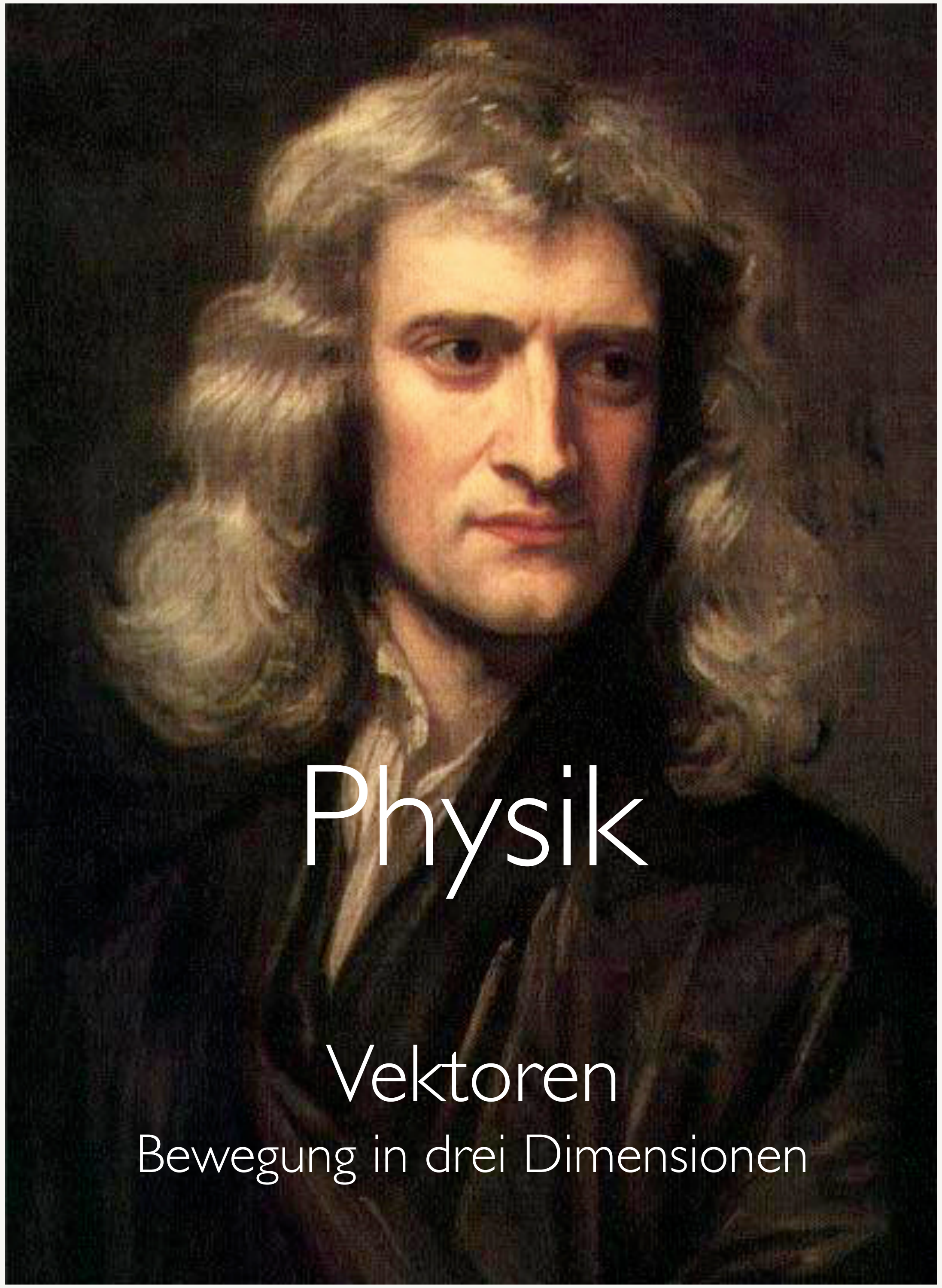
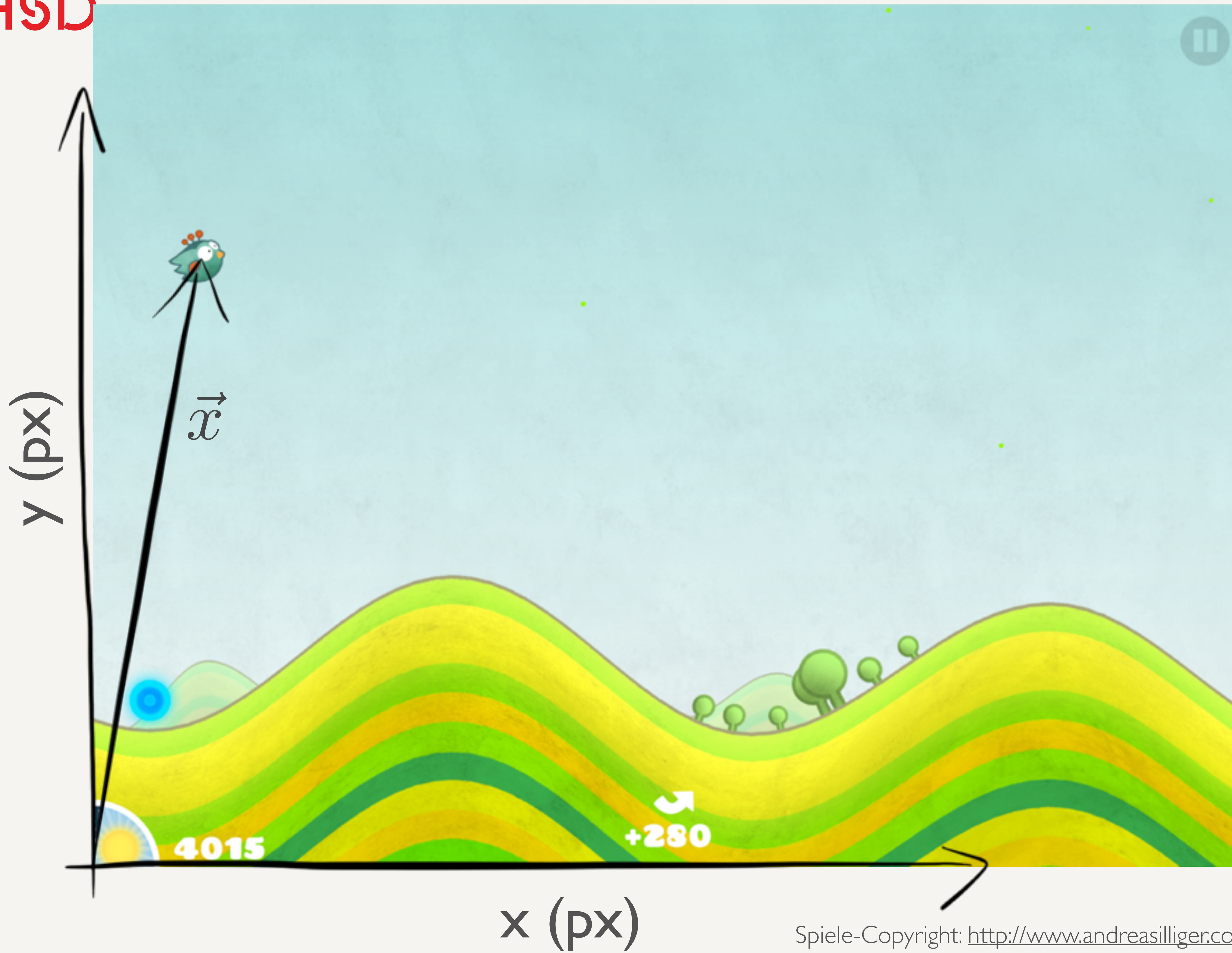
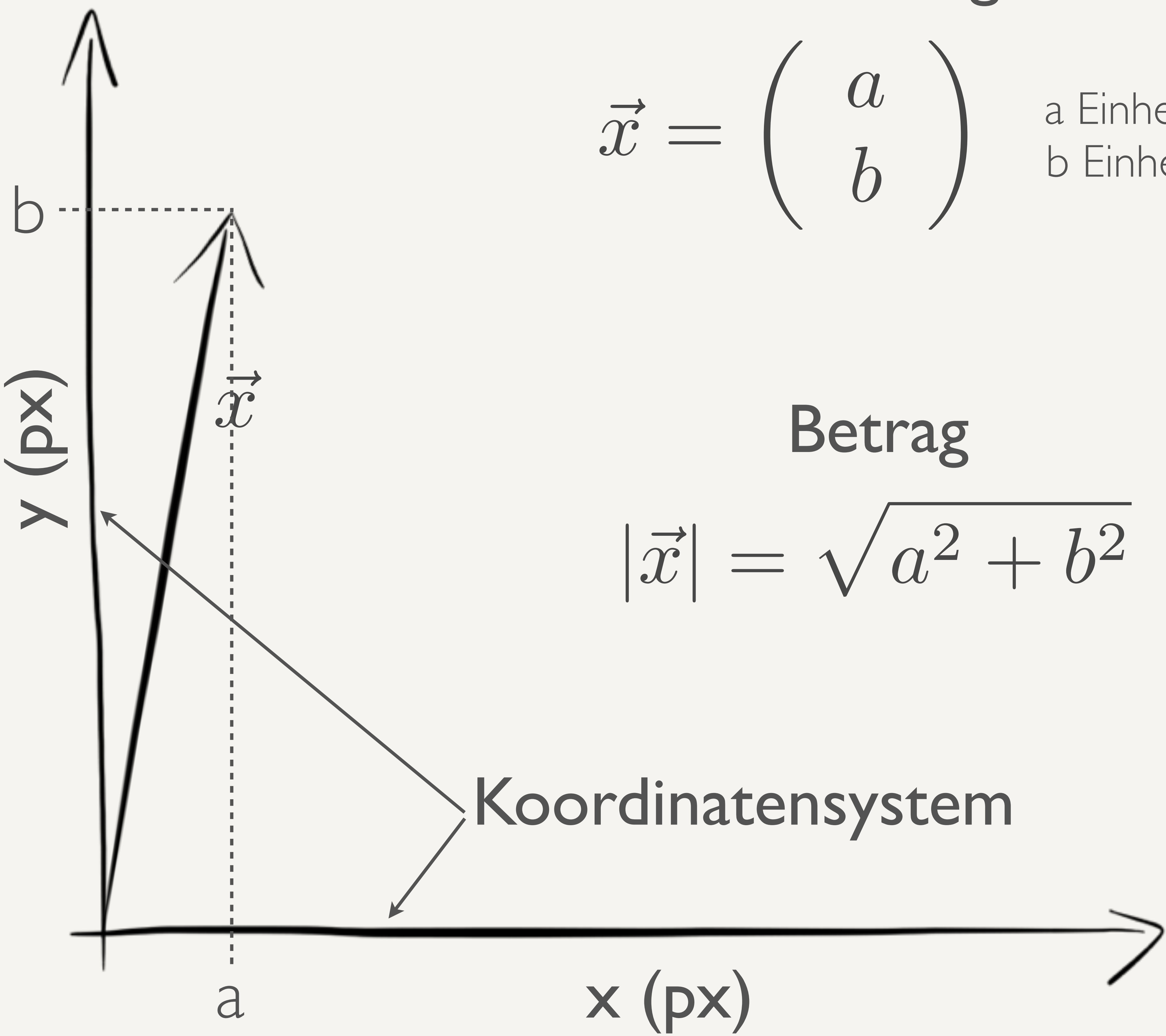
Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences




y (px)
$\vec{x}$
4015
+280
x (px)



Richtung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

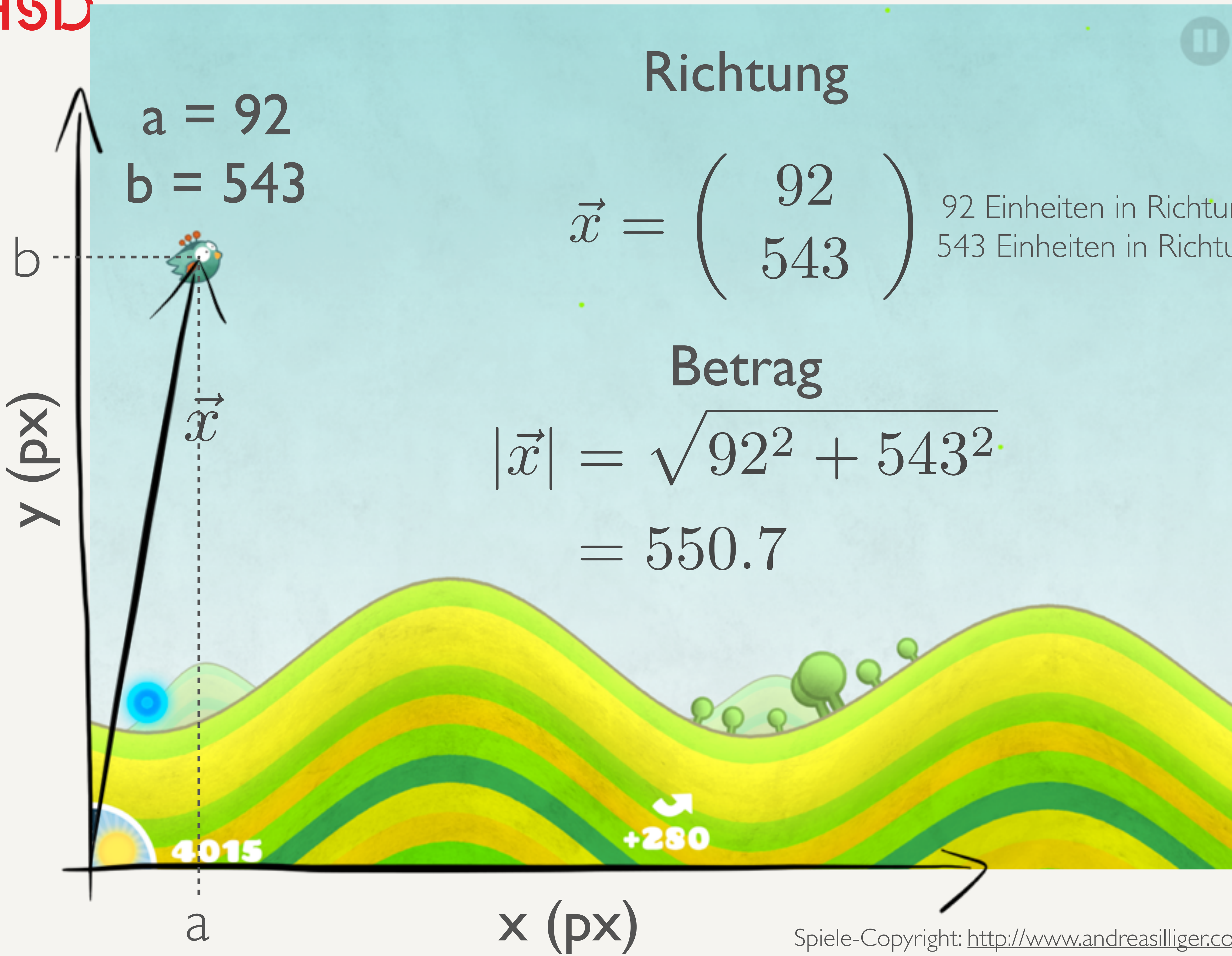
a Einheiten in Richtung x,
b Einheiten in Richtung y

Betrag

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pythagoras

Koordinatensystem



Richtung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 92 \\ 543 \end{pmatrix}$$

92 Einheiten in Richtung x,
543 Einheiten in Richtung y

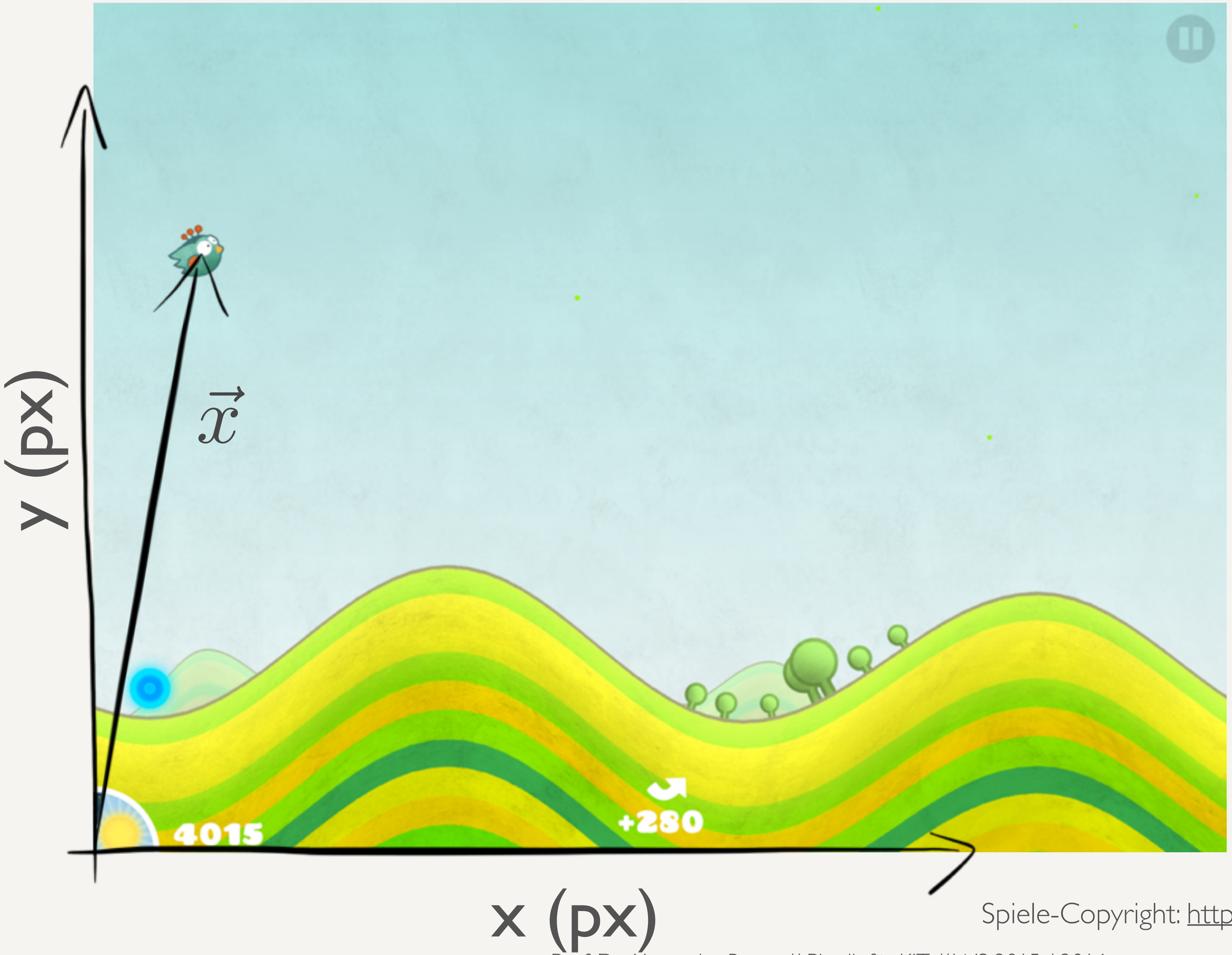
Betrag

$$|\vec{x}| = \sqrt{92^2 + 543^2}$$

$$= 550.7$$

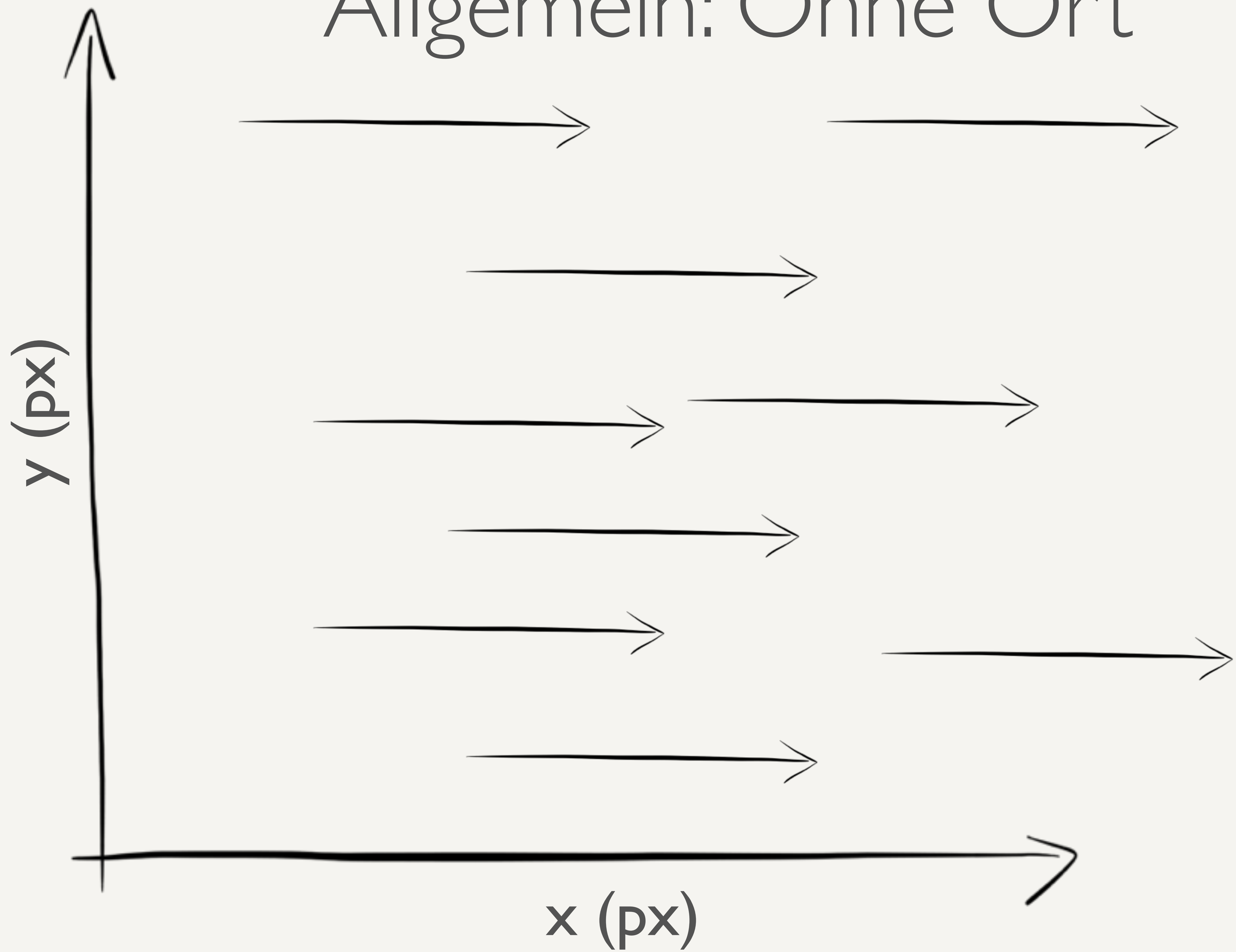
Spiele-Copyright: http://www.andreasilliger.com/index.php

Spezialfall Ortsvektor



Spiele-Copyright: http://www.andreasilliger.com/index.php

Allgemein: Ohne Ort

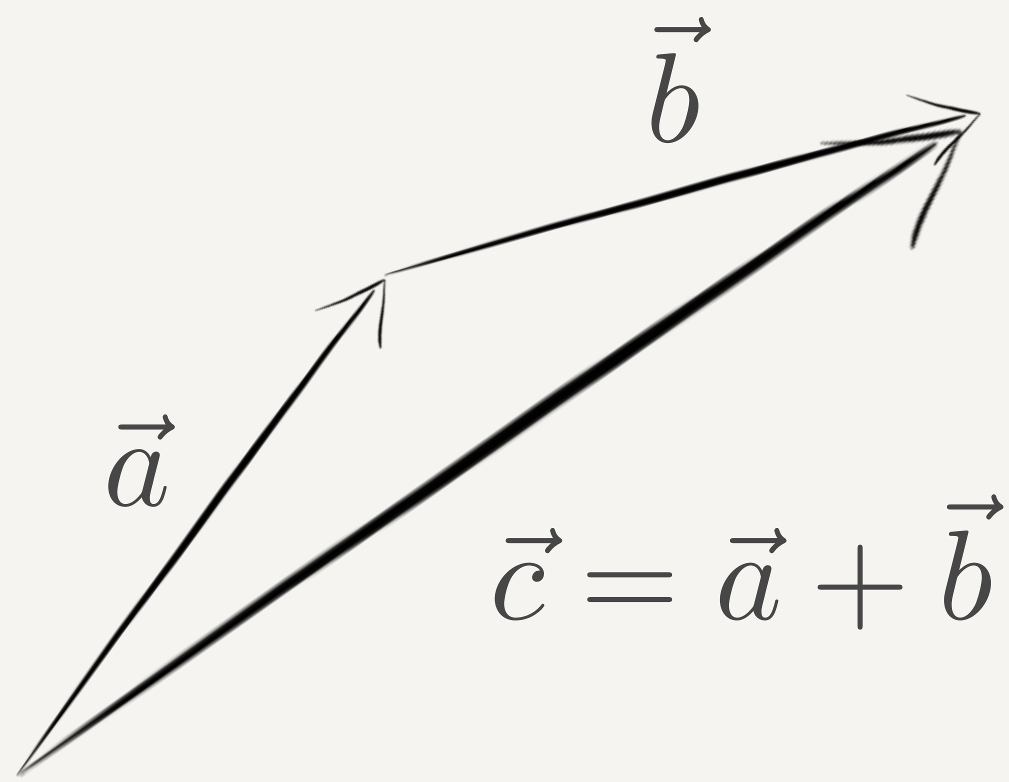


Rechenregeln

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation mit Skalar

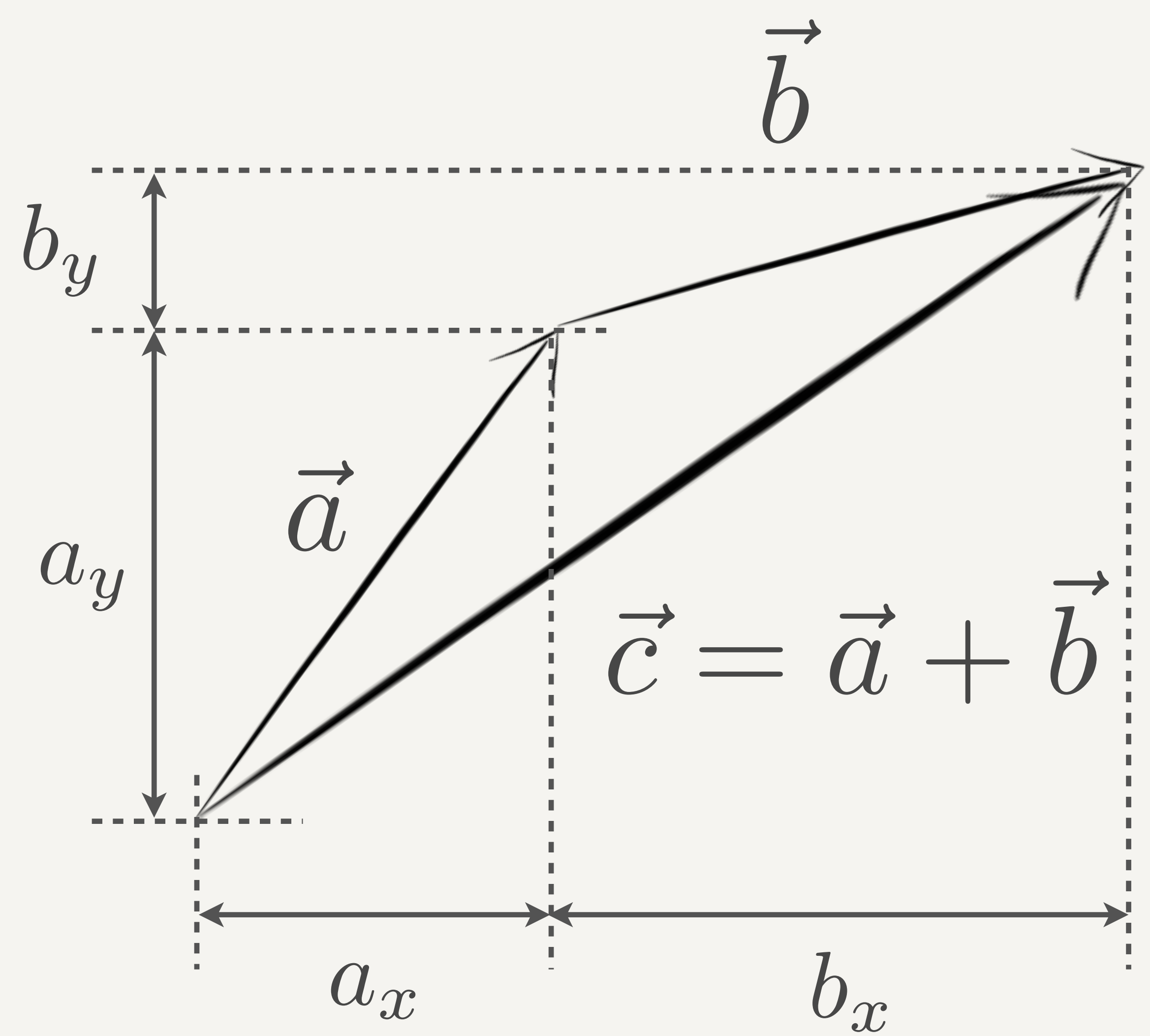
Addition

- Addition zweier Vektoren gibt wieder einen Vektor.
- **Anschaulich**: Die beiden Vektoren werden aneinander ‚gehängt'.
- Der Summenvektor $\vec{c}$ zeigt von der Basis von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$.

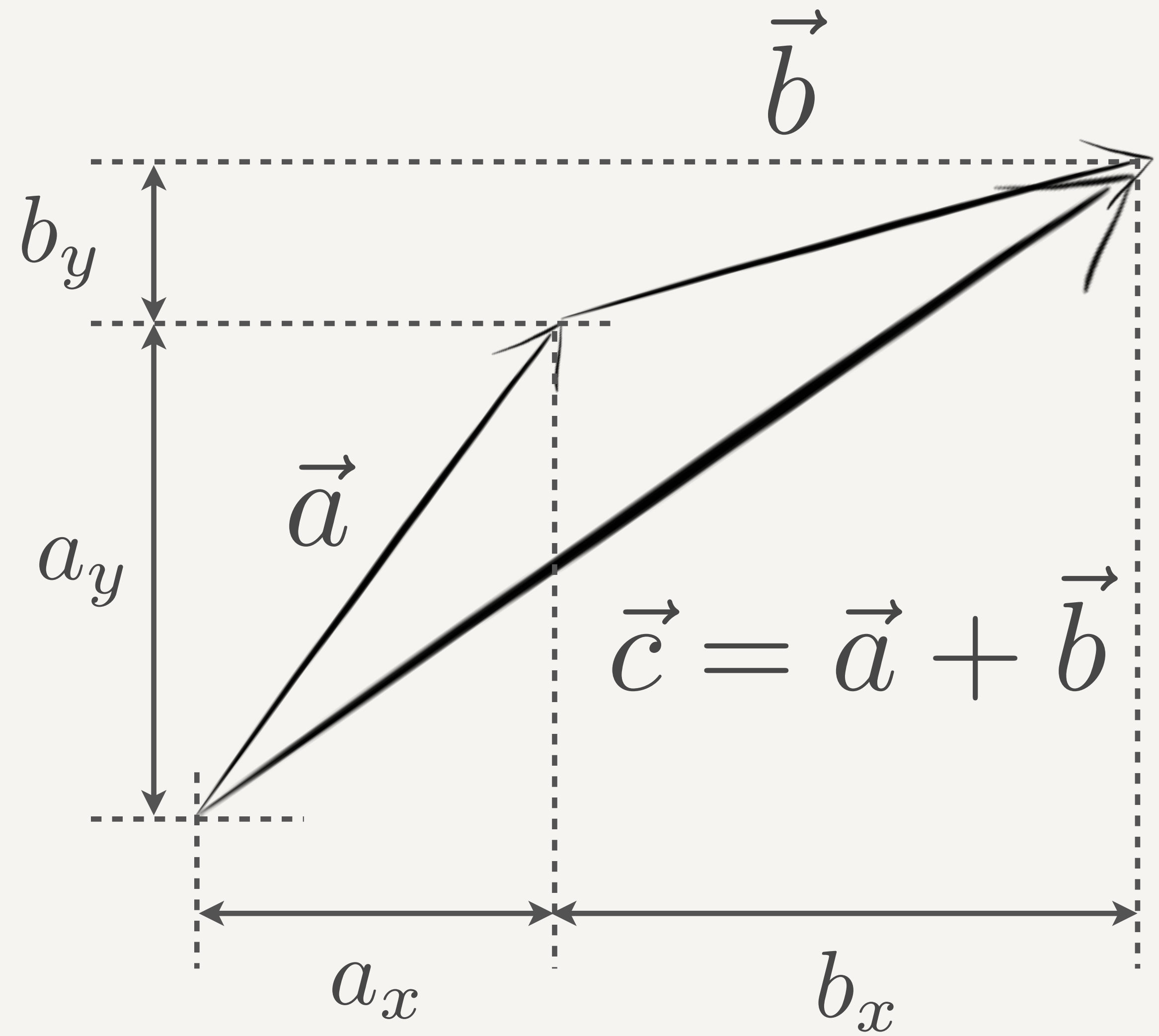


Addition

- Addition zweier Vektoren gibt wieder einen Vektor.
- **Formal**: die Komponenten der Vektoren werden addiert.



Addition



- Addition zweier Vektoren gibt wieder einen Vektor.
- **Formal**: die Komponenten der Vektoren werden addiert.

$$c_x = a_x + b_x$$

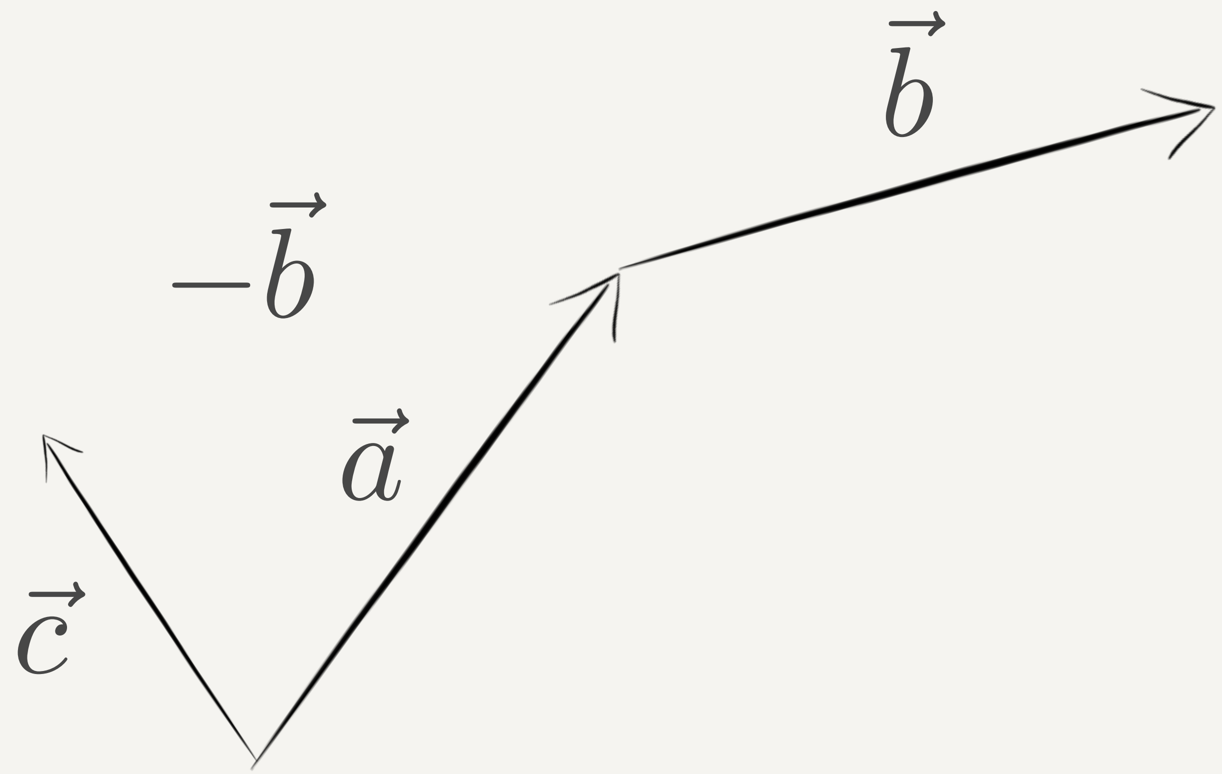
$$c_y = a_y + b_y$$

Subtraktion

- **Anschaulich**: b wird umgedreht, dann werden die beiden Vektoren aneinander ‚gehängt'
- **Formal**: die Komponenten werden subtrahiert.

$$c_x = a_x - b_x$$

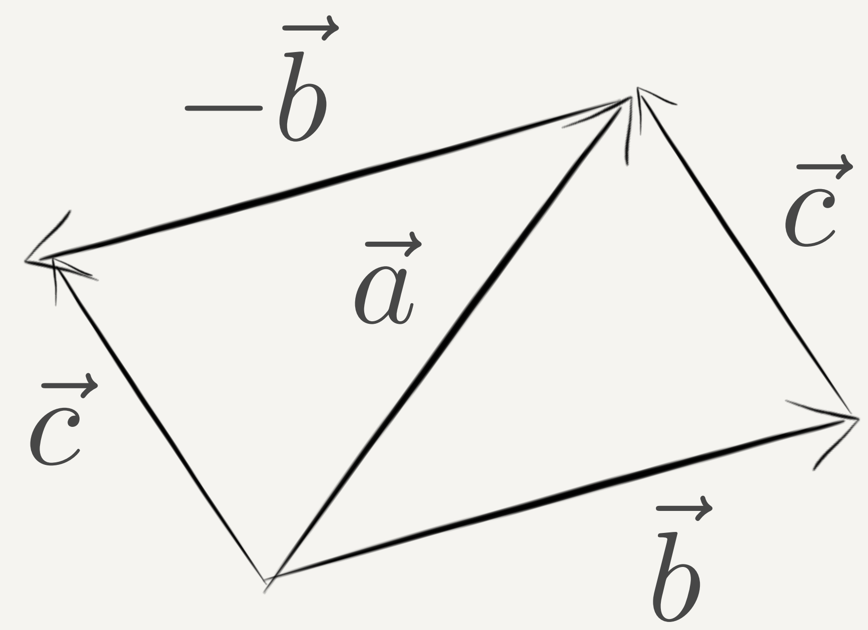
$$c_y = a_y - b_y$$



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Subtraktion

- **Alternativ**: a und b werden am gleichen Startpunkt abgetragen.
- Der Differenzvektor zeigt dann von der Spitze von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$.
- Diese Darstellung spielt bei Bewegungen eine Rolle.

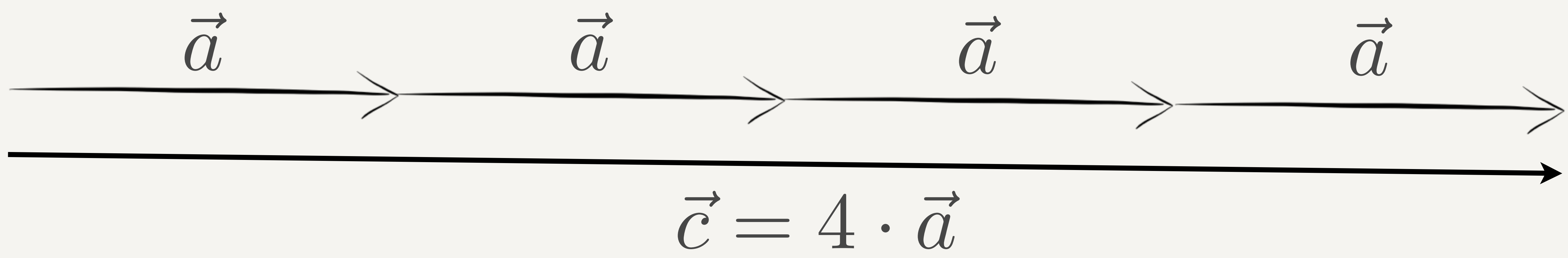


$$c_x = a_x - b_x$$

$$c_y = a_y - b_y$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Multiplikation mit einem Skalar



- Ein Vektor multipliziert mit einem Skalar ist wieder ein Vektor.
- **Anschaulich**: ein Vektor wird mehrfach an sich selber gehängt.
- **Formal**: die Komponenten werden mit dem Skalar multipliziert.

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a}$$

$$c_x = s \cdot a_x$$

$$c_y = s \cdot a_y$$

Linearkombination

- Eine Linearkombination ist die Summe mehrere Vektoren
- Die einzelnen Vektoren können durch skalare Multiplikation verlängert oder verkürzt sein.

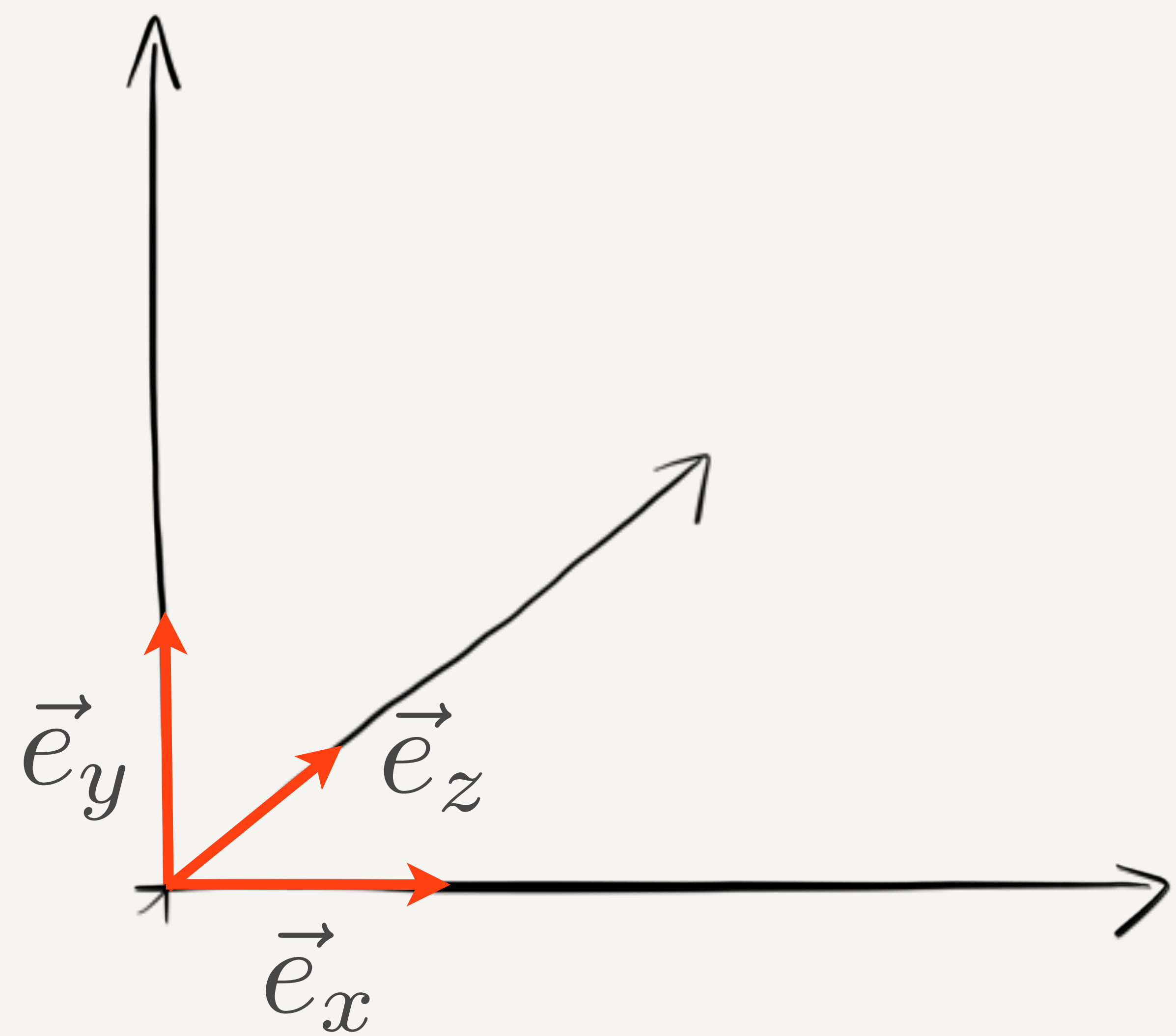
$$\vec{a} = c_1 \cdot \vec{x}_1 + c_2 \cdot \vec{x}_2 + c_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots$$

Einheitsvektoren

- Für jede Raumrichtung gibt es einen Einheitsvektor.
- Er hat die Richtung der jeweiligen Achse.
- Sein Betrag ist Eins.

René Descartes
1596 - 1650

Kartesische Koordinaten

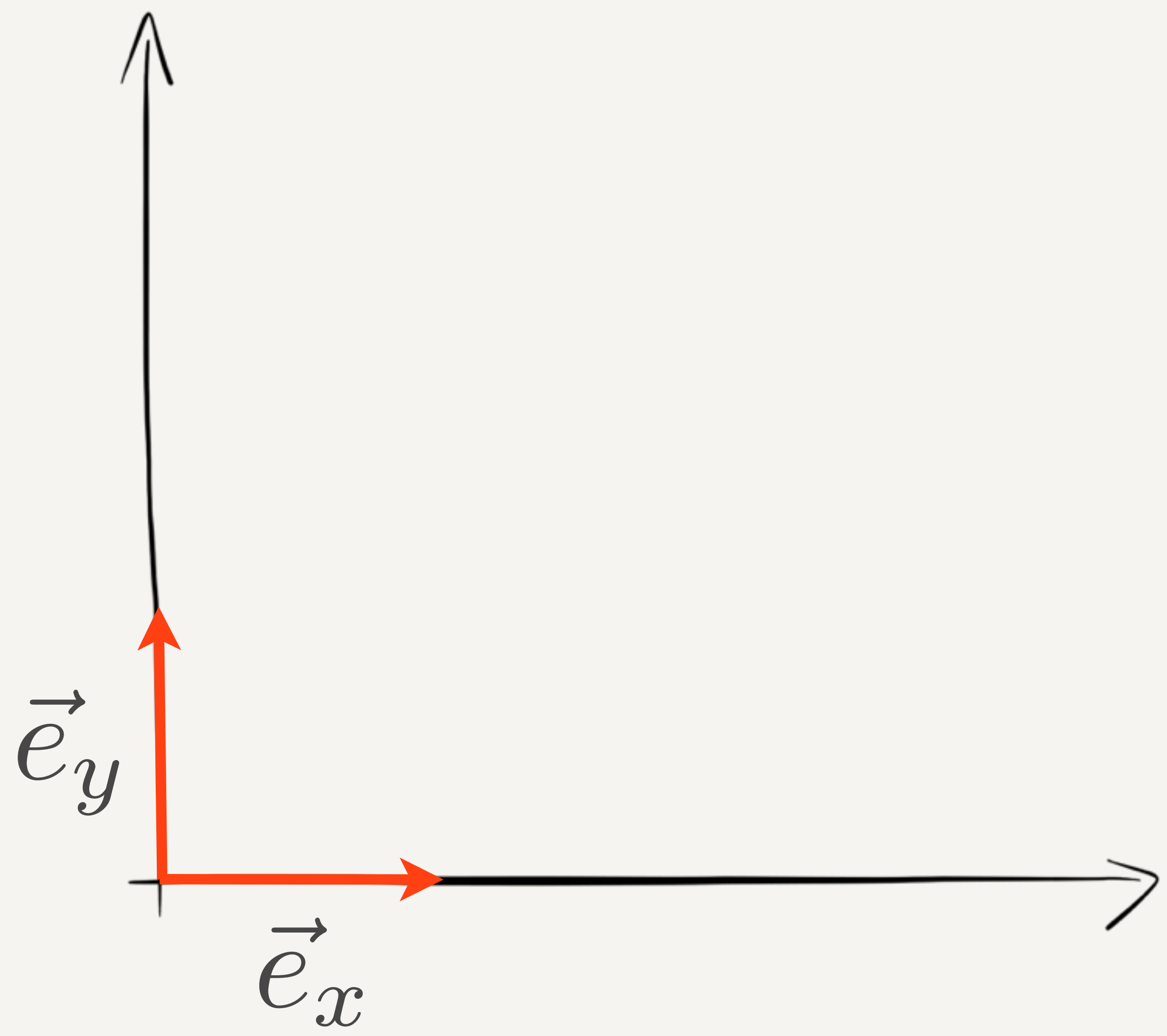


Einheitsvektoren

Kartesische Koordinaten

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Einheitsvektoren

- Jeder Vektor kann als Linearkombination der Einheitsvektoren dargestellt werden.
- Die skalaren Vorfaktoren entsprechend grade den Komponenten des Vektors.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

Rechenregeln - Zusammenfassung

Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

Addition

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

Subtraktion

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalar

$$\vec{c} = s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Rechenregeln - Zusammenfassung

Linearkombination

$$\vec{a} = c_1 \cdot \vec{x}_1 + c_2 \cdot \vec{x}_2 + c_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots$$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

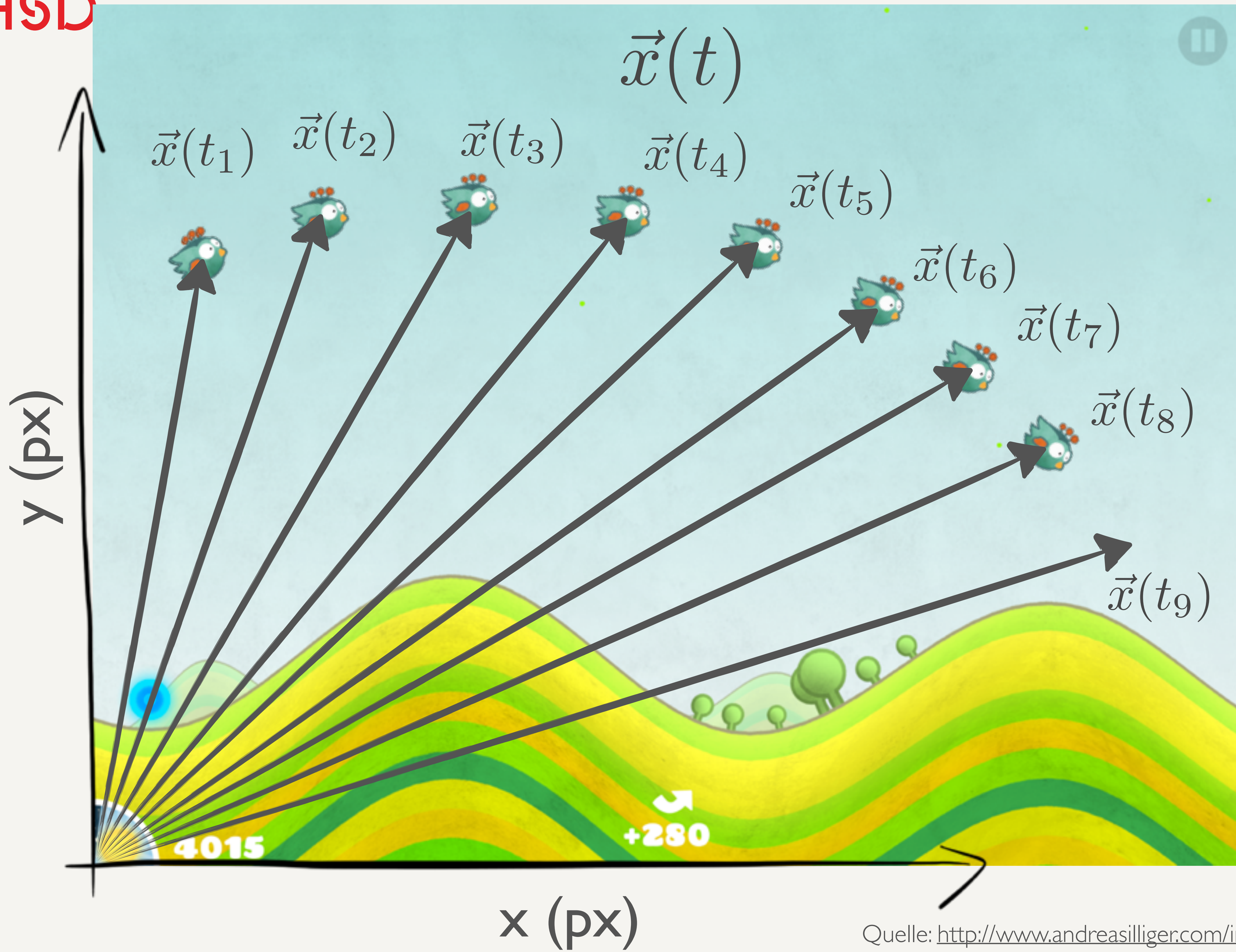
Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Teilchenbahn $x(t)$

Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(t)$

Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{x}$

Experimente: beschleunigte Luftkissenbahn, fallende Kugel



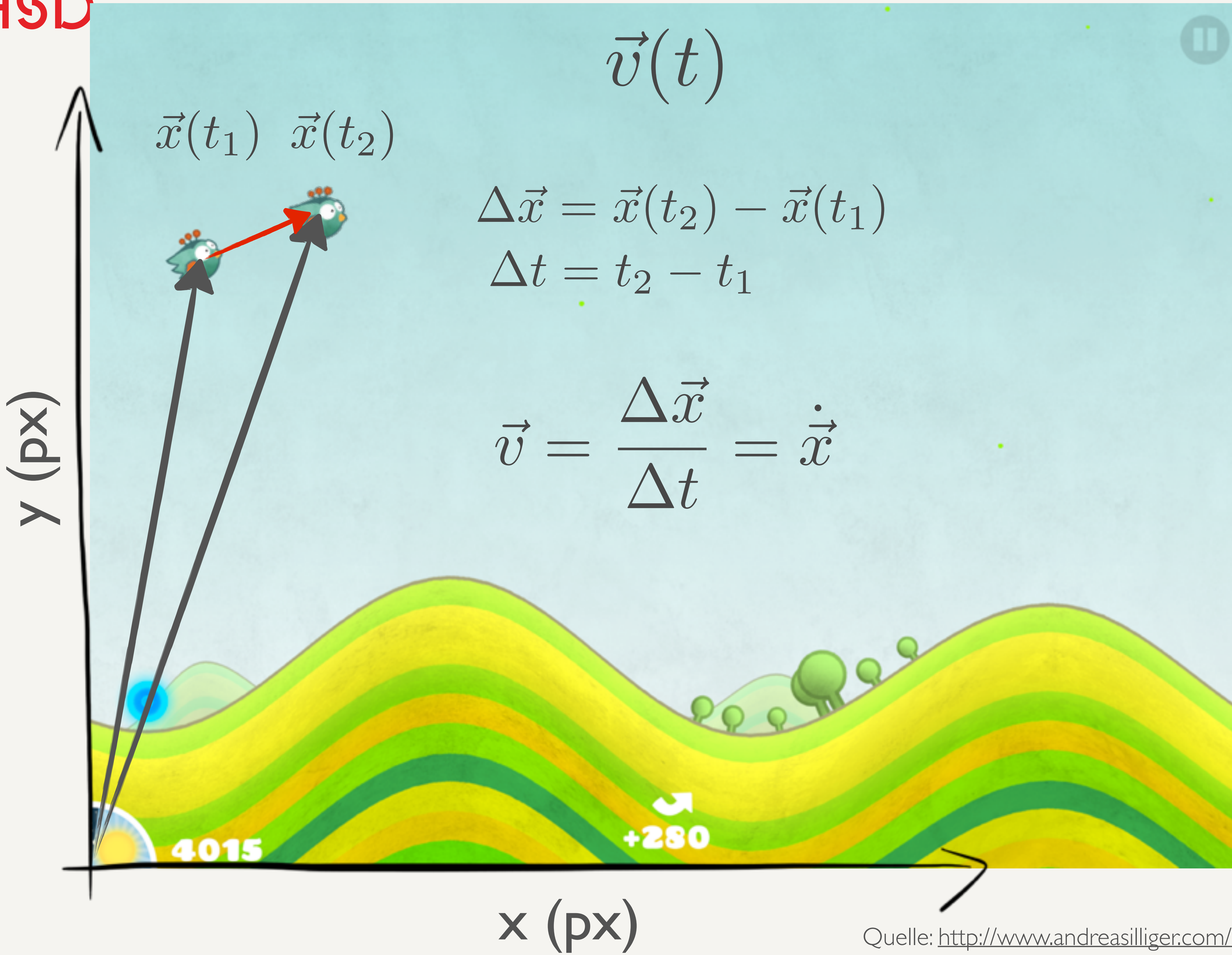
Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php

$$\vec{v}(t)$$

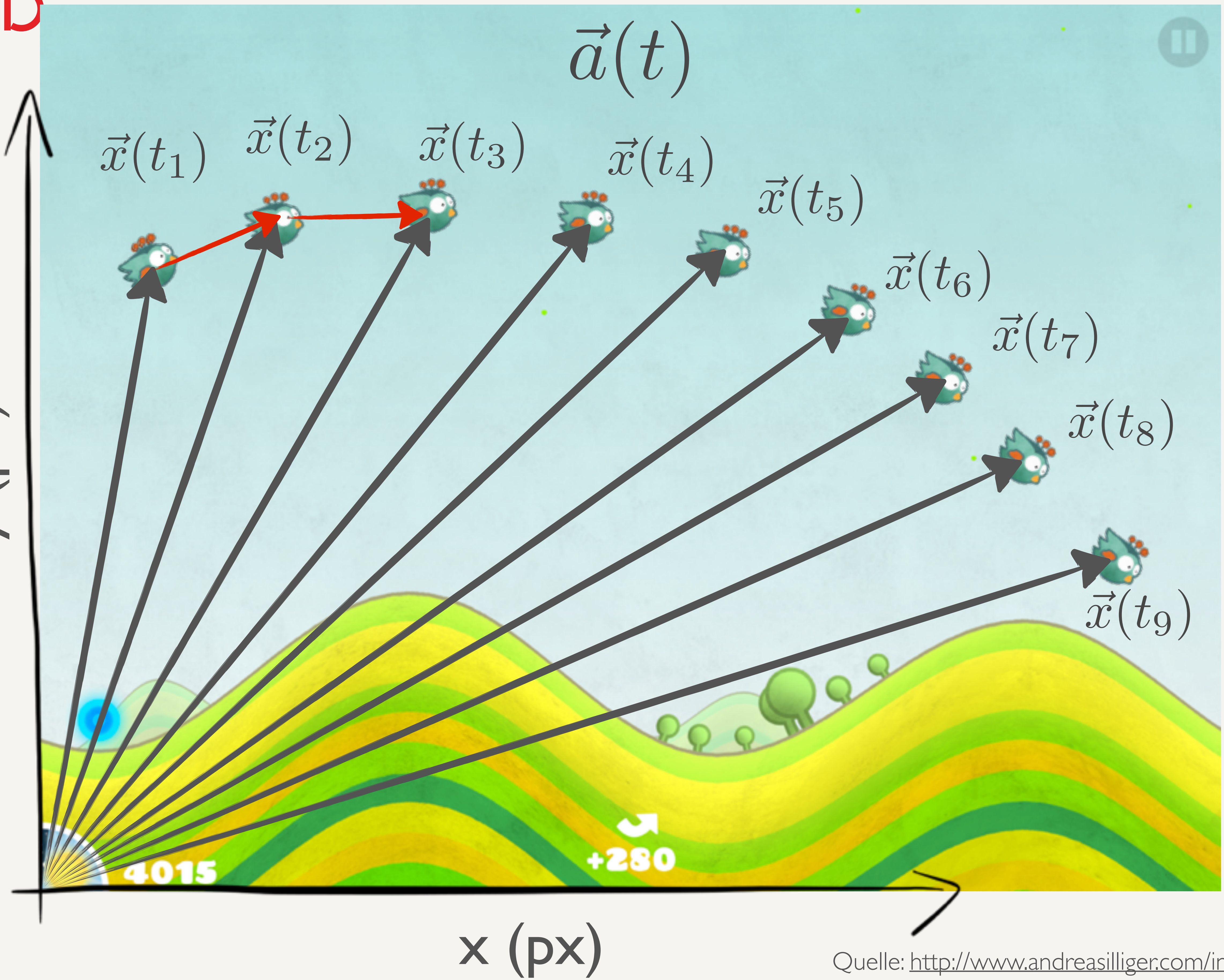
$$\vec{x}(t_1) \quad \vec{x}(t_2)$$

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

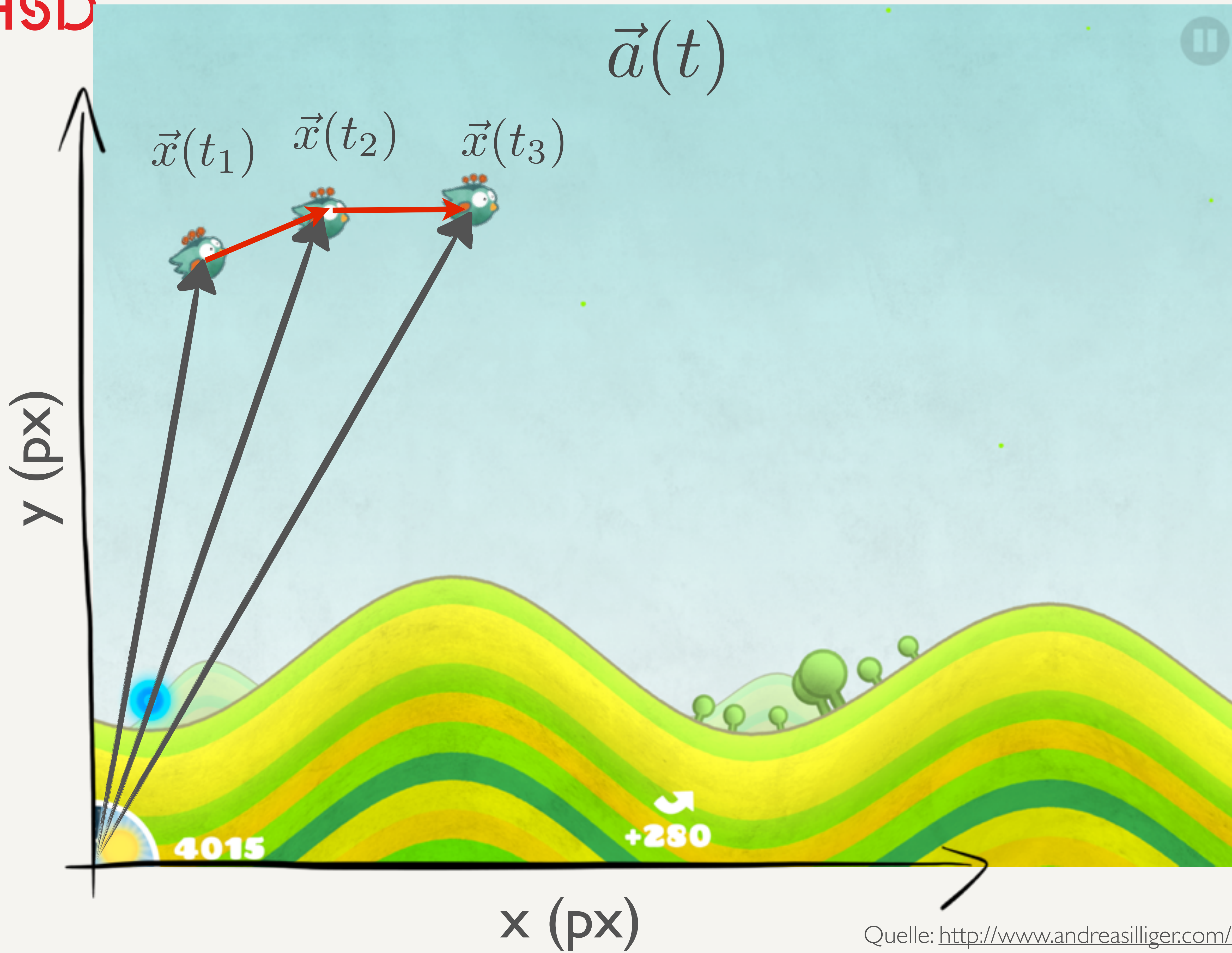
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \dot{\vec{x}}$$



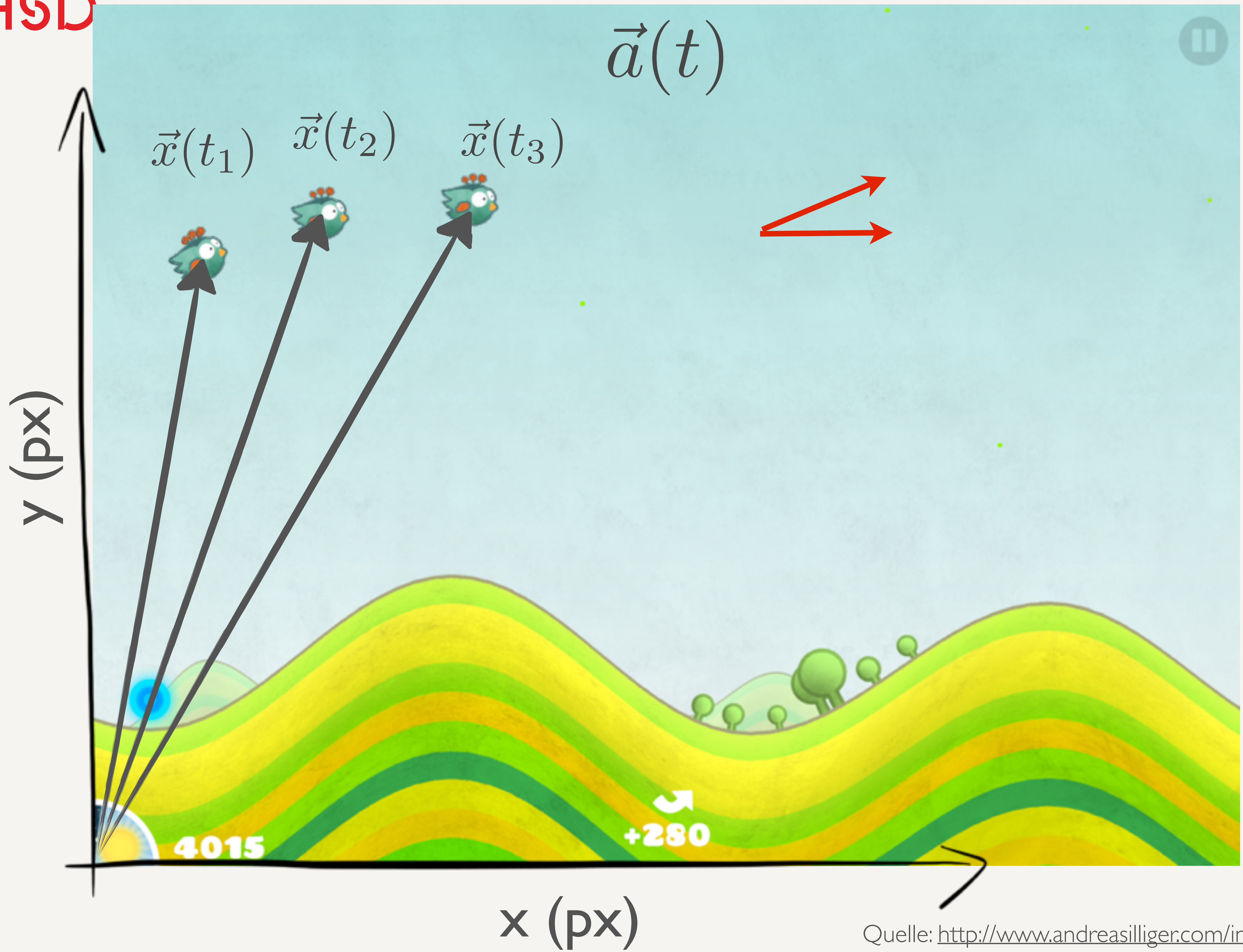
Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php



Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php

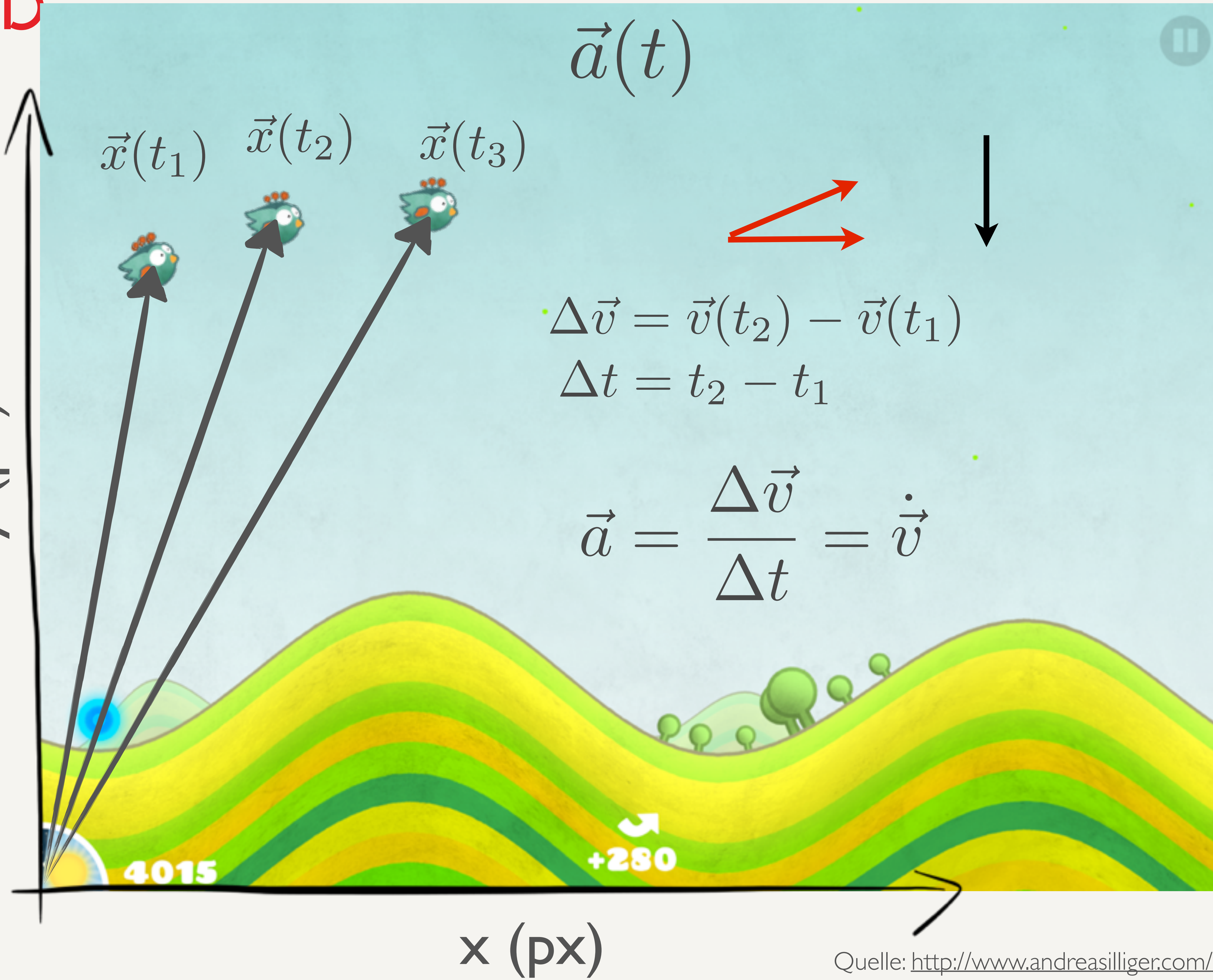


Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php



Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php

$$\vec{a}(t)$$



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}$$

Quelle: http://www.andreasilliger.com/index.php

Geschwindigkeit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

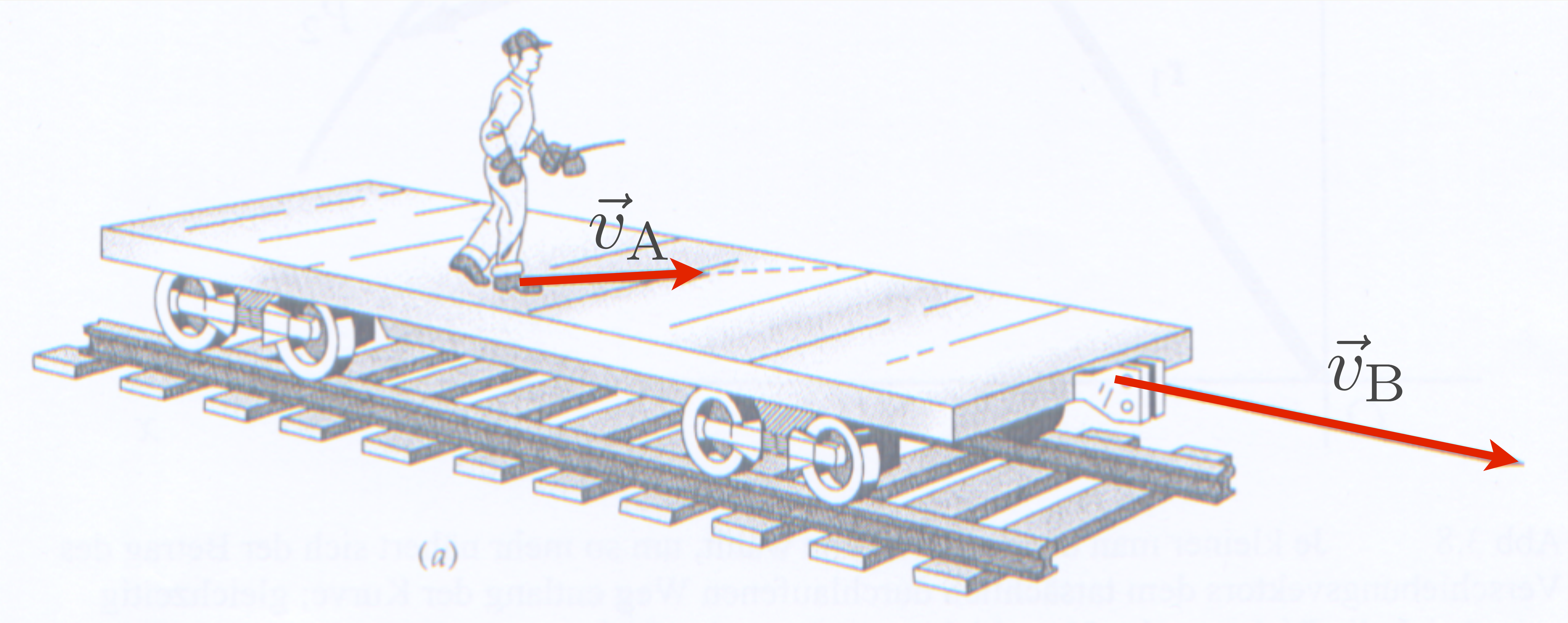
- Die Komponenten können unabhängig voneinander betrachtet werden.
- **Der Vektor stellt zwei Bewegungsgleichungen gleichzeitig dar**: eine für die x-Richtung, eine für die y-Richtung.
- Die Gleichungen sind die selben wir für den eindimensionalen Fall.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \\ &= \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \begin{pmatrix} x(t_2) - x(t_1) \\ y(t_2) - y(t_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Relativgeschwindigkeit

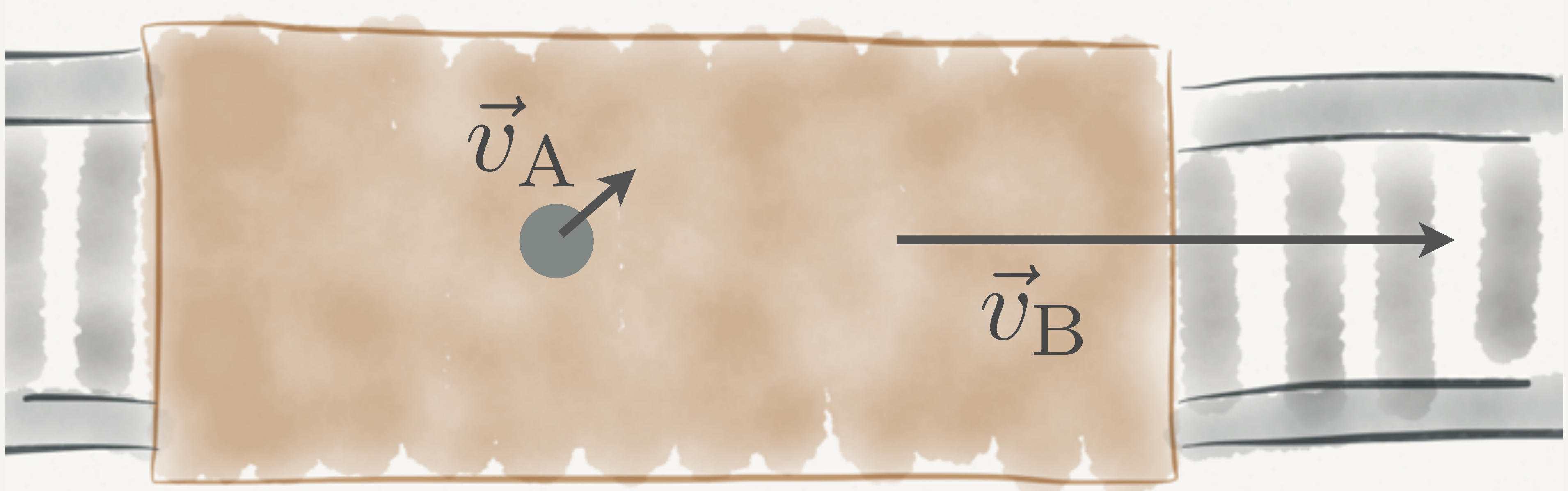
Addition von Geschwindigkeits-Vektoren



s. Skript S. 3-8

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

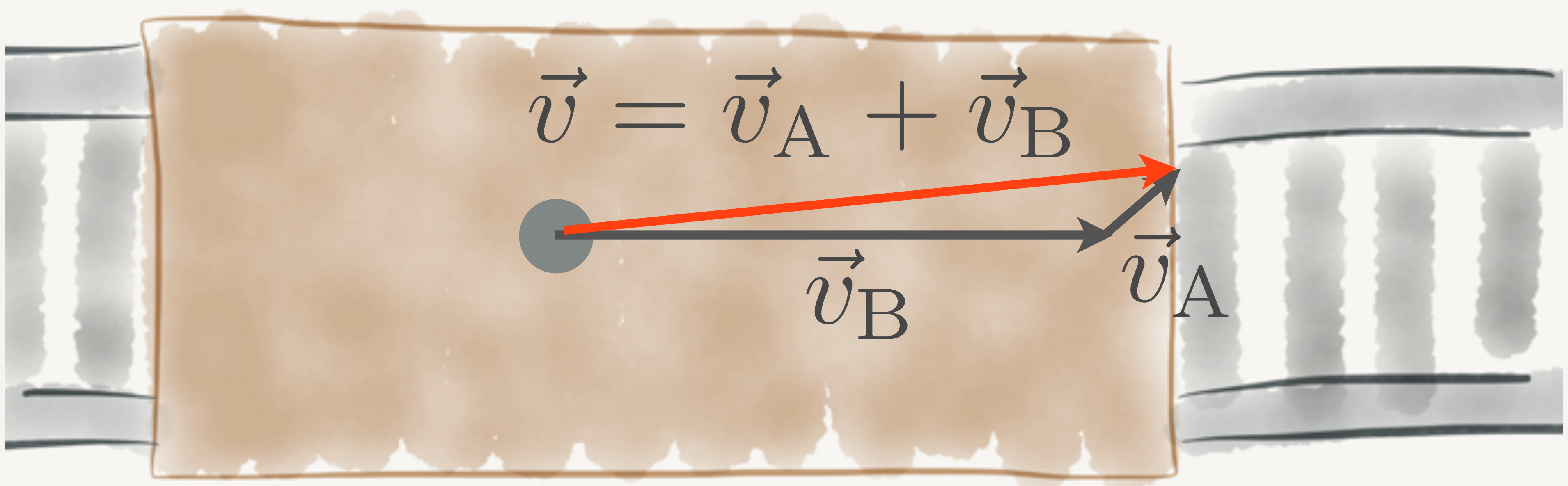
Relativgeschwindigkeit
Addition von Geschwindigkeits-Vektoren



Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
HSD

Relativgeschwindigkeit

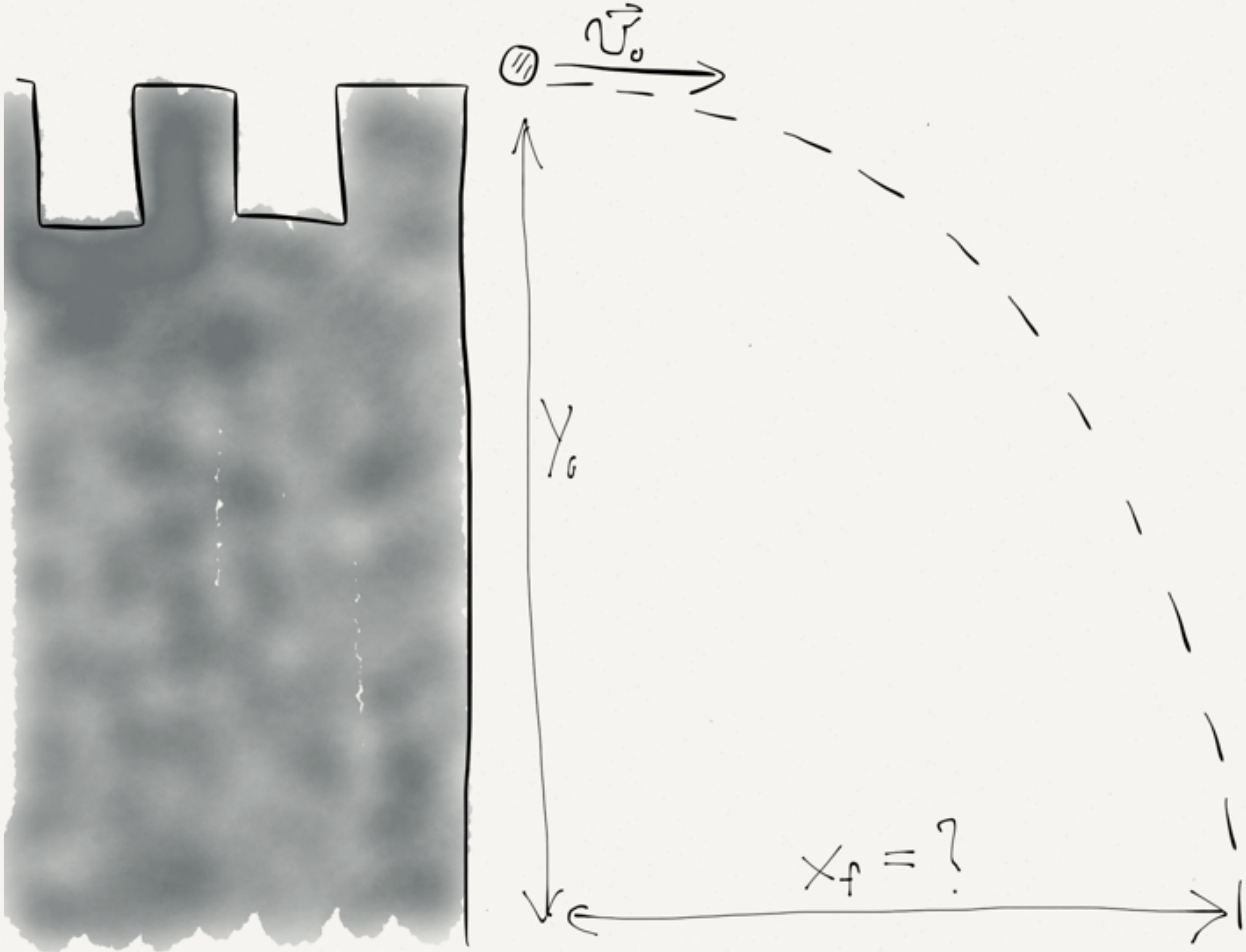
Addition von Geschwindigkeits-Vektoren



Funken

http://www.fotocommunity.de/pc/pc/display/29289223

Turmwurf



Turmwurf

Allgemeine Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_0^x t^2 + v_0^x t + x_0 \\ \frac{1}{2} a_0^y t^2 + v_0^y t + y_0 \end{pmatrix}$$

Konkrete Lösung:

$$x_0 = 0$$
$$v_0^x = 10\,\mathrm{m/s}$$
$$a_0^x = 0$$
$$y_0 = 30\,\mathrm{m}$$
$$v_0^y = 0$$
$$a_0^y = g = -9.81\,\mathrm{m/s}^2.$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_0^x t \\ \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \end{pmatrix}$$