichtigt, durch die B-H-Kennlinie dargestellt ist, kann man bei gegebenem Fluß Φ_{Fe} im Eisen auf einfachem Weg die dazu notwendige Durchflutung $\Theta = NI$, bzw. den Strom I aus $I = \Theta/N$ bestimmen. Jedoch ist der umgekehrte Weg, nämlich für einen gegebenen Strom I die Durchflutung zu bestimmen nur näherungsweise möglich.

1. Fall:

Gegeben ist der unter a) gegebene magnetische Kreis. Im magnetischen Kreis soll der Fluß $\Phi_{Fe} = 1 \cdot 10^{-4}$ Wb betragen. Gesucht ist der Strom in Spule 1.

Der magnetische Kreis besteht aus zwei Pfaden.

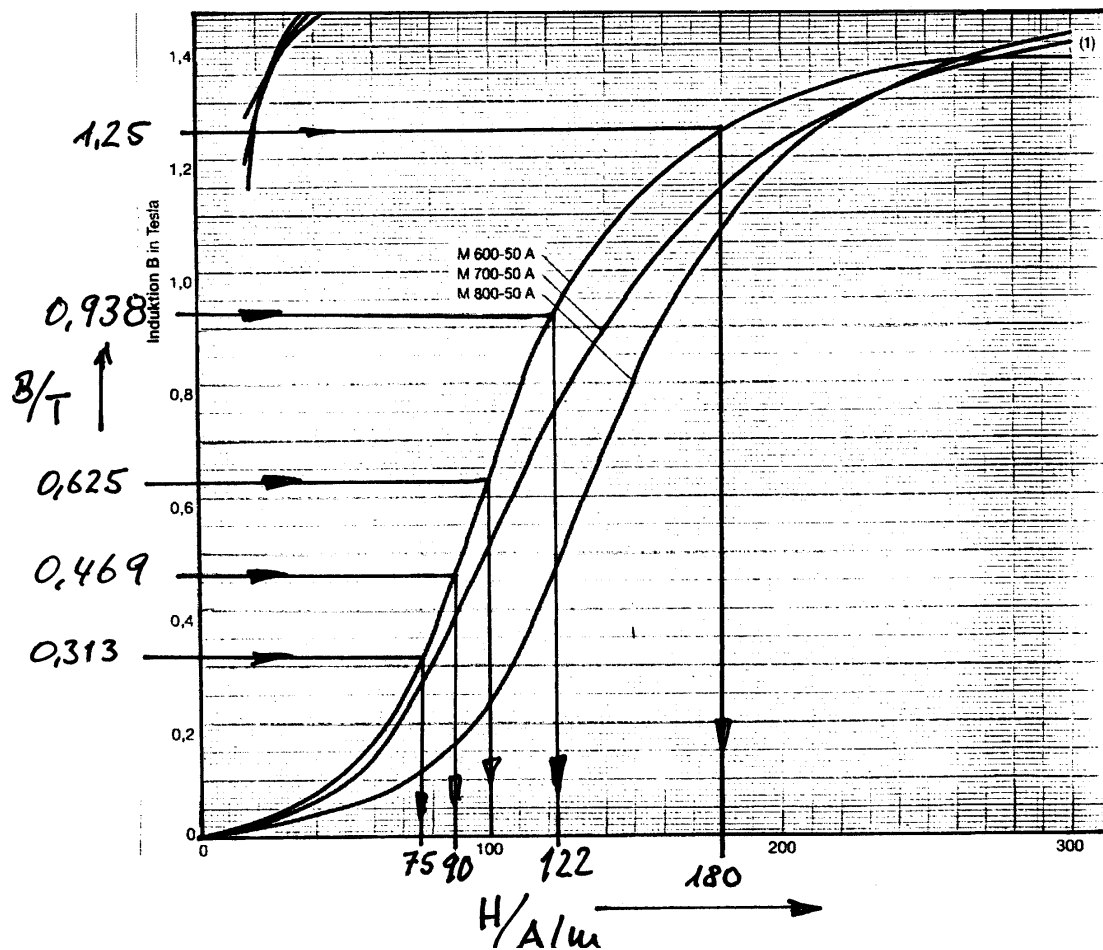
Der Pfad a mit der Länge $l_a = 0,65$ m hat den Querschnitt

$$A_a = 0.01\text{m mal } 0.016 \text{ m} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

In dem Pfad tritt die Flußdichte $B_a = \Phi_{Fe}/A_a = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} / 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,625 \text{ T}$ auf.

Aus der B-H-Kennlinie entnimmt man dazu den H-Wert von $H_a = 100 \text{ A/m}$.

(Material M 600-50 A)



Der Pfad b mit der Länge $l_b = 0,05$ m hat den Querschnitt

$$A_b = 0.02 \text{ m mal } 0.016 \text{ m} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

In diesem Pfad tritt die Flußdichte $B_b = \Phi_{Fe}/A_b = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} / 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,313 \text{ T}$

auf.

Aus der B - H -Kennlinie entnimmt man dazu den H -Wert von $H_b = 75 \text{ A/m}$.

Nun kann die magnetische Spannung berechnet werden:

$$V = 2 \cdot l_a \cdot H_a + 2 \cdot l_b \cdot H_b$$

$$V = 2 \cdot 0,065 \text{ m} \cdot 100 \text{ A/m} + 2 \cdot 0,05 \text{ m} \cdot 75 \text{ A/m} = 20,5 \text{ A}$$

Diese magnetische Spannung muß durch die Durchflutung der Spule 1 hervorgerufen werden:

$$\Theta_1 = V = 20,5 \text{ A}$$

Daraus folgt für den Strom, der in Spule 1 fließen muß:

$$I = \Theta_1 / N_1 = 20,5 \text{ A} / 1150 = 17,8 \text{ mA}$$

2. Fall

Wie groß ist der magnetische Fluß für einen Strom von 25 mA?

Um diese Frage zu lösen, wird die Rechnung gemäß Fall 1 für verschiedene Flußgrößen durch geführt. Die Ergebnisse werden dann als $\Phi_{Fe}(I)$ aufgefaßt und als Kennlinie dargestellt. Aus dieser Kennlinie kann anschließend der Fluß für den gegebenen Strom $I = 25 \text{ mA}$ bestimmt werden.

Zunächst werden verschiedene Flüsse angenommen:

a) Fluß $1 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ erfordert den Strom von 17,8 mA (soeben berechnet.)

b) Fluß $2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$:

Dann ist $B_a = 1,25 \text{ T}$ und $H_a = 180 \text{ A/m}$; $B_b = 0,625 \text{ T}$ und $H_b = 100 \text{ A/m}$.

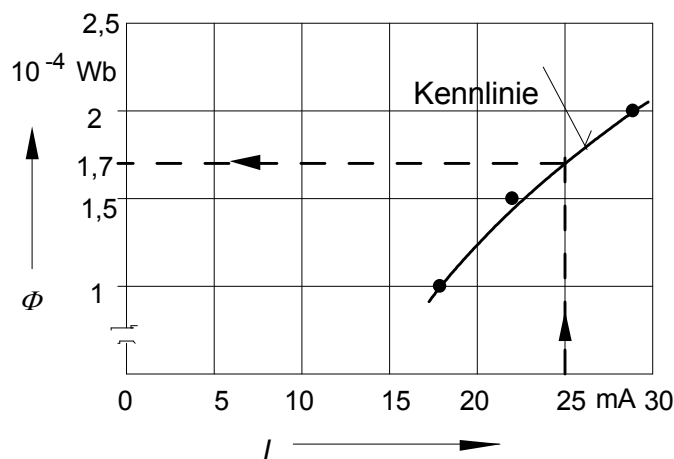
Die magnetische Spannung beträgt $V = 33,4$ und der Strom $I_1 = 29 \text{ mA}$.

c) Es wird der Fluß für den Strom $I_1 = 25 \text{ mA}$ gefordert. Da der Strom von 28 mA größer und der Strom von 17,8 mA kleiner ist, wird nun ein Fluß vorgegeben, der zwischen den beiden bisherigen Annahmen liegt: Fluß sei $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$:

Dann ist $B_a = 0,938 \text{ T}$ und $H_a = 122 \text{ A/m}$; $B_b = 0,469 \text{ T}$ und $H_b = 90 \text{ A/m}$.

Die magnetische Spannung beträgt $V = 24,86 \text{ A}$ und der Strom $I_1 = 22 \text{ mA}$.

Aus diesen Daten konstruierte Kennlinie $\Phi_{Fe}(I)$:



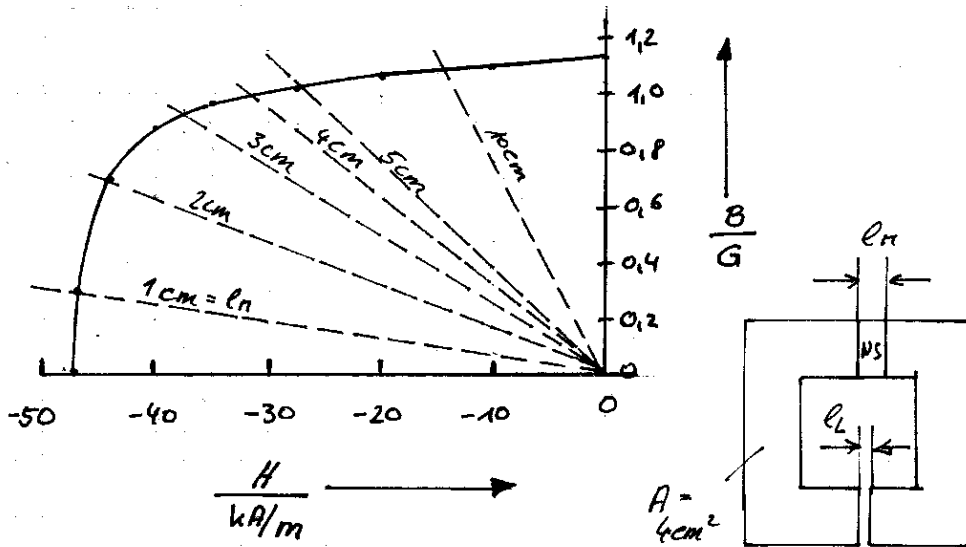
Kennlinie $\Phi(I)$

Aus der Kennlinie entnimmt man: Bei einem Spulenstrom der Spule 1 von 25 mA tritt im magnetischen Kreis der Fluß $\Phi = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ auf

4. Aufgabe

Gegeben ist folgende Entmagnetisierungskurve eines Magneten:

$\frac{H}{kA/m}$	0	-10	-20	-30	-35	-40	-44	-47
$\frac{B}{T}$	1,12	1,1	1,07	1,03	0,97	0,87	0,65	0



Aus diesem Werkstoff ist ein magnetischer Kreis aufzubauen, Der Luftspalt habe die Länge $l_L = 2\text{mm}$, die Querschnittsfläche von Luftspalt und Magnet sei übereinstimmend $A = 4\text{cm}^2$. Die magnetische Spannung des Magneten wird gegenüber der magnetischen Spannung des Luftspaltes vernachlässigt, ebenso wie die magnetische Spannung im übrigen Eisen. Gesucht ist die magnetische Flussdichte im Luftspalt als Funktion der Magnetlänge l_m . Der Streifaktor sei $0,1 \Rightarrow \phi_L = 5 \cdot \phi_m = 0,1 \phi_m$.

Lösung

$$V_M + V_L = 0$$

$$V_M = -V_L$$

$$H_M \cdot l_M = -H_L \cdot l_L$$

$$H_M = -\frac{l_L}{l_M} \cdot H_L$$

Es gilt:

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0}$$

$$H_M = -\frac{l_L}{\mu_0 \cdot l_M} \cdot B_L$$

Aus

$$\Phi_L = S \cdot \Phi_M$$

und

$$\Phi_L = A_L \cdot B_L$$

$$\Phi_M = A_M \cdot B_M$$

folgt

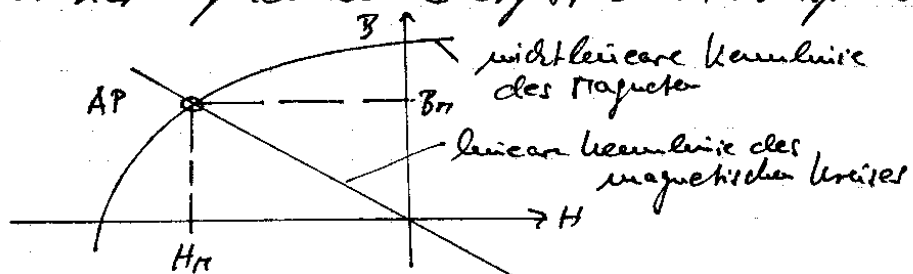
$$A_L \cdot B_L = S \cdot A_M \cdot B_M$$

$$B_L = \frac{S \cdot A_M}{A_L} \cdot B_M$$

Einsetzen liefert $H_M = -\frac{S}{\mu_0} \cdot \frac{l_L}{l_M} \cdot \frac{A_M}{A_L} \cdot B_M$

bzw. $B_M = -\frac{\mu_0}{S} \cdot \frac{l_M}{l_L} \cdot \frac{A_L}{A_M} \cdot H_M$

Dieser lineare Zusammenhang zwischen B_M und H_M ergibt eine fallende Gerade im B_M, H_M -Koordinatensystem des Magneten. Der Schnittpunkt mit der Entmagnetisierungskennlinie ergibt den Arbeitspunkt.



Zur Lösung der Aufgabe wird von der Gleichung

$$B_m = - \frac{\mu_0}{s} \cdot \frac{l_m}{l_k} \cdot \frac{A_L}{A_m} \cdot H_m$$

ausgegangen: $s = 0,8$; $l_k = 2 \text{ mm} = 0,2 \text{ cm}$; $A_L/A_m = 1$

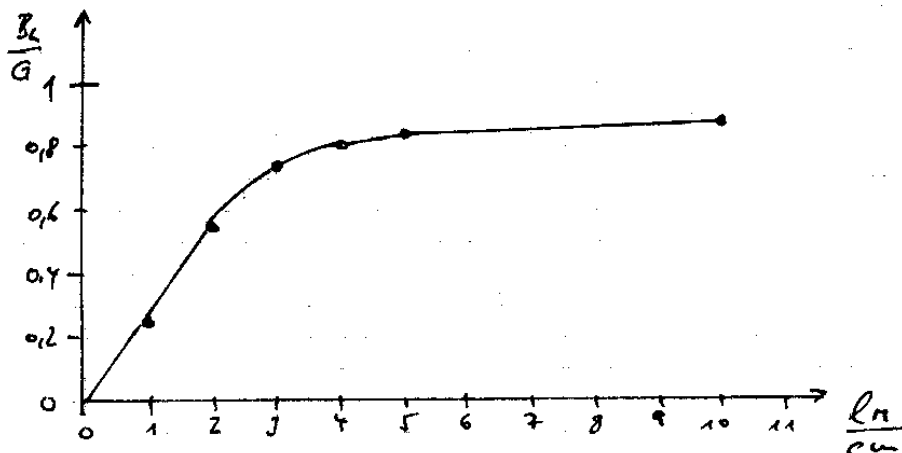
$$B_m = - \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{0,8 \cdot 0,2 \text{ cm}} \cdot l_m \cdot H_m = -k \cdot l_m \cdot H_m$$

$$k = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}{0,8 \cdot 0,2 \text{ cm}} = 7,854 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m} \cdot \text{cm}}$$

Es wird folgende Tabelle angelegt:

$\frac{l_m}{\text{cm}}$	$\frac{k \cdot l_m}{\text{Vs/Am}}$	Arbeitspunkt		$\frac{B_L = 0,8 \cdot B_T}{\text{T}}$
		$\frac{H_m}{\text{kA/m}}$	$\frac{B_m}{\text{T}}$	
1	$7,854 \cdot 10^{-6}$	-48	0,3	0,24
2	$1,5708 \cdot 10^{-5}$	-44	0,7	0,56
3	$2,3562 \cdot 10^{-5}$	-37,5	0,92	0,736
4	$3,1416 \cdot 10^{-5}$	-31,5	1,00	0,8
5	$3,927 \cdot 10^{-5}$	-27,5	1,02	0,816
10	$7,854 \cdot 10^{-5}$	-14	1,08	0,864

↑
gemeinsame Gerade im 2. Quadranten



Übung 4 - Induktionsgesetz

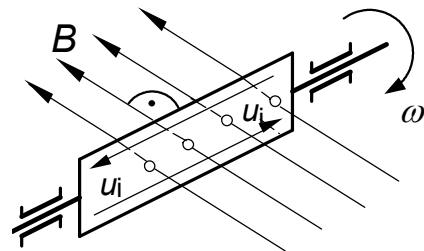
1. Aufgabe

a) Eine Spule mit 2000 Windungen und der Querschnittsfläche von 5 cm^2 wird senkrecht von einem Magnetfeld mit $B = 1,2 \text{ T} \sin(2\pi f t)$ durchsetzt. Welche Spannung entsteht in der Spule, wenn die Frequenz des speisenden Stroms 50 Hz oder 750 Hz beträgt?

b) In den magnetischen Kreis nach Übung 3, Aufgabe 3 a wird in Spule 1 der Strom $i_1 = 0,1 \text{ A} \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ eingepreßt. Welche Spannung tritt an der leerlaufenden Spule 2 auf?

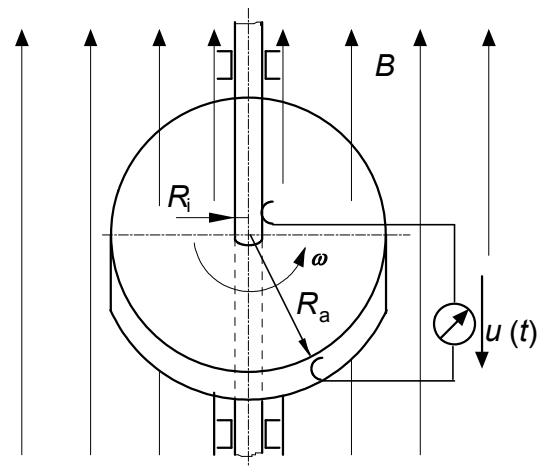
2. Aufgabe

In einem homogenen Magnetfeld der Stärke von $B = 1,5 \text{ Tesla}$ dreht sich eine Spule mit der Drehzahl $n = 3000 \text{ min}^{-1}$, siehe Bild rechts. Die Querschnittsfläche liegt quer zum Feld. Die Spule hat $N = 10$ Windungen, ihre Fläche beträgt $A = 1 \text{ m}^2$. Welche Spannung liefert die Spule?



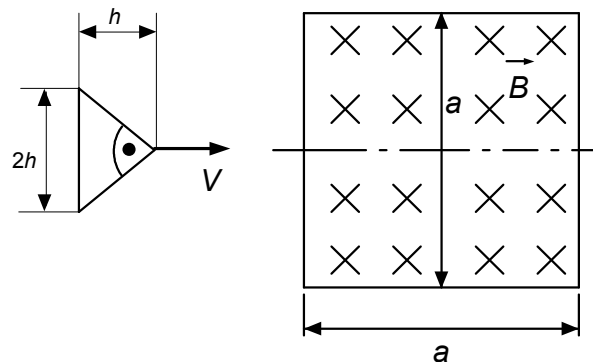
3. Aufgabe

In der Skizze ist eine Unipolarmaschine dargestellt. Die Metallscheibe hat die Drehzahl von $n = 12000 \text{ min}^{-1}$. Sie wird senkrecht von einem Magnetfeld durchsetzt, das eine magnetische Flußdichte von 5 T aufweist. Wie groß ist die zwischen der Achse mit dem Radius $R_i = 5 \text{ cm}$ und am Umfang mit dem Radius $R_a = 0,5 \text{ m}$ abgreifbare Spannung?



4. Aufgabe

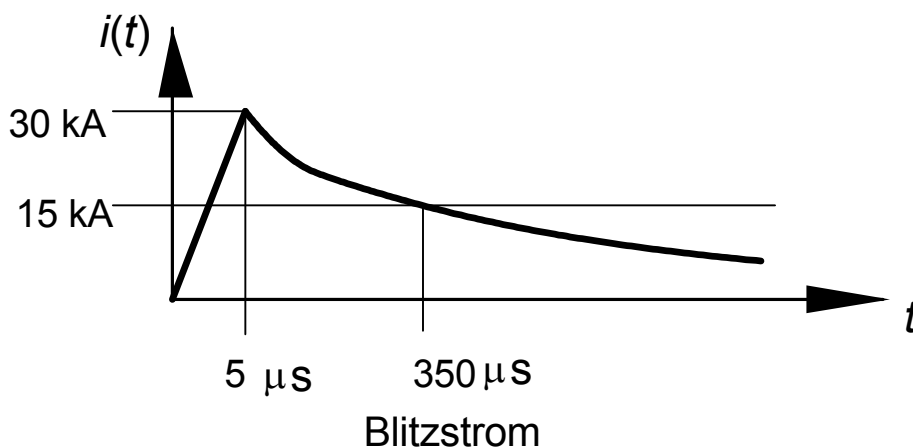
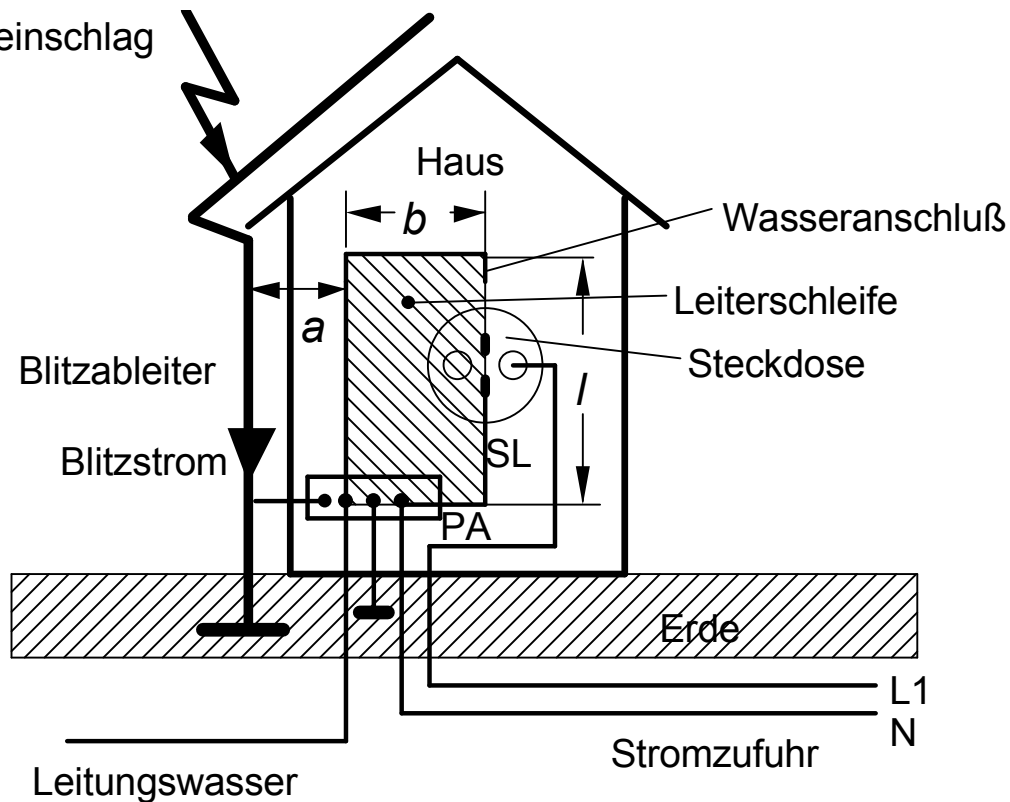
In ein räumlich begrenztes, homogenes Magnetfeld der Flußdichte $B = 1 \text{ T}$ tritt eine dreieckförmige Fläche ein, siehe rechtes Bild. Die Höhe der Schleife ist $h = 15 \text{ cm}$. Die Schleife bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 15 \text{ m/s}$. ($a = 30 \text{ cm}$).



Der zeitliche Verlauf des Flusses $\Phi(t)$ in der Schleife, wenn diese sich durch das Magnetfeld bewegt, und die in der Schleife induzierte Spannung $u_i(t)$ Spannung ist zu berechnen und zu zeichnen. Der zeitliche Verlauf des Flusses $\Phi(t)$ und die in der Schleife induzierte Spannung $u_i(t)$ Spannung ist zu berechnen und zu zeichnen.

5. Aufgabe

Blitzeinschlag



In den Blitzableiter schlägt ein Blitz ein, dessen Stromverlauf im Bild dargestellt ist. Aufgrund der Wasser- und Elektroinstallation ist im Hausbereich die schraffiert dargestellte Schleife entstanden. (Wasserleitung und Schutzleiter zur Steckdose bilden eine die Schleife, da beide Leiter an der PA-Schiene zusammengeführt sind. Die Installation ist vorschriftsmäßig!) Die PA-Schiene und der Blitzableiter sind geerdet. Welche Wert hat die größte in der Schleife induzierte Spannung? (Hinweis: Das ist die Spannung zwischen Wasserauslauf und Schutzleiter (SL) der Steckdose)

Maße $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$, $l = 4 \text{ m}$.

Lösungen

1. Aufgabe

a) $-u_i = d\Psi/dt = N d\Phi/dt$

Hinweis: Da das Vorzeichen bei der Berechnung der induzierten Spannung i.a nur eine untergeordnete Rolle spielt, wird im Folgenden nur der Betrag bestimmt. Mit $u = |u_i|$ folgt dann weiter:

$$\Phi = B \cdot A = 1,2 \text{ T} \sin(2\pi ft) \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \sin(2\pi ft)$$

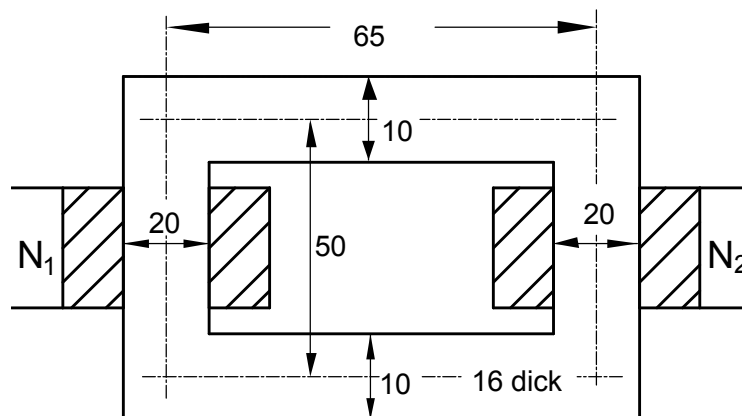
$$d\Phi/dt = 2\pi f \cdot 6 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \cos(2\pi ft) = f \cdot 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} \cdot \cos(2\pi ft)$$

$$u = N d\Phi/dt = 2000 \cdot f \cdot 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} \cdot \cos(2\pi ft) = f \cdot 7,54 \text{ Vs} \cdot \cos(2\pi ft)$$

$$f = 50 \text{ Hz: } u = 50 \text{ s}^{-1} \cdot 7,54 \text{ Vs} \cos(2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} t) = 377 \text{ V} \cos(314 \text{ s}^{-1} t)$$

$$f = 750 \text{ Hz: } u = 750 \text{ s}^{-1} \cdot 7,54 \text{ Vs} \cos(2\pi \cdot 750 \text{ s}^{-1} t) = 5655 \text{ V} \cos(4212 \text{ s}^{-1} t)$$

b)



Alle Maße in mm
Zeichnung nicht maßstabsgerecht!

$$R_m = 447,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H}, N_1 = 1150, N_2 = 50 \text{ und } i_1 = 0,1 \text{ A} \sin(314 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Es gilt: $u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$

Die Streuung wird vernachlässigt, daher folgt

$$\Phi_2 = \Phi_1 = \frac{\Theta_1}{R_m}$$

Die Durchflutung der ersten Spule beträgt:

$$\Theta_1 = N_1 I_1 = 1150 \cdot 0,1 \text{ A} \cdot \sin(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t) = 115 \text{ A} \cdot \sin(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t)$$

Dann berechnet sich der Fluß Φ_1 zu

$$\Phi_1 = \frac{115 \text{ A}}{447,8 \cdot 10^3 \text{ 1/H}} \cdot \sin(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t) = 2,568 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \sin(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t)$$

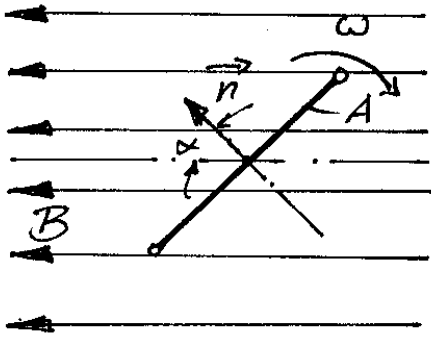
da $\Phi_1 = \Phi_2$ ist, folgt $\Phi_2 = 2,568 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \sin(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t)$

und weiter: $\frac{d\Phi_2}{dt} = 314 \text{ s}^{-1} \cdot 2,568 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \cos(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t) = 0,081 \text{ V} \cdot \cos(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t)$

Somit ist die Spannung u_2 :

$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = 50 \cdot 0,081 \text{ V} \cdot \cos(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t) = 4,032 \text{ V} \cdot \cos(314 \cdot \text{s}^{-1} \cdot t)$$

2. Aufgabe



$$\phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha(t))$$

$$\alpha(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

mit $f = \frac{1}{T}$ und

$$\omega = 2\pi f \text{ folgt}$$

$$\alpha(t) = 2\pi f \cdot t = \omega \cdot t$$

$$\underline{\underline{\phi = B \cdot A \cdot \cos(\omega t)}}$$

$$U_i = - \frac{d\psi}{dt} = - N \cdot \frac{d\phi}{dt} = + N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{3000}{60\text{s}} = 2\pi \cdot 50\text{Hz} = 314\text{s}^{-1}$$

$$\underline{\underline{U_i = 10 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 314\text{V} \cdot \sin(\omega t) = 4710\text{V} \cdot \sin(314\text{s}^{-1} \cdot t)}}$$

3. Aufgabe

$$U_i = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{s} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{v} = r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\varphi; \quad \vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$$

\vec{v}, \vec{B} stehen senkrecht aufeinander: Es entsteht ein E-Feld in radialer Richtung:

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r$$

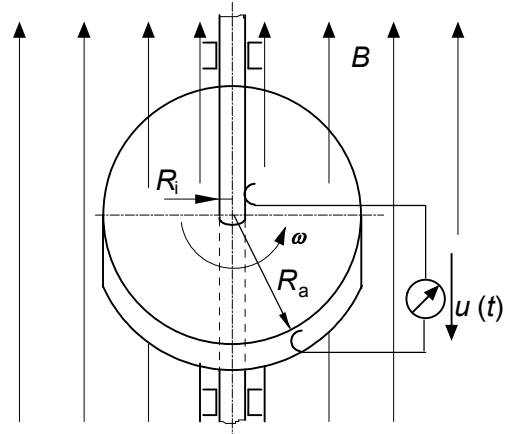
$$U_i = \int_{R_i}^{R_a} \omega \cdot r \cdot B \cdot dr = \frac{1}{2} \omega B \cdot r^2 \Big|_{R_i}^{R_a}$$

$$U_i = \frac{1}{2} \omega \cdot B (R_a^2 - R_i^2)$$

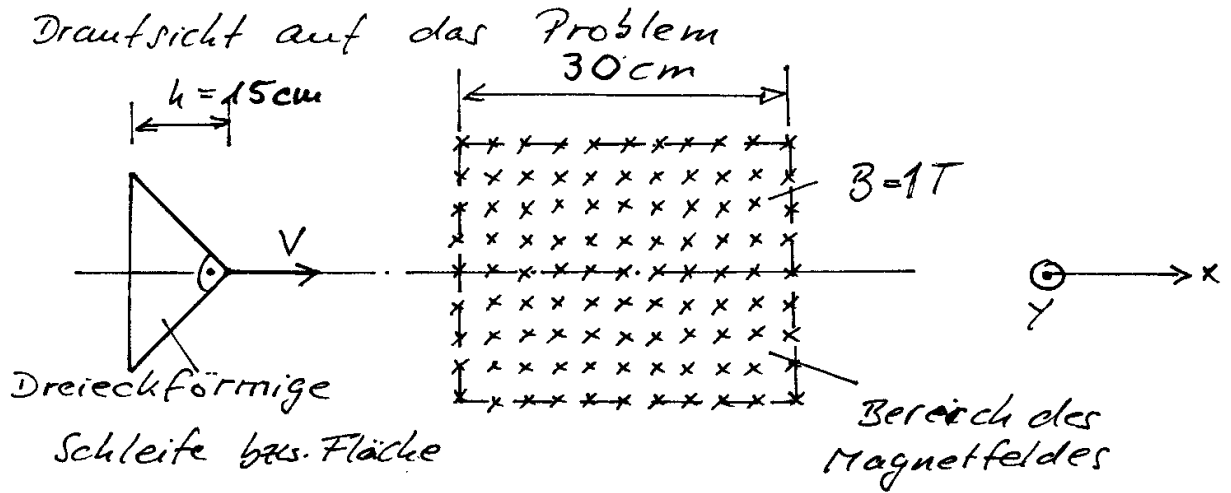
$$U_i = \frac{1}{2} \cdot 2\pi f \cdot B (R_a^2 - R_i^2)$$

$$U_i = \pi \cdot \frac{12000}{60\text{s}} \cdot 1,5 (0,15^2 - 0,05^2) \cdot \text{V}$$

$$\underline{\underline{U_i = 777,5\text{V}}}$$



4. Aufgabe

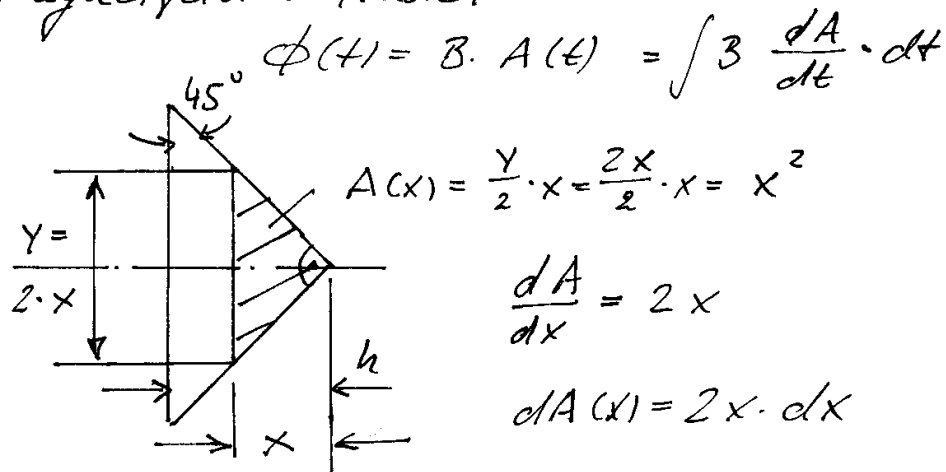


$h = 1.5 \text{ cm}$, $v = 15 \text{ m/s}$

Gesucht ist die in der Schleife induzierte Spannung $U_i = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$

Es wird zunächst $\Phi(t)$ bestimmt!

Der Fluß $\Phi(t)$ ist das Produkt aus B mit dem Teil der Fläche, die sich im Magnetfeld befindet



(Dreiecksfläche:

$A = \frac{g \cdot h}{2}$
 $g = 2x; h = x$

Aus der Ortsabhängigkeit von x muß jetzt die Zeitabhängigkeit t bestimmt werden.

Mit $v = \frac{x}{t}$ folgt

$$x = v \cdot t$$

$$\frac{dx}{dt} = v \longrightarrow dx = v dt.$$

Einsetzen liefert:

$$dA(t) = 2 \cdot v \cdot t \cdot v \cdot dt = 2v^2 \cdot t \cdot dt$$

Dann ist

$$\phi(t) = \int B \cdot dA(t) = \int B \cdot 2 \cdot v^2 \cdot t \cdot dt$$

$$\phi(t) = 2Bv^2 \int t dt = 2Bv^2 \cdot \frac{t^2}{2} + C$$

$$\phi(t) = B \cdot v^2 \cdot t^2 + C$$

Wenn die Schleife in das Magnetfeld eintritt.
Die Schleife ist nach der Zeit

$$t_1 = \frac{h}{v} = \frac{15 \text{ cm}}{15 \text{ m/s}} = 10 \text{ ms}$$

vollständig in das Magnetfeld eingetreten.

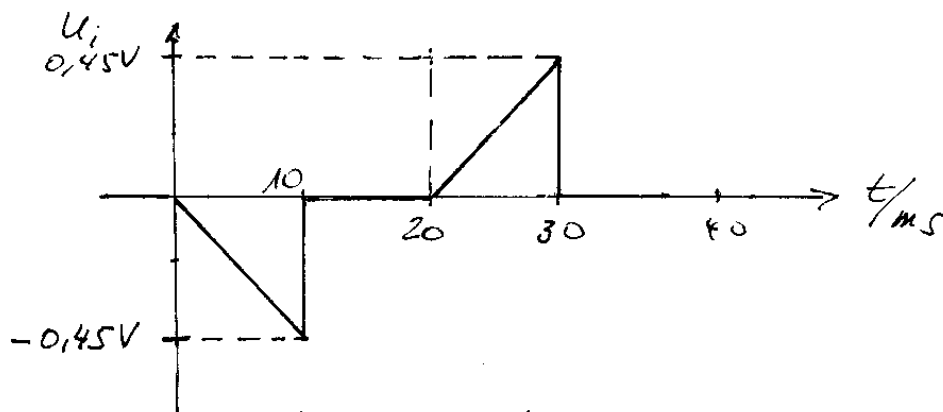
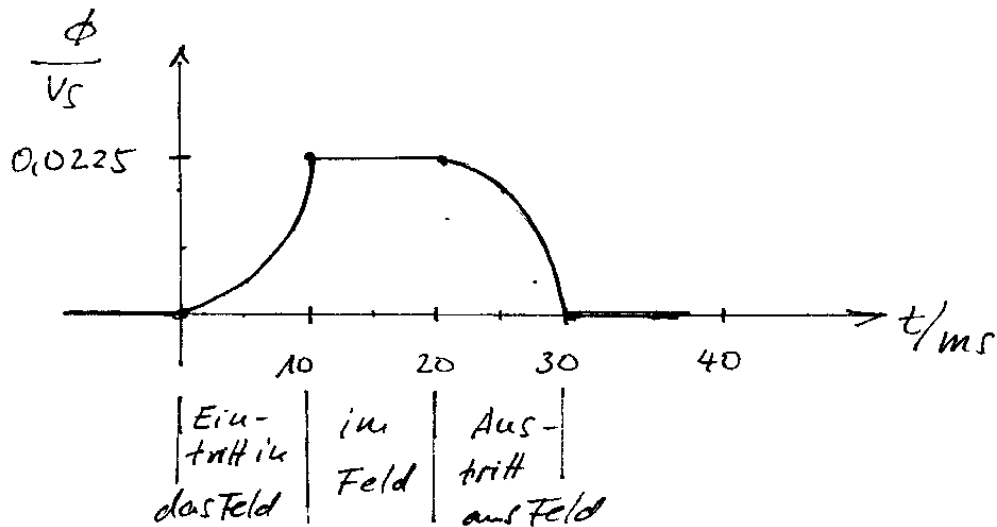
Da $\phi(t=0) = 0$ ist $C = 0$, also folgt

$$\phi(t) = B \cdot v^2 \cdot t^2$$

Bei $t = 10 \text{ ms}$ ist der Fluß in der Schleife

$$\phi(t=10 \text{ ms}) = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 15^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2 \text{ s}^2$$

$$\underline{\underline{\phi(t=10 \text{ ms}) = 0,0225 \text{ Vs}}}$$



Spannung beim Eintritt in das Feld:

$$U_i = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} Bv^2t^2 = - 2 \cdot Bv^2 \cdot t$$

Spannung fällt linear ab. Bei $t = 10 \text{ ms}$ hat sie den

$$\text{Wert } U_i(t=10 \text{ ms}) = -2 \cdot 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 15^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$U_i(t=10 \text{ ms}) = -0,45 \text{ V}$$

- ii) Für $t > 10 \text{ ms}$ bis $t = 20 \text{ ms}$ ist die Schleife vollständig im Feld, ϕ ist konstant; $U_i = 0$
- i) Für $t > 20 \text{ ms}$ bis $t = 30 \text{ ms}$ tritt die Schleife aus dem Feld heraus, $\phi(t)$ wird geringer. Verläuft spiegelbildlich zu 0...10ms. Induziert Spannung tritt auf. Verläuft siehe Bild!
Es tritt keine Gleichstromkomponente auf: $\bar{U}_i = 0$!

5. Aufgabe

Wie man an der Aufgabenstellung erkennt, gibt es auch in vorschriftsmäßig installierten Häusern immer elektrisch leitende Schleifen, in denen Blitzströme gefährliche Spannungen induzieren. Neben diesen Spannungen ist auch die Stromstärke der Blitzströme von Bedeutung, da durch sie Wärmeenergie in den Leitern erzeugt wird. Bei zu kleinem Leiterquerschnitt können daher die Leiter schmelzen. Blitzableiter und die Erdung von Antennen zum Blitzschutz müssen daher immer einen Leiterquerschnitt von mindestens 16 mm^2 aufweisen. (Näheres im Internet unter Blitzschutz etc.)

Lösung

Es gilt $u_i = -N d\Phi/dt$

da $N = 1$ ist, ist $u_i = -d\Phi/dt$.

Mit $\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$

und $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot i(t) \cdot \frac{1}{r}$

folgt

$$\Phi = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot i(t)$$

und weiter $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \frac{di(t)}{dt} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \frac{\Delta i(t)}{\Delta t}$

Es ist vor allem die größte induzierte Spannung von Bedeutung

$$u_i|_{\max} = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\max} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \left. \frac{\Delta i(t)}{\Delta t} \right|_{\max}$$

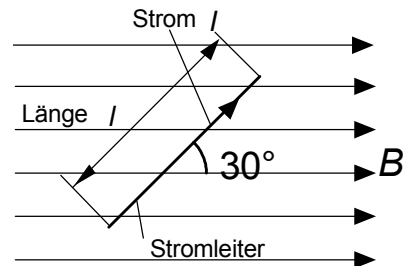
Die größte induzierte Spannung tritt dann auf, wenn die Stromsteilheit di/dt am größten ist. Dies bei der Stromflanke in den ersten $5 \mu\text{s}$ der Fall. Dann folgt

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\max} = \frac{\mu_0 \cdot 4\text{m}}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{4}{1,5}\right) \cdot \frac{30 \text{ kA}}{5 \mu\text{s}} = 4705,6 \text{ V}.$$

Übung 5 - Kräfte auf stromführende Leiter

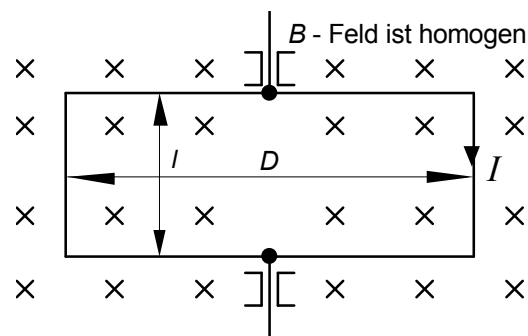
1. Aufgabe

In einem Magnetfeld liegt unter einem Winkel von $\alpha = 30^\circ$ ein Stromleiter. Betrag und Richtung des Kraftvektors am Leiter ist gesucht. $I = 10 \text{ A}$, $B = 1 \text{ T}$, $l = 0,5 \text{ m}$.



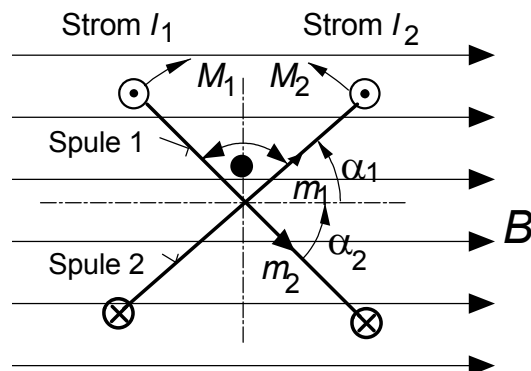
2. Aufgabe

Eine Rechteckspule ist in einem homogenen Magnetfeld drehbar gelagert, siehe Skizze. Die Spule hat 1000 Windungen, die aktive Länge der Spule ist $l = 5 \text{ cm}$, der Spulendurchmesser $D = 40 \text{ cm}$. Der Strom beträgt 25 mA . Die magnetische Flußdichte beträgt $B = 45 \mu\text{T}$. Welches magnetisches Moment hat die Spule?



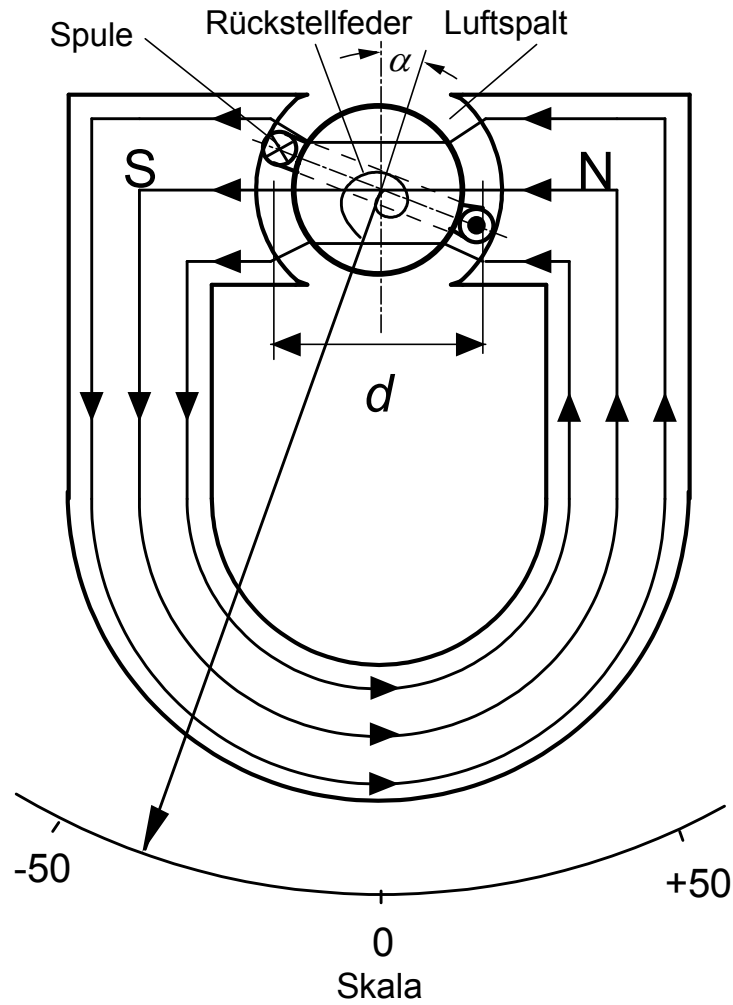
3. Aufgabe

In einem homogenen Magnetfeld sind zwei Spulen unter einem rechten Winkel starr miteinander verbunden., siehe Skizze. Beide Spulenquerschnitte sind gleich groß, ihre Windungszahlen seien für Spule 1 $N_1 = 500$ und für Spule 2 $N_2 = 500$. Der Strom durch Spule 1 beträgt $I_1 = 8 \text{ mA}$, der durch Spule 2 beträgt $I_2 = 5 \text{ mA}$. Unter welchem Winkel α stehen die Spulen im Gleichgewicht?

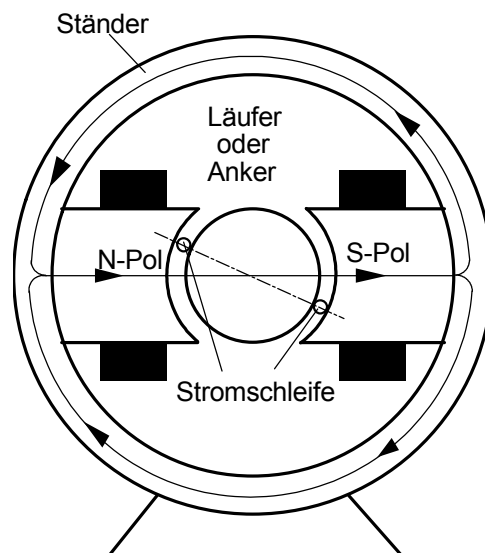


4. Aufgabe

Im Bild auf der nächsten Seite ist der Prinzipaufbau eines Drehspulmeßwerkes dargestellt. Im Luftspalt ist eine drehbar gelagerte Spule angeordnet. Bei Verdrehung der Spule bewegt sich der Zeiger über der Skala und zeigt den Strom an, der in der Spule fließt. Die Stellung des Zeigers ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment der Spule und dem Gegenmoment der Spiralfeder. Dieser Zusammenhang, also $\alpha = f(I)$ ist herzuleiten. Die Ruhelage ($I = 0$) ist in der Mittellage des Zeigers. (Wird mechanisch eingestellt). Um wieviel Grad schlägt der Zeiger bei einem Strom von 2 mA aus, wenn die Luftspaltflußdichte $B = 0,4 \text{ T}$, der Spulenrahmen die Abmessungen $d = 2 \text{ cm}$ und $l = 1 \text{ cm}$ aufweist, und die Federkonstante $D = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Nm/grad}$ beträgt?



5. Aufgabe



Im Bild ist der Prinzipaufbau eines Gleichstrommotors dargestellt. Die Funktionsweise ist zu erläutern.

Lösungen

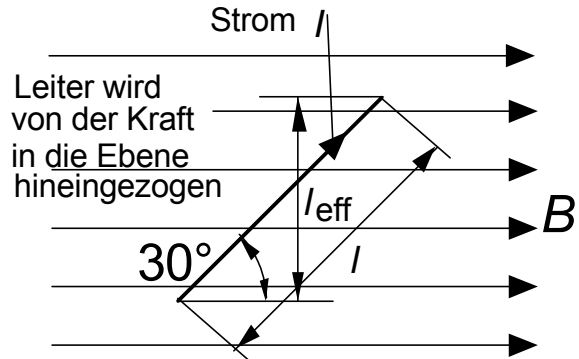
1. Aufgabe

$$\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

$$F = I \cdot l \cdot B \sin(\alpha) = I l_{\text{eff}} B$$

mit $l_{\text{eff}} = l \sin(\alpha) = 0,5\text{m} \cdot \sin(30^\circ) = 0,25\text{ m}$

$$F = 10\text{ A} \cdot 0,25\text{ m} \cdot 1\text{ T} = 2,5\text{ N}$$



2. Aufgabe

Magnetisches Moment der Spule

$$\mathbf{m} = NI\mathbf{a} = 1000 \cdot 0,025\text{ A} \cdot (0,05 \cdot 0,04)\text{m}^2 \mathbf{n}$$

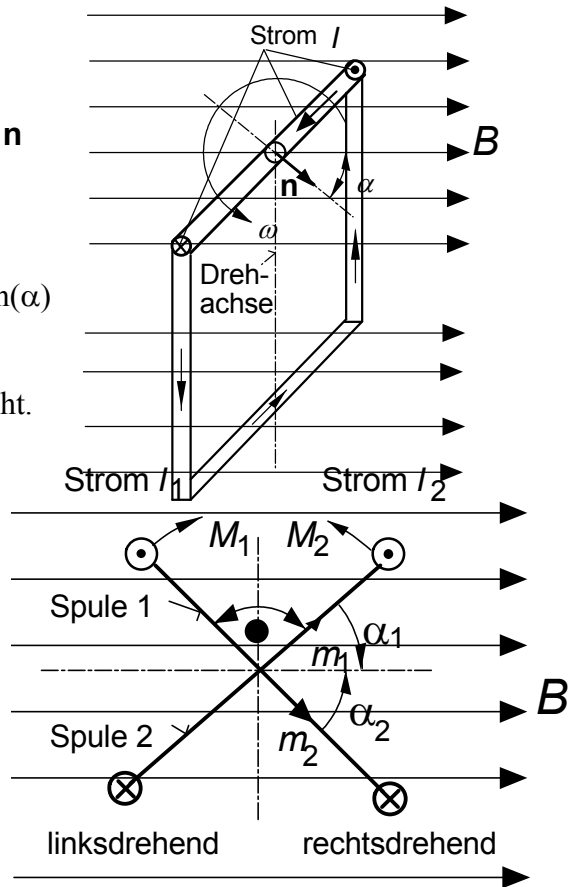
$$\mathbf{m} = 0,05\text{ Am}^2 \mathbf{n}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$M = m B \sin(\alpha) = 0,05\text{Am}^2 \cdot 45 \cdot 10^{-6}\text{ Vs/m}^2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$M = 2,25 \cdot 10^{-6}\text{ Nm} \cdot \sin(\alpha)$$

Schleife wird gegen den Uhrzeigersinn verdreht.



3. Aufgabe

Magnetisches Moment Spule 1

$$\mathbf{m}_1 = N_1 I_1 A_1 \mathbf{n}$$

Magnetisches Moment Spule 2

$$\mathbf{m}_2 = N_2 I_2 A_2 \mathbf{n}$$

Dann ist $\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}$

rechtsdrehend und

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}$$

linksdrehend. Im Gleichgewichtsfall gilt

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0,$$

dann stimmen die Beträge überein:

$$m_1 \cdot B \cdot \sin(\alpha_1) = m_2 \cdot B \cdot \sin(\alpha_2)$$

B kürzt sich heraus, und es folgt

$$N_1 I_1 A_1 \sin(\alpha_1) = N_2 I_2 A_2 \sin(\alpha_2).$$

Mit $N_1 = N_2$ und $A_1 = A_2$ folgt wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ bzw. $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$

$$I_1 \sin(\alpha_1) = I_2 \sin(\alpha_2) = I_2 \sin(90^\circ - \alpha_1) = I_2 \cos(\alpha_1).$$

Weiter folgt

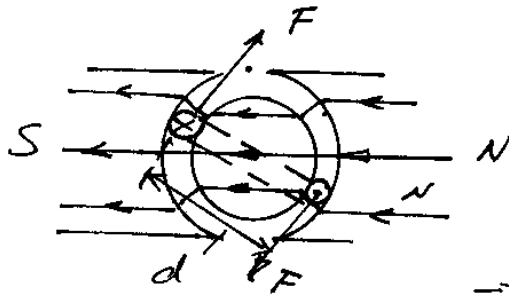
$$I_2 / I_1 = \sin(\alpha_1) / \cos(\alpha_1) = \tan(\alpha_1)$$

oder

$$\alpha_1 = \arctan(I_2 / I_1) = \arctan(5/8) = 32^\circ \text{ und } \alpha_2 = 58^\circ.$$

(α_1 ist aus der Mittellage nach oben verdreht, α_2 nach unten.)

4. Aufgabe



$$M = F \cdot r \cdot 2 = F \cdot d$$

$$F = N \cdot I \cdot B \cdot l$$

$$M = N \cdot I \cdot B \cdot l \cdot d$$

\Rightarrow Drehmoment durch Strom und magu. Feld

Drehmoment durch Verdrehung der Spule:

$$M_{sp} = D \cdot \alpha$$

$D = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Nm/grad}$ ist d. Federkonstante
Zeiger hat Endstellung erreicht, wenn beide
Momente gleich sind $M_{sp} = M$

$$D \cdot \alpha = I \cdot B \cdot l \cdot d \cdot N$$

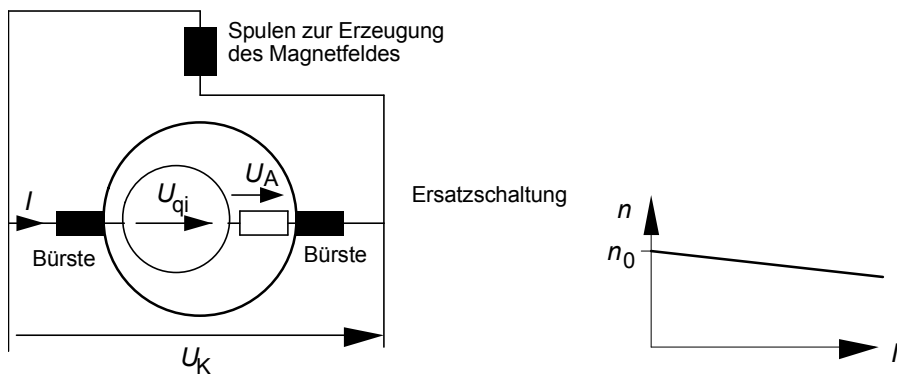
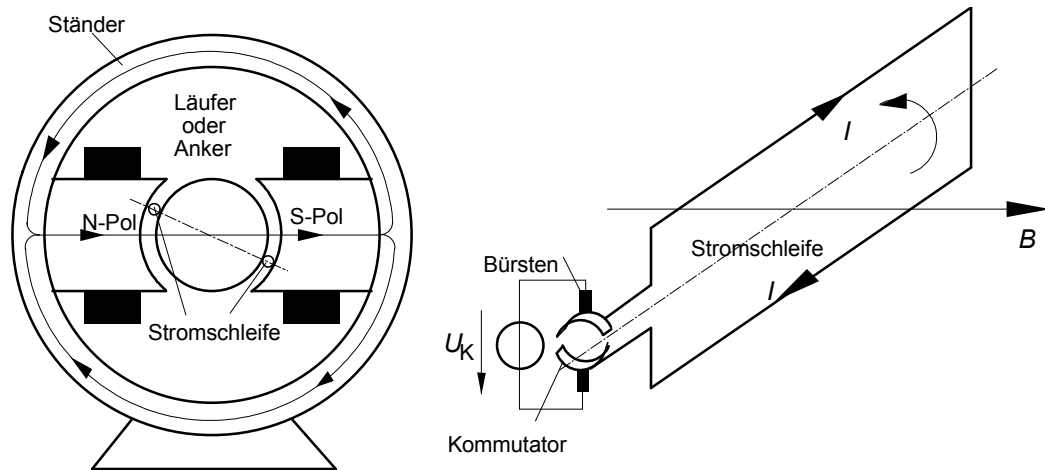
$$\alpha = \frac{B \cdot l \cdot d \cdot N}{D} I$$

$$\alpha = \frac{0,4 \text{ T} \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 2000}{10 \cdot 10^{-6} \text{ Nm/grad}} \cdot I$$

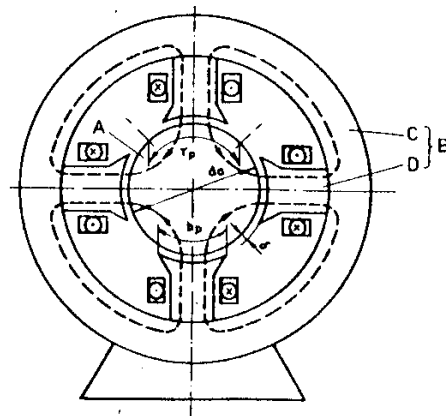
$$\alpha = 16.000 \text{ grad} \cdot \frac{I}{\text{A}}$$

Bei $I = 2 \text{ mA}$ schlägt der Zeiger um 32° aus.

5. Aufgabe



Dargestellt ist der Nebenschlußmotor. Bei diesem Motor befinden sich die Spulen zur Erzeugung des Magnetfeldes parallel (im Nebenschluß) zum Anker bzw. Läufer.



Prinzipieller Aufbau eines Gleichstrommotors

Der wichtige Stromkreis ist der Ankerstromkreis, durch den der Strom I fließt. Der Strom geht über die Bürsten zum Kommutator (Stromwender), der den Strom so polt, daß unter den Polen der Strom in den Ankerstromwindungen immer die selbe Richtung hat. Durch das Zusammenwirken von Strom und Magnetfeld entsteht eine Kraft auf die Wicklung, die sie verdreht. Diese Drehung der Wicklung bzw. der Welle des Läufers wird auf eine Arbeitsmaschine übertragen. Im folgenden wird der Zusammenhang zwischen Strom, Drehmoment und Drehzahl der Nebenschlußmaschine hergeleitet.

Spannungen im Motor

Der Motor ist an einer Leitung mit der Spannung U angeschlossen. Diese Spannung bildet am Motor die Klemmenspannung U_K . Vom Pluspol der Spannungsquelle tritt dann ein Strom I über die Bürsten in den Anker, durchquert ihn und tritt über die Bürsten in den Rückleiter ein.

Der Strom im Anker ruft im Magnetfeld des Luftspaltes eine Kraft hervor, die die Schleife in Drehung versetzt. Durch die Drehung wird in der Schleife eine Spannung induziert, die einen Induktionsstrom hervorruft, der dem ursprünglichen Strom entgegenwirkt. Damit nimmt der Gesamtstrom ab. Dieses Verhalten kann in einer Ersatzschaltung dadurch beschrieben werden, daß im Anker eine geschwindigkeitsabhängige Spannungsquelle angeordnet wird. Im Abschnitt "Die mit einem Wechselstrom gespeiste Spule, die Netzwerkgleichung der Induktivität" wurde gezeigt, daß in einer Schleife, an der die Spannung u_K liegt, der folgende Zusammenhang gilt

$$u_K = R \cdot i + d\Phi/dt.$$

(R ist der Widerstand der Leiterschleife). $d\Phi/dt$ kann als eine durch Induktion hervorgerufene Spannungsquelle u_{qi} ansehen werden:

$$u_{qi} = d\Phi/dt.$$

Dann gilt weiter

$$u_K = R \cdot i + u_{qi}.$$

Für den Gleichstrommotor gilt:

$$U_K = R \cdot I + U_{qi}.$$

Bestimmung der induzierten Spannung

Die in einem bewegten Stab induzierte Spannung ist

$$U_{i \text{ Stab}} = v B l.$$

Da eine Stromschleife zwei Stäben hat, beträgt die induzierte Schleifenspannung

$$U_i = 2 v B l.$$

Bei einer realen Maschine liegen k -Schleifen im Magnetfeld, daher gilt allgemein für die induzierte Spannung in den Schleifen oder der Wicklung im Läufer:

$$U_i = k v B l.$$

Die Umfangsgeschwindigkeit der Stäbe ist

$$v = \pi d n.$$

Einsetzen liefert:

$$U_i = k \pi d n B l = k \Phi n$$

mit

$$\Phi = \pi d l B.$$

Die Gleichung

$$U_i = k \Phi n$$

stellt die **erste Hauptgleichung** des Gleichstrommotors dar. Bei einem Motor hat die induzierte Spannung die gleiche Richtung wie die Klemmenspannung.

Bei Berücksichtigung der am Ankerwiderstand R_A auftretenden Spannung

$$U_A = R_A I$$

folgt für die Klemmenspannung

$$U_K = U_{qi} + U_A.$$

oder

$$U_K = k \cdot \Phi \cdot n + R_A I.$$

$k \Phi$ ist eine charakteristische Größe des Gleichstrommotors.

Strom und Drehmoment

(Das Drehmoment bildet die Belastung des Motors.)

Wenn der Motor mit konstanter Drehzahl läuft, treibt er mit seinem Drehmoment eine Arbeitsmaschine an. Die Leistung des Motors P_{el} stimmt dann mit der Leistung P_{mech} der Arbeitsmaschine überein. Es gilt

$$P_{el} = P_{mech}$$

Das Drehmoment M des Motors stimmt mit dem Drehmoment der Arbeitsmaschine überein. Die mechanische Leistung bestimmt sich zu

$$P_{mech} = 2 \pi n M.$$

Die elektrische Leistung P_{el} , die das Drehmoment erzeugt, ergibt sich aus dem Produkt der induzierten Spannung U_i multipliziert mit dem Ankerstrom I .

$$P_{el} = U_i I.$$

(Nur die induzierte Spannung wird durch das Magnetfeld erzeugt, sie ist um die Ankerspannung geringer als die Klemmenspannung.)

Aus diesen Gleichungen folgt

$$U_i I = 2 \pi n M.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{k \Phi}{2 \pi} \cdot I.$$

Dies ist die **zweite Hauptgleichung** des Gleichstrommotors.

Zusammenhang zwischen Drehzahl und Belastung

Zusammenhang zwischen Klemmenspannung, induzierter Spannung und Belastungsstrom:

$$U_K = U_i + U_A = k \Phi n + R_A I.$$

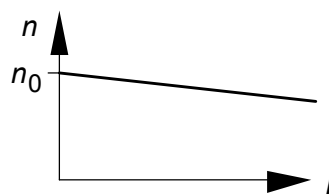
Auflösen nach der Drehzahl ergibt

$$n = \frac{U_K}{k \Phi} - \frac{R_A}{k \Phi} \cdot I$$

Die Drehzahl ist am höchsten, wenn der Strom $I = 0$ ist, also bei unbelasteter Maschine.

$$n_0 = \frac{U_K}{k \Phi}$$

Mit steigender Belastung nimmt der Strom zu und die Drehzahl ab. Da die Abnahme aber gering ist, ist die Neigung der Kennlinie gering. Dieses Verhalten wird als "Nebenschlussverhalten" bezeichnet.



Drehzahlkennlinie einer Nebenschlußmaschine

Übung 6 - Energie und Kräfte

1. Aufgabe

Welche Energie ist in einer Spule oder Drossel gespeichert, die eine Induktivität von 1,5 H aufweist und einen Strom von 1500 Ampere führt?

Wie hoch ist der Zuwachs an gespeicherte Energie, wenn sich der Strom auf 2000 Ampere erhöht?

2. Aufgabe

Berechnen Sie die Kraft zwischen zwei parallelen, langen Linienleitern nach der Methode der Änderung des Energieinhaltes.

Berechnen Sie die Kraft zwischen zwei gekoppelten Spulen und geben Sie den prinzipiellen Verlauf des Drehmomentes eines elektrodynamischen Meßwerkes an. Wenn sich das System frei bewegen kann, welchen Zustand strebt es an?

3. Aufgabe

Die Formel zur Berechnung der Kraft eines Elektromagneten ist herzuleiten.

Wie groß muß im Luftspalt eines Elektromagneten die magnetische Flußdichte sein, damit eine Anziehungskraft von 1000 N auftritt? Die Fläche des Luftspaltes betrage 400 cm².

4. Aufgabe

Die innere Induktivität eines Leiters ist aus seiner magnetischen Energie zu bestimmen.

Die Ersatzinduktivität zweier parallel geschalteter Spulen L_1, L_2 ist zu bestimmen.

Die Ersatzinduktivität zweier in Reihe geschalteter Spulen L_1, L_2 ist zu bestimmen.

5. Aufgabe

Die Funktionsweise der Wirbelstrombremse ist zu erklären

LÖSUNGEN

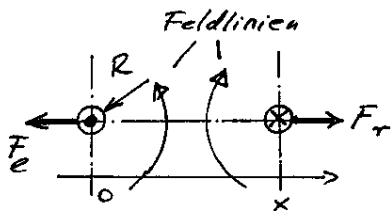
1. Aufgabe

$$a) W_1 = 0,5 L I^2 = 0,5 \cdot 1,5 \text{ Vs/A} \cdot 1500^2 \text{ A}^2 = 1,69 \cdot 10^6 \text{ Ws} = 468,8 \text{ Wh}$$

$$b) W_2 = 0,5 L I^2 = 0,5 \cdot 1,5 \text{ Vs/A} \cdot 2000^2 \text{ A}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ Ws} = 833 \text{ Wh}$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = (833 - 468,8) \text{ Wh} = 364,2 \text{ Wh}$$

2. Aufgabe



$$dW_{\text{mech}} = dW_{\text{Quelle}} - dW_{\text{magn}}$$

$$F \cdot dx = \frac{1}{2} I^2 \cdot dL$$

$$F = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{dL}{dx}$$

Die äußere Induktivität der Doppelleitung ist

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{x}{R} = \frac{\mu_0 l}{\pi} (\ln x - \ln R)$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} I^2$$

$$F = \frac{\mu_0 l}{2\pi \cdot x} \cdot I^2$$

Die Kraft ist so gerichtet, daß sie die Leiter auseinander zieht und so die Induktivität vergrößert.

Zwei gekoppelte Stromkreise

$$\text{Es gilt } dW_m = \frac{1}{2} I_1^2 \cdot dL_1 + I_1 I_2 dM + \frac{1}{2} I_2^2 \cdot dL_2$$

Ändern sich die Größen innerhalb der Zeit \$dt\$, entstehen Induktionsspannungen:

$$U_{\text{ind}_1} = - \frac{d\psi_1}{dt} = - \frac{d}{dt} (i_1 \cdot L_1 + i_2 \cdot M)$$

im ersten Kreis. Im zweiten Kreis gilt:

$$U_{\text{ind}_2} = - \frac{d\psi_2}{dt} = - \frac{d}{dt} (i_2 \cdot L_2 + i_1 \cdot M)$$

Von den Spannungsquellen muß zusätzlich die Energie $dW_{\text{Quelle}} = U_1 \cdot i_1 dt + U_2 \cdot i_2 dt$

$$= i_1 \cdot \frac{d}{dt} (i_1 L_1 + i_2 M) dt + i_2 \cdot \frac{d}{dt} (i_2 L_2 + i_1 M) dt$$

$$= i_1^2 \cdot dL_1 + i_2^2 \cdot dL_2 + 2 i_1 i_2 dM$$

geliefert werden.

Die Differenz von gelieferter Energieänderung dW_{Quelle} zur gespeicherten Energie dW_{mag} ist die geleistete Arbeitsänderung:

$$dW_{mech} = dW_{Quelle} - dW_{mag} = \frac{1}{2} i_1^2 dL_1 + \frac{1}{2} i_2^2 dL_2 + i_1 \cdot i_2 \cdot dM$$

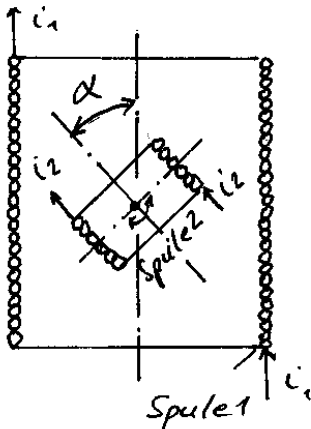
und daraus mit $dW_{mech} = F \cdot dx$

$$F = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{dx} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{dx} + i_1 \cdot i_2 \frac{dM}{dx}$$

Falls bei der Änderung L_1 und L_2 konstant bleiben, gilt die vereinfachte Formel:

$$F = i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM}{dx}$$

Die Kraft ist so gerichtet, daß die Gegeninduktivität vergrößert wird.



Bei einem elektrodynamischen Meßwerk gilt $M_D = K \cdot \cos \alpha$

M_D ist das Drehmoment.

Die Gegeninduktivität der Spule 2 zu Spule 1 ist eine Funktion des Winkels $\alpha \Rightarrow M(\alpha)$

$$dW_{mech} = M_D \cdot d\alpha = i_1 \cdot i_2 \cdot M(\alpha)$$

Dann ist

$$M_D = i_2 \cdot i_1 \cdot \frac{dM(\alpha)}{d\alpha} = i_1 \cdot i_2 \cdot K \cdot \sin \alpha$$

Das Drehmoment ist eine Funktion von α .

Für $\alpha = 0$ ist das Drehmoment $M_D = 0$.

Für $\alpha = 90^\circ$ ist das Drehmoment $M_D(\alpha = 90^\circ) = M_{max}$.

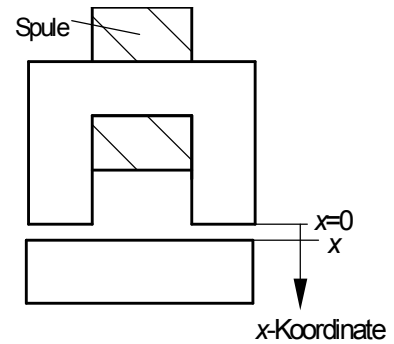
3. Aufgabe

Es gilt

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL(x)}{dx}$$

I_L ist der Spulenstrom und $L(x)$ die Induktivität des magnetischen Kreises:

$$L(x) = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{R_{Fe} + 2R_L(x)}$$

Die Ableitung $dL(x)/dx$ berechnet sich zu**Prinzip des Elektromagneten**

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{N^2}{R_{Fe} + 2R_L(x)} = \frac{-N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))^2} \cdot \frac{d}{dx} 2R_L(x)$$

Mit

$$\frac{d}{dx} 2R_L(x) = 2 \frac{d}{dx} \cdot \frac{x}{\mu_0 A_L} = \frac{2}{\mu_0 A}$$

folgt

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{-N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))^2} \cdot \frac{2}{\mu_0 A}$$

Daraus berechnet sich die Kraft zu

$$F_x = \frac{I_L^2}{2} \cdot \frac{-N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))^2} \cdot \frac{2}{\mu_0 A} = -I_L^2 \cdot \frac{N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))^2} \cdot \frac{1}{\mu_0 A}$$

Mit der Erweiterung N^2/N^2 ergibt sich:

$$F_x = -I_L^2 \cdot \frac{N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))^2} \cdot \frac{1}{\mu_0 A} \cdot \frac{N^2}{N^2} = -\frac{I_L^2}{N^2} \cdot \left(\frac{N^2}{(R_{Fe} + 2R_L(x))} \right)^2 \cdot \frac{1}{\mu_0 A} = -\frac{I_L^2}{N^2} \cdot L^2 \cdot \frac{1}{\mu_0 A}$$

Mit $L = N \cdot \Phi / I_L$ bzw. $L^2 = N^2 \cdot \Phi^2 / I_L^2$ folgt

$$F_x = -\frac{I_L^2}{N^2} \cdot \frac{N^2 \Phi^2}{I_L^2} \cdot \frac{1}{\mu_0 A} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 A}$$

Mit $F = BA$ und $F^2 = B^2 A^2$ folgt

$$F_x = -\frac{B^2 A^2}{\mu_0 A} = -\frac{B^2 A}{\mu_0}$$

Mit $\Phi^2 = B^2 A^2$ folgt weiter

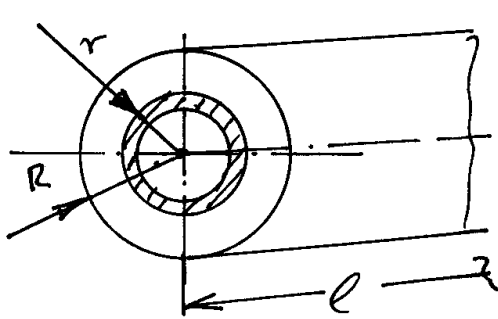
$$F_x = -\Phi^2 \cdot \frac{1}{\mu_0 A} = -\frac{B^2 A}{\mu_0}$$

A ist die Querschnittsfläche im Luftspalt. Das negative Vorzeichen weist darauf hin, dass die Kraft entgegengesetzt zur x -Richtung verläuft und daher ein Anzugskraft ist.

Lösung:

$$B = \sqrt{\mu_0 \cdot F / A} = \sqrt{\frac{1,567 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am} \cdot 1000 \text{ N}}{0,4 \text{ m}^2}} = 0,056 \text{ T}$$

4. Aufgabe



a) $W = \frac{1}{2} L_i I^2$

$L_i = \frac{2W}{I}$

$W = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B \cdot dV =$

$W = \frac{1}{2} \int_0^R H \cdot B \cdot l \cdot 2\pi r \cdot dr$

$W = \frac{1}{2} \mu \cdot l \cdot 2\pi \int_0^R H^2 \cdot r \cdot dr$

mit $H = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r$ folgt $W = \frac{\mu}{2} l \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \left(\frac{I}{2\pi R^2} \cdot r\right)^2 dr$

$W = \frac{\mu l}{2} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{I}{2\pi R^2}\right)^2 \cdot \int_0^R r^3 dr$

$W = \frac{1}{2} \frac{\mu \cdot l \cdot 2\pi I^2}{(2\pi)^2 \cdot R^4} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{\mu \cdot l \cdot I^2}{2 \cdot 8\pi} \cdot \frac{R^4}{R^4}$

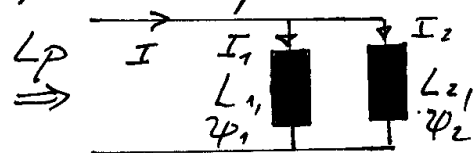
$W = \frac{1}{2} L_i I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu \cdot l}{8\pi} \cdot I^2$

$\Rightarrow L_i = \frac{\mu l}{8\pi}$, die innere Induktivität eines Leiters der Länge l .

b) Ersatzinduktivität L_p zweier parallel

Induktivitäten

$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$



$I_2 = I - I_1$

$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 (I - I_1)^2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 - L_2 I I_1 + \frac{1}{2} L_2 I_1^2$

$\frac{dW}{dI_1} = L_1 I_1 - L_2 I + L_2 I_1 = (L_1 + L_2) I_1 - L_2 \cdot I \stackrel{!}{=} 0$

$I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I; I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I$

$\psi_1 = L_1 \cdot I_1 = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \cdot I; \psi_2 = L_2 \cdot I_2 = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \cdot I$

Also ist $\psi_1 = \psi_2 = \psi$

Bei der Parallelschaltung ist

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{\psi}{L_p} = \frac{\psi_1}{L_1} + \frac{\psi_2}{L_2} = \frac{\psi}{L_1} + \frac{\psi}{L_2}, \text{ da } \psi = \psi_1 = \psi_2$$

oder
$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

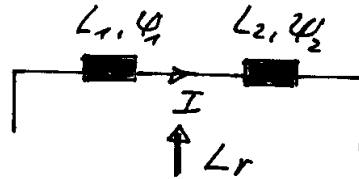
bzw
$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

c) Reihenschaltung

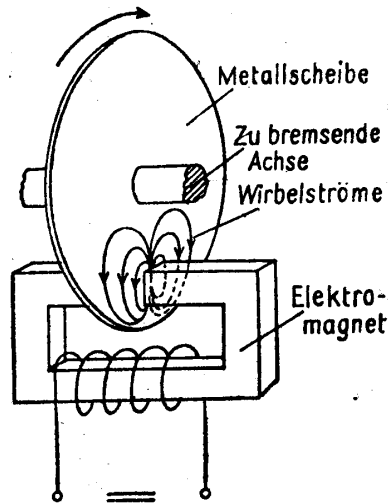
$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$L_r \cdot I = L_1 \cdot I + L_2 \cdot I = (L_1 + L_2) I$$

$$\underline{\underline{L_r = L_1 + L_2}}$$



5. Aufgabe

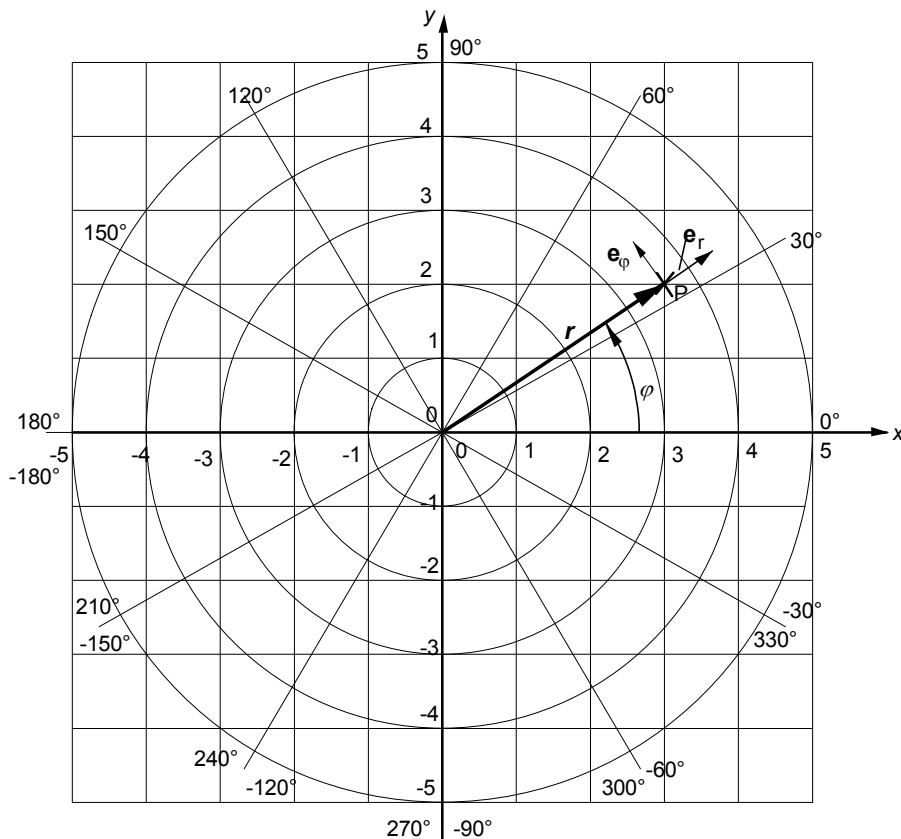


Prinzipieller Aufbau der Wirbelstrombremse:

Eine Metallscheibe dreht sich im Magnetfeld eines Elektromagneten, dessen Flußdichte über einen Gleichstrom gesteuert wird. Durch die Drehung der Scheibe im Magnetfeld wird in der Scheibe ein elektrisches Feld induziert. Dieses Feld ruft aufgrund der Leitfähigkeit des Metalls ein Strömungsfeld hervor. Mit dem Strömungsfeld sind die spezifischen Verluste $p = S^2/\kappa$ verbunden. In der Metallscheibe entsteht als Folge dieses Vorgangs Wärme, die der mechanischen Energie, die zur Drehung der Scheibe führt, entzogen wird. Daher wird die Scheibe abgebremst.

Übersicht über Vektoren und Vektorrechnung

Vektoren im kartesischen und im Polarkoordinatensystem



kartesisches Koordinatensystem und Polarkoordinatensystem

Einheitsvektor in x-Richtung: \mathbf{e}_x

Einheitsvektor in y-Richtung: \mathbf{e}_y

Vektor $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = (A_x, A_y)$

Vektor $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y = (B_x, B_y)$

Vektorbetrag $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Vektoraddition Ergebnis ist ein Vektor in der Ebene der beiden Vektoren

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

Skalarprodukt Ergebnis ist eine Zahl, ein Skalar

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

$$C = \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

Vektorprodukt Ergebnis ist ein neuer Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, die durch die beiden \mathbf{A} und \mathbf{B} Vektoren gebildet wird.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \mathbf{e}_z$$

Betrag des Vektorproduktes ist $C = \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ oder $C = \sin(\alpha)$

Vektor in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$$

A_x ist die x-Komponente

A_y ist y-Komponente

\mathbf{e}_x ist der Einheitsvektor in x-Richtung

\mathbf{e}_y ist der Einheitsvektor in y-Richtung

Vektor in Polarkoordinaten

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

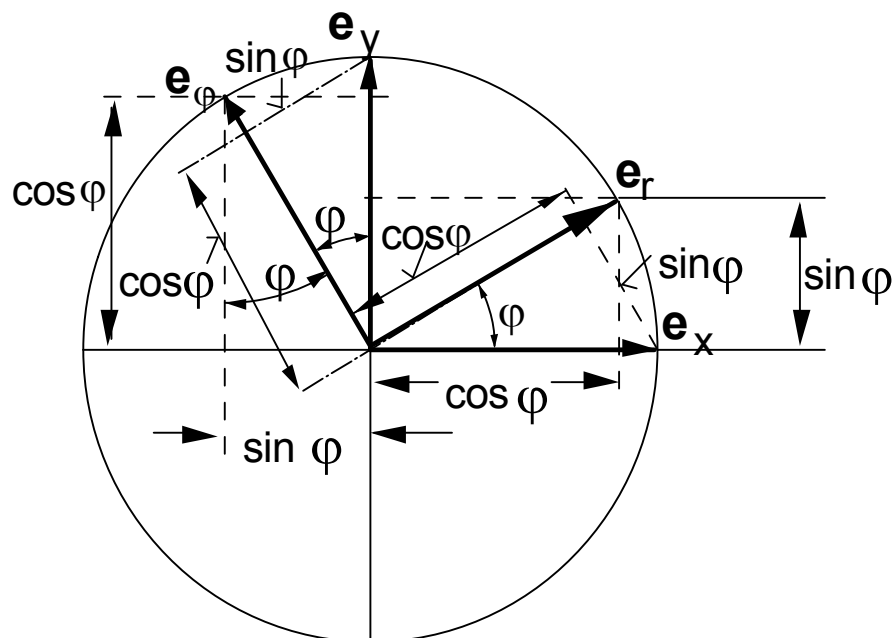
A_r ist die r-Komponente oder Radialkomponente

A_φ ist φ -Komponente oder Azimutalkomponente

\mathbf{e}_r ist der Einheitsvektor in r-Richtung

\mathbf{e}_φ ist der Einheitsvektor in φ -Richtung

Umrechnungen für die Einheitsvektoren



Einheitsvektoren und Einheitskreis

Es gilt $\mathbf{e}_r = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_y$$

und $\mathbf{e}_x = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Umrechnung eines Vektors von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

Vektor in kartesischen Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$ ist gegeben.

Es ist der Vektor in Polarkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = (A_r, A_\varphi)$ gesucht.

Dazu werden in der kartesischen Darstellung die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ durch die Einheitsvektoren der Polarkoordinaten \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_φ ersetzt:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_x(\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi) + A_y(\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi)$$

$$\mathbf{A} = (A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi) \cdot \mathbf{e}_r + (-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = A_r \cdot \mathbf{e}_r + A_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Da $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ist, folgt für den Vektor \mathbf{A} in Polarkoordinaten

$$\mathbf{A} = \left(A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_r + \left(-A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Die Radialkomponente oder

r-Komponente: $A_r = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und die Azimutalkomponente oder

φ -Komponente: $A_\varphi = -A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Umrechnung eines Vektors von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

Vektor in Polarkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ ist gegeben.

Der Vektor in kartesischen Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$ ist gesucht.

Dazu werden in der Polarkoordinatendarstellung die Einheitsvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_φ durch die Einheitsvektoren der \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y der kartesische Koordinaten ersetzt:

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = A_r(\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_y) + A_\varphi(-\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{A} = (A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi) \cdot \mathbf{e}_x + (A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi) \cdot \mathbf{e}_y = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$$

mit der x-Komponente $A_x = A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$

und der y-Komponente $A_y = A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$

Mit $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

folgt für den Vektor \mathbf{A} in kartesischen Koordinaten

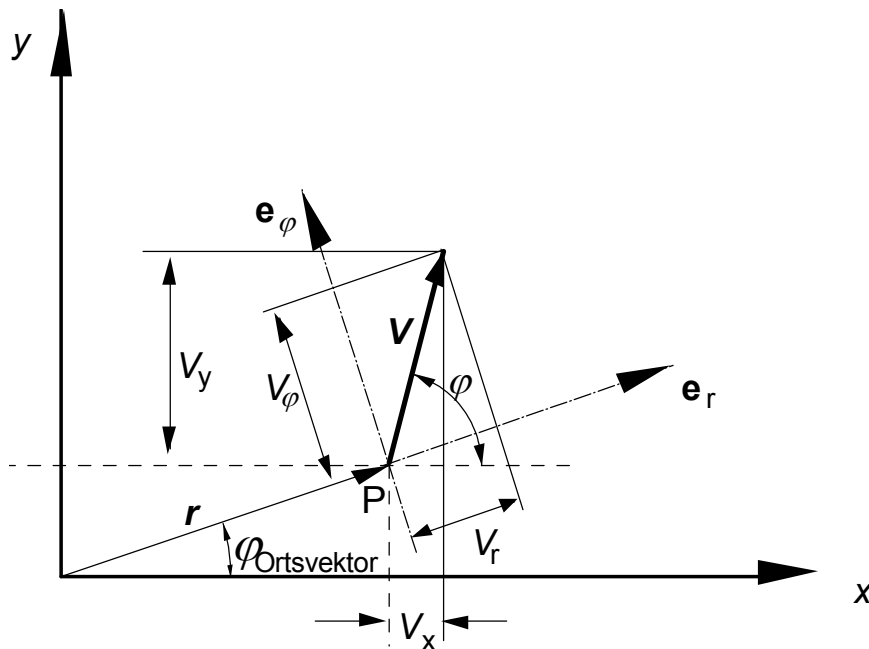
$$\mathbf{A} = \left(A_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_x + \left(A_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \mathbf{e}_y$$

Die x-Komponente ist $A_x = A_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

und die y-Komponente ist $A_y = A_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Umrechnung eines Vektors \mathbf{V} in der x-y-Ebene

Am Endpunkt des Ortsvektors \mathbf{r} mit dem Betrag r und dem Winkel $\varphi_{\text{Ortsvektor}}$ befindet sich der Vektor \mathbf{V} . Von diesem Vektor sind sein Betrag V und sein Winkel φ zur x-Achse gegeben.



Der Vektor \mathbf{V} im Abstand \mathbf{r} vom Koordinatenursprung

Bestimmung der Komponenten des Vektors in kartesischen Koordinaten:

x-Komponente: $V_x = V \cdot \cos \varphi$ (Projektion auf die x-Komponente)

y-Komponente: $V_y = V \cdot \sin \varphi$ (Projektion auf die y-Komponente)

$$\mathbf{V} = V \cdot \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + V \cdot \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y$$

Der Vektor in Polarkoordinaten:

r-Komponente: $V_r = V \cdot \cos (\varphi - \varphi_{\text{Ortsvektor}})$ (Projektion auf die Radial-Komponente)

φ -Komponente: $V_\varphi = V \cdot \sin (\varphi - \varphi_{\text{Ortsvektor}})$ (Projektion auf die φ -Komponente)

$$\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

Aufgaben

- Das kartesische und das Polarkoordinatensystem ist zu erklären.
- Was ist der Unterschied zwischen einem Vektor und einem Vektorfeld?
- Der Vektor \mathbf{V} hat im Punkt $x_1 = 3, y_1 = 2$ des kartesischen Koordinatensystems die Komponenten $\mathbf{V} = (2, 3)$. Wie lautet der Ortsvektor zum Punkt und wie lauten die

Komponenten des Vektors im Polarkoordinatensystem?

d) Der Vektor \mathbf{V} hat im Punkt $x_2 = 1, y_2 = -2$ des Polarkoordinatensystems die Komponenten $\mathbf{V} = (2, -3)$. Wie lautet der Ortsvektor zum Punkt und wie lauten die Komponenten des im kartesischen Koordinatensystem?

e) Der Vektor \mathbf{V} hat im Ursprung die x-Komponente 4 und die y-Komponente 3. Wie lautet der Ortsvektor zum Vektor und wie lauten die Komponenten des Vektors im Polarkoordinatensystem?

f) Der Vektor \mathbf{V} greift im Punkt $P(-2, 2)$ an. Er hat die kartesischen Koordinaten $(4, 4)$. Der Vektor ist in Polarkoordinaten umzurechnen.

g) Der Vektor \mathbf{V} greift im Punkt $P(-2, 2)$ an. Er hat die kartesischen Koordinaten $(-5, 1)$. Der Vektor ist in Polarkoordinaten umzurechnen.

h) Der Vektor \mathbf{V} greift im Punkt $P(-3, -4)$ an. Er hat die kartesischen Koordinaten $(4, 4)$. Der Vektor ist in Polarkoordinaten umzurechnen.

Lösungen

a) Siehe Erläuterungen im Script. Zu alle folgenden Lösungen sollten Sie Skizzen erstellen!

b) Ein Vektor tritt an einer bestimmten Stelle im Raum auf. Diese Stelle wird durch den Ortsvektor \mathbf{r} angegeben.

Ein Vektorfeld tritt im ganzen Raum auf, es ist eine Funktion des Raums: $\mathbf{V}(x, y, z)$.

c) Ortsvektor zum Punkt $P(3, 2)$ des Vektors:

kartesische Koordinaten: $\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{e}_x + r_y \cdot \mathbf{e}_y = 3 \cdot \mathbf{e}_x + 2 \cdot \mathbf{e}_y = (3, 2)$

Da der Ortsvektor im Ursprung beginnt, hat er keine φ -Komponente. Er hat den Betrag

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6$$

und ist gegenüber der x-Achse um den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,7^\circ$$

im mathematisch positiven Sinn, also gegen die Uhrzeigerdrehung verdreht.

Der Vektor $\mathbf{V} = (2,3)$, der im Punkt $(3,2)$ angreift, hat den

Betrag
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61$$

und den Winkel zur x-Achse:
$$\varphi = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56,31^\circ.$$

Angabe des Vektors in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{V}_1 = (2, 3) = 2 \cdot \mathbf{e}_x + 3 \cdot \mathbf{e}_y$$

Angabe des Vektors in Polarkoordinaten:

1. Möglichkeit

r-Komponente: $V_r = V \cdot \cos(\varphi - \varphi_{\text{Ortsvektor}})$ (Projektion auf die Radial-Komponente)

φ -Komponente: $V_\varphi = V \cdot \sin(\varphi - \varphi_{\text{Ortsvektor}})$ (Projektion auf die φ -Komponente)

$$\begin{aligned} r\text{-Komponente:} & \quad V_r = 3,61 \cdot \cos(56,3^\circ - 33,7^\circ) = 3,61 \cdot \cos(22,6^\circ) = 3,33 \\ \varphi\text{-Komponente:} & \quad V_\varphi = 3,61 \cdot \sin(56,3^\circ - 33,7^\circ) = 3,61 \cdot \sin(22,6^\circ) = 1,39 \\ & \quad \mathbf{V} = 3,61 \mathbf{e}_r + 1,39 \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

Umrechnung der x,y-Komponenten in die r,φ-Komponenten

Es gilt

$$\begin{aligned} r\text{-Komponente:} & \quad A_r = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \varphi\text{-Komponente:} & \quad A_\varphi = -A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Anwendung auf \mathbf{V} liefert:

$$\begin{aligned} r\text{-Komponente:} & \quad V_r = V_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & \quad V_r = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = 3,33 \\ \varphi\text{-Komponente:} & \quad V_\varphi = -V_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & \quad V_\varphi = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = 1,39 \end{aligned}$$

Vektor in Polarkoordinaten: $\mathbf{V}_r = V_r \cdot \mathbf{e}_r + V_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 3,33 \cdot \mathbf{e}_r + 1,39 \cdot \mathbf{e}_\varphi$

d) Vektor im Punkt (1,-2) mit den Koordinaten (2, -3):

Ortsvektor:

kartesische Koordinaten zum Punkt (1,-2)

$$\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{e}_x + r_y \cdot \mathbf{e}_y = 1 \cdot \mathbf{e}_x - 2 \cdot \mathbf{e}_y$$

Winkel des Ortsvektors zur x-Achse:

$$\varphi_{\text{Ortsvektor}} = \arctan(-2/1) = -63,4^\circ$$

Vektor im Punkt (1, -2) in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{V} = (2, -3) = 2 \mathbf{e}_x - 3 \mathbf{e}_y$$

Vektor in Polarkoordinaten (nach der 1. Möglichkeit, da schneller):

Zuerst Betrag und Winkel berechnen:

$$\text{Betrag} \quad V = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61$$

$$\text{Winkel} \quad \varphi = \arctan(2/-3) = -56,3^\circ$$

Dann die r- und φ-Komponenten berechnen:

$$r\text{-Komponente:} \quad V_r = 3,61 \cdot \cos(-56,3^\circ - (-63,4^\circ)) = 3,61 \cos(7,1^\circ) = 3,6$$

φ -Komponente: $V_\varphi = 3,61 \cdot \sin(-56,3^\circ + 63,4^\circ) = 3,61 \sin(7,1^\circ) = 0,45$
 $\mathbf{V} = 3,6 \mathbf{e}_r + 0,45 \mathbf{e}_\varphi.$

e) $\mathbf{V} = (4, 3)$ im Ursprung.

Vektor in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{V} = (4, 3) = 4 \mathbf{e}_x + 3 \mathbf{e}_y$$

Der Vektor greift im Ursprung des Koordinatensystems an, daher gibt es keinen Ortsvektor: $\mathbf{r} = 0$

Umrechnung des Vektors auf Polarkoordinaten:

Da der Vektor im Ursprung angreift, gibt es keinen Ortsvektor und damit auch keinen Bezugs- oder Verdrehungswinkel für die Radialkomponente wie in den beiden vorigen Beispielen. Denn da wurde der Verdrehungswinkel der Radialkomponente des Polarkoordinatensystems gegenüber der x-Achse durch den Winkel $\varphi_{\text{Ortsvektor}}$ des Ortsvektors bestimmt. Fehlt der Ortsvektor, wird der Winkel der Radialkomponente des Polarkoordinatensystems so gelegt, daß er mit dem Winkel φ des Vektors übereinstimmt.

Dann gilt $\varphi = \arctan(V_y/V_x) = \arctan(3/4) = 36,9^\circ$

Der Vektor hat den Betrag

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Dieser Vektor hat also nur eine Radialkomponente, die mit dem Betrag übereinstimmt:

$$\mathbf{V} = 5 \mathbf{e}_r.$$

f) Angriffspunkt P(-2, 2). Vektor (4, 4).

Winkel des Ortsvektors

$$\varphi_{\text{Ortsvektor}} = \arctan(2/-2) = 135^\circ.$$

Betrag des Vektors $V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,7$

Winkel des Vektors $\varphi = \arctan(4/4) = 45^\circ$

Berechnung der r- und φ -Komponenten:

r-Komponente: $V_r = 5 \cdot \cos(45^\circ - 135^\circ) = 5 \cos(-90^\circ) = 0$

φ -Komponente: $V_\varphi = 5 \cdot \sin(-90^\circ) = -5$

$$\mathbf{V} = -5 \mathbf{e}_\varphi.$$

Der Vektor hat nur eine φ -Komponente in negativer Richtung.

g) Angriffspunkt P(-2, 2). Vektor (-5, 1).

Winkel des Ortsvektors

$$\varphi_{\text{Ortsvektor}} = \arctan(2/-2) = 135^\circ.$$

Betrag des Vektors $V = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5,1$

Winkel des Vektors $\varphi = \arctan(1/-5) = 168,5^\circ$

Berechnung der r - und φ -Komponenten:

$$r\text{-Komponente: } V_r = 5,1 \cdot \cos(168,5^\circ - 135^\circ) = 5,1 \cos(33,5^\circ) = 4,25$$

$$\varphi\text{-Komponente: } V_\varphi = 5,1 \cdot \sin(33,5^\circ) = 2,81$$

$$\mathbf{V} = 4,25 \mathbf{e}_r + 2,81 \mathbf{e}_\varphi.$$

h) Angriffspunkt P(-3, -4). Vektor (4,4).

Winkel des Ortsvektors

$$\varphi_{\text{Ortsvektor}} = \arctan(-4/-3) = 233,1^\circ = -126,9^\circ.$$

$$\text{Betrag des Vektors } V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,7$$

$$\text{Winkel des Vektors } \varphi = \arctan(4/4) = 45^\circ$$

Berechnung der r - und φ -Komponenten:

$$r\text{-Komponente: } V_r = 5,7 \cdot \cos(45^\circ - (-126,9^\circ)) = 5,7 \cos(171,9^\circ) = -5,64$$

$$\varphi\text{-Komponente: } V_\varphi = 5,7 \cdot \sin(171,9^\circ) = 0,80$$

$$\mathbf{V} = -5,64 \mathbf{e}_r + 0,80 \mathbf{e}_\varphi.$$

Vektoroperationen

Gegeben sind zwei Vektoren der elektrischen Feldstärken \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 :

$$E_1 = 5,5 \text{ V/m}; \quad \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_x) = 0,3;$$

$$E_2 = 8,1 \text{ V/m}; \quad \cos(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_x) = 0,82;$$

Es sind zu berechnen:

$$\text{die Vektorsumme } \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\text{das skalare Produkt } \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

$$\text{das vektorielle Produkt } \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$$

$$\text{der Winkel zwischen } \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$$

Komponenten des Vektors 1:

$$E_{1x} = E_1 \cos\varphi = 5,5 \text{ V/m} \cdot 0,3 = 1,65 \text{ V/m}$$

$$E_{1y} = \sqrt{E_1^2 - E_{1x}^2} = \sqrt{5,5^2 - 1,65^2} \cdot \text{V/m} = 5,25 \text{ V/m}$$

Komponenten des Vektors 2:

$$E_{2x} = E_2 \cos\varphi = 8,1 \text{ V/m} \cdot 0,82 = 6,64 \text{ V/m}$$

$$E_{2y} = \sqrt{E_2^2 - E_{2x}^2} = \sqrt{8,1^2 - 6,64^2} \cdot \text{V/m} = 4,64 \text{ V/m}$$

a) die Vektorsumme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

$$\mathbf{E} = (E_{1x} + E_{2x})\mathbf{e}_x + (E_{1y} + E_{2y})\mathbf{e}_y$$

$$x\text{-Komponente: } E_x = E_{1x} + E_{2x} = (1,65 + 6,64) \text{ V/m} = 8,29 \text{ V/m}$$

$$y\text{-Komponente: } E_y = E_{1y} + E_{2y} = (5,25 + 4,64) \text{ V/m} = 9,89 \text{ V/m}$$

$$\text{Betrag: } \sqrt{(E_x^2 + E_y^2)} = \sqrt{((8,29 \text{ V/m})^2 + (9,89 \text{ V/m})^2)} = 12,9 \text{ V/m}$$

Winkel $\varphi = \arctan(E_y/E_x) = \arctan(9,89/8,29) = 50^\circ$

b) Das Skalarprodukt $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 &= E_{1x} \cdot E_{2x} + E_{1y} \cdot E_{2y} = \\ &(1,65 \cdot 6,64 + 5,25 \cdot 4,64) \text{ V}^2/\text{m}^2 = 35,32 \text{ V}^2/\text{m}^2 \end{aligned}$$

c) Winkel zwischen beiden Vektoren

aus der Beziehung $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_1 E_2 \cdot \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) &= \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 / (E_1 E_2) \\ \cos(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) &= 35,32 / (5,5 \cdot 8,1) = 0,7928 \\ \varphi &= \arctan 0,7928 = 38,4^\circ \end{aligned}$$

d) Das vektorielle Produkt $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$

Der Betrag des vektoriellen Produktes ist:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| &= E_1 E_2 \cdot \sin(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 5,5 \cdot 8,1 \text{ V}^2/\text{m}^2 \sin 38,4^\circ = \\ &= 27,67 \text{ V}^2/\text{m}^2 \end{aligned}$$

Der Vektor steht senkrecht auf der Ebene die durch die Vektoren \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 gebildet wird.

Sind zwei dreidimensionale Vektoren gegeben, bestimmt sich der Vektor des Produkts aus folgender Determinante:

$$\mathbf{D} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ D_x & D_y & D_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Maßstäbe bei graphischer Darstellung

Bei der zeichnerischen Darstellung von Vektoren sind Maßstäbe erforderlich, mit deren Hilfe man den Vektor einer physikalischen Größe O (Originalgröße) in die Länge B einer Linie (Bildgröße) in einer Zeichnung umformt. Es gilt

$$O = m \cdot B$$

und daraus $m = O/B$.

m wird als Maßstab bezeichnet wird. Der Maßstab hat die Einheit

$$[m] = [O]/[B].$$

Beispiele

Gegeben ist der Ortsvektor R zum Punkt $x_1 = 3 \text{ m}$, $y_1 = 5 \text{ m}$. In der Zeichnung soll eine Linie der Länge von 1 cm der Länge eines Ortsvektors von 50 cm entsprechen. Dann ist

$$m = 50 \text{ cm}_{\text{Original}} / 1 \text{ cm}_{\text{Bild}} = 50.$$

Der Ortsvektor hat die Länge von

$$R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} \text{ m} = 5,83 \text{ m}.$$

In der Zeichnung wird dieser Vektor durch die Länge gemäß $B = O/m$

$$l_{\text{Bild}} = 583 \text{ cm}_{\text{Original}} / 50 = 11,66 \text{ cm}$$

dargestellt.