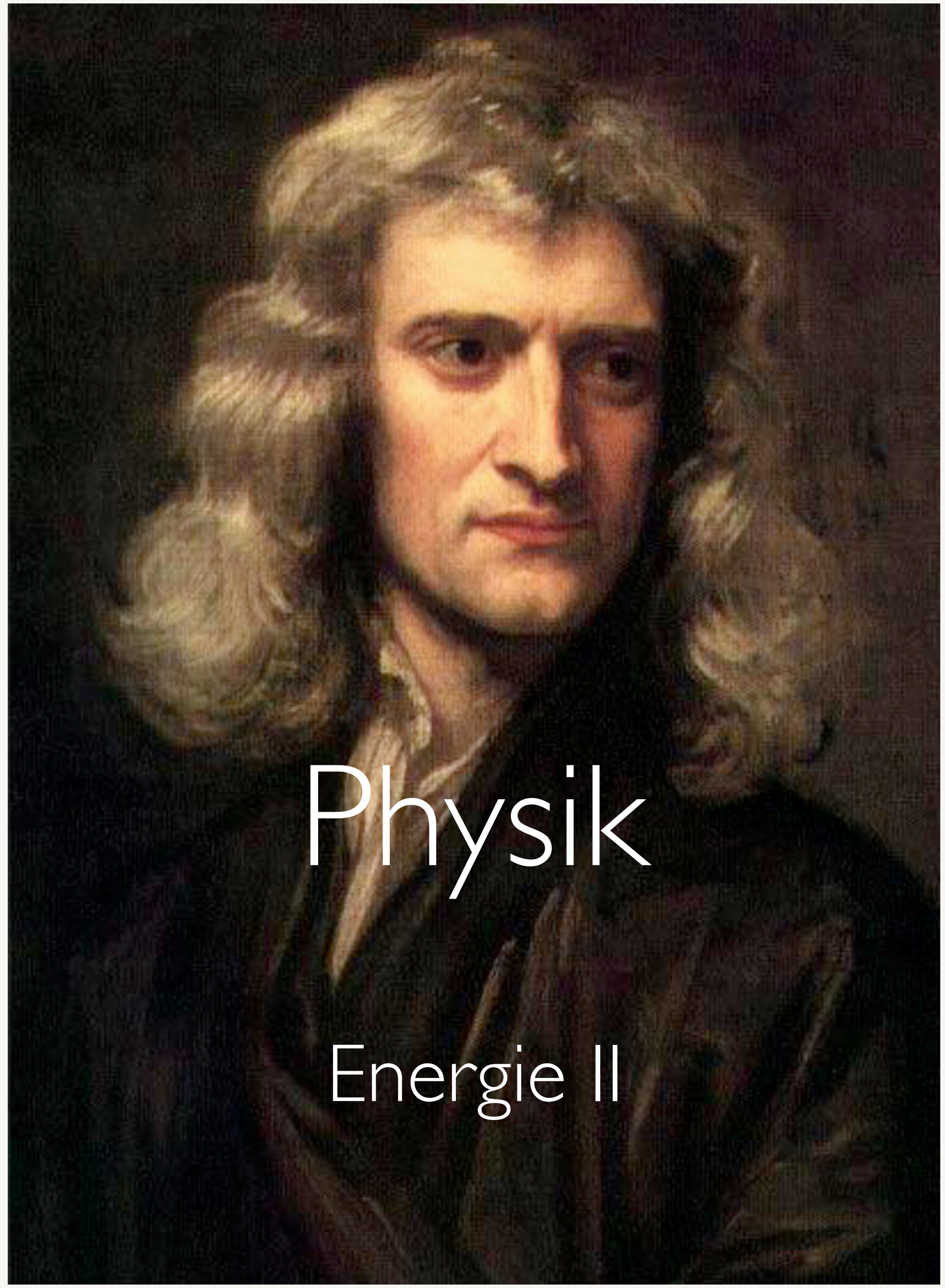
19. November 2015



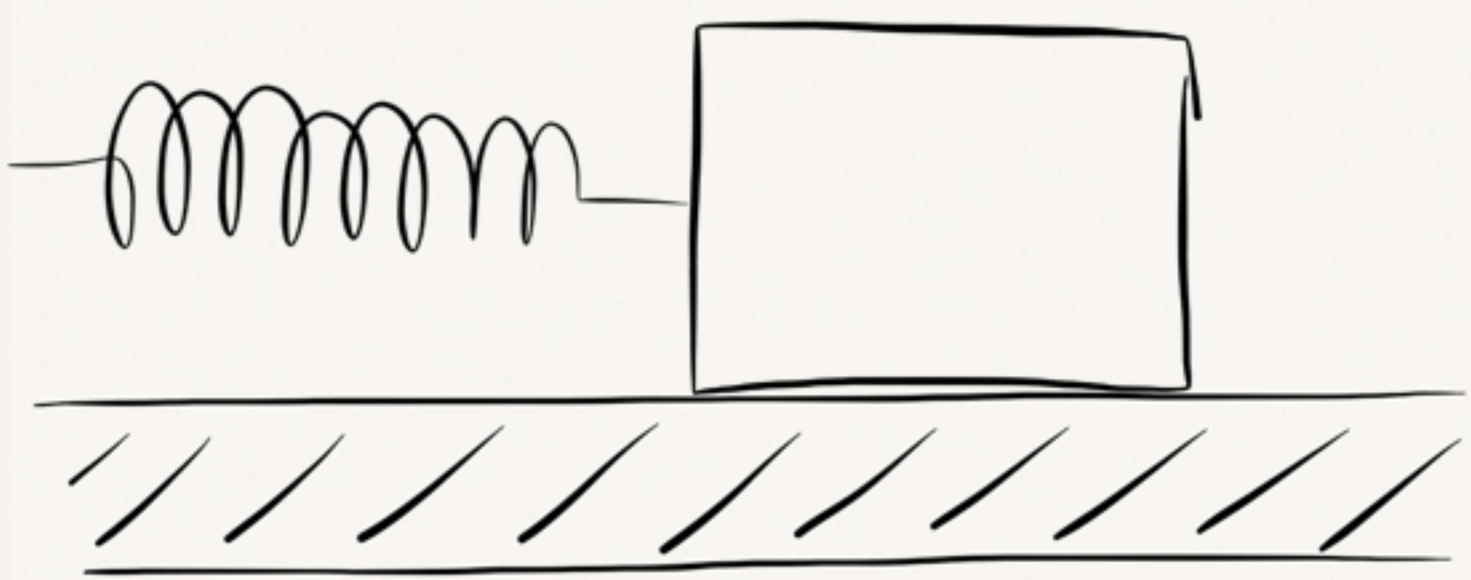
Physik

Energie II

Arbeit bei variabler Kraft

Was passiert wenn sich F in $W = Fx$ ständig ändert?

$$F = -k \cdot x$$



Arbeit bei variabler Kraft

$$W = \int F \mathrm{d}x$$

Arbeit bei variabler Kraft

$$F = -k \cdot x$$

$$W = \int F \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} W &= \int F \mathrm{d}x \\ &= \int (-k \cdot x) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}$$

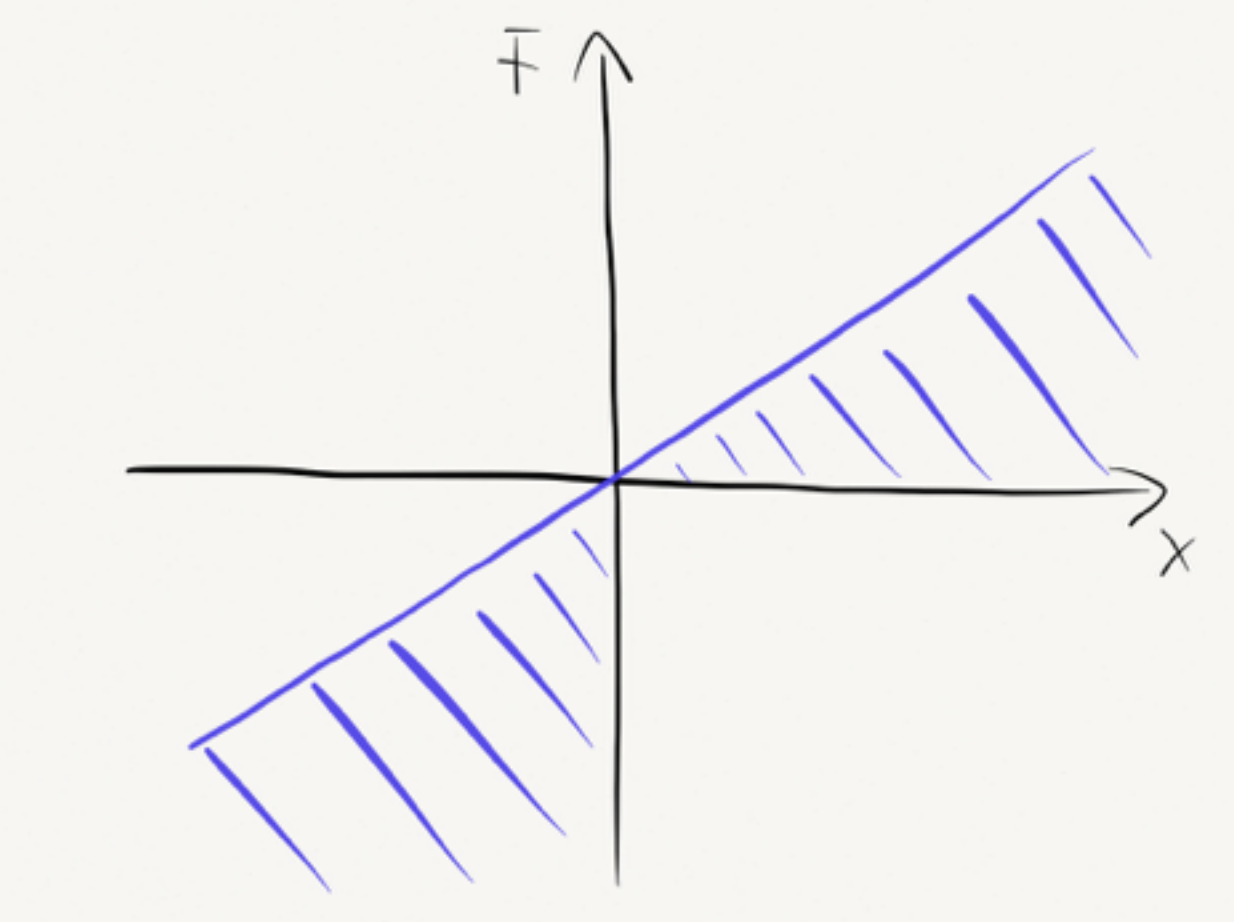
$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pot}} &= -W \\ &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}$$

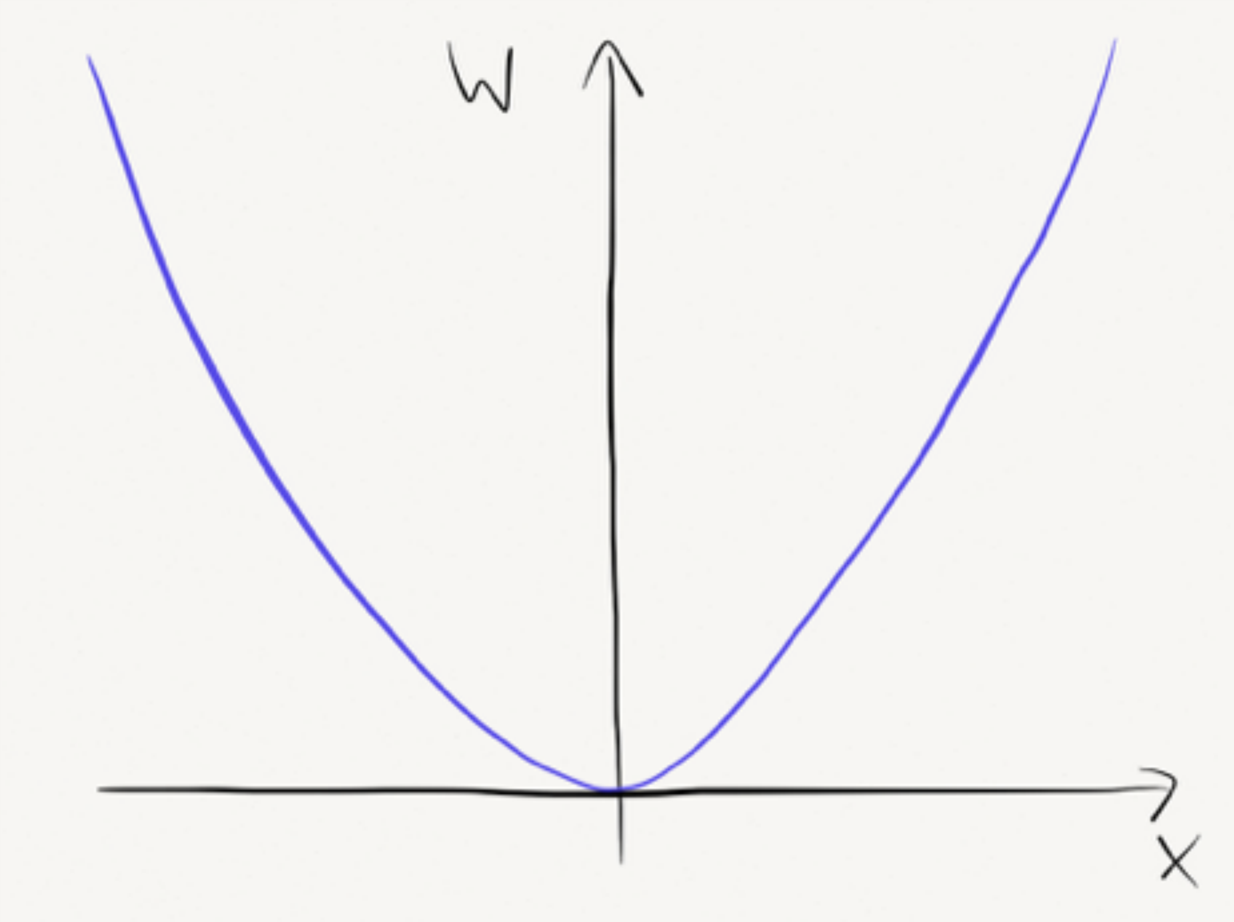
Variable Kraft und Energie

Hooke'sches Gesetz

$$F = -k \cdot x$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x^2$$



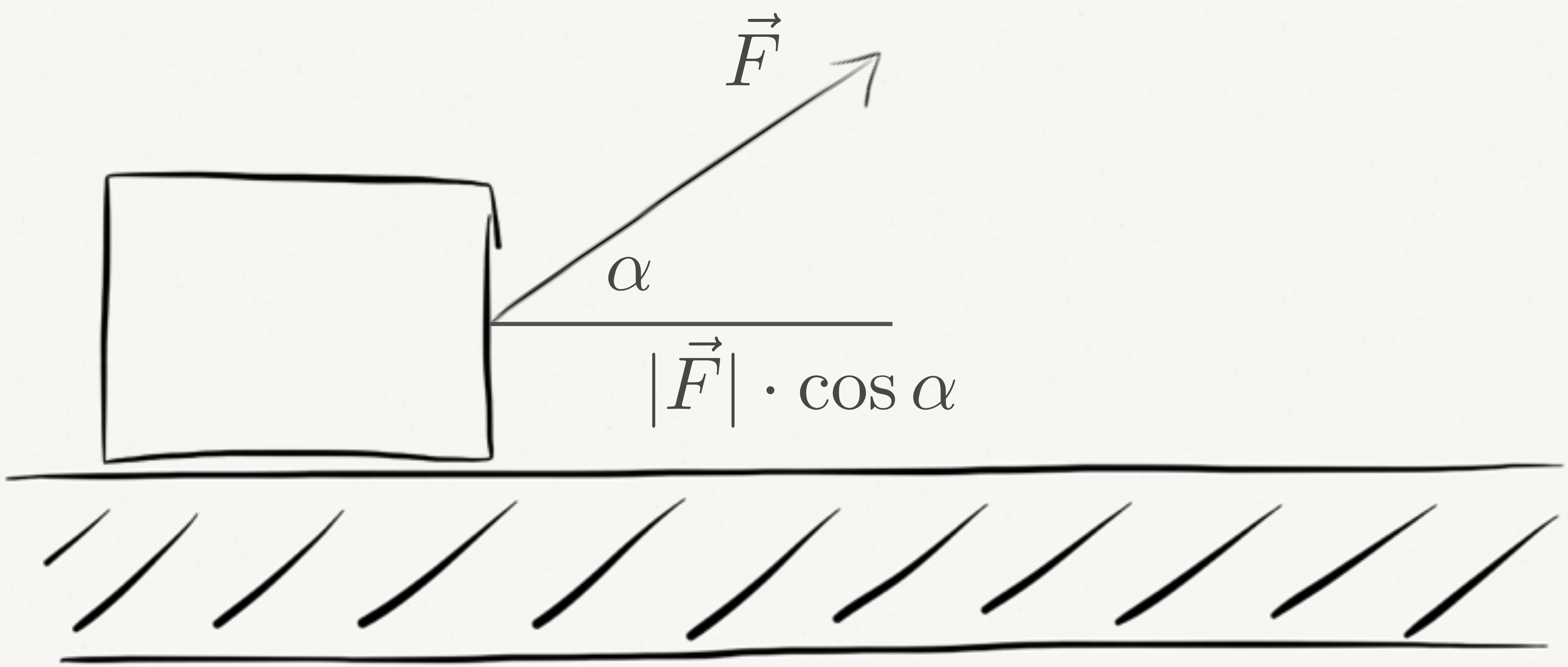


Arbeit vektoriell

- Um Arbeit im dreidimensionalen Raum zu definieren muss eine vektorielle Form gewählt werden.
- Das Skalarprodukt von F und x gibt die Arbeit an und muss über die gesamte Strecke integriert werden.
- Nur der Anteil von F in Richtung x wird gezählt!

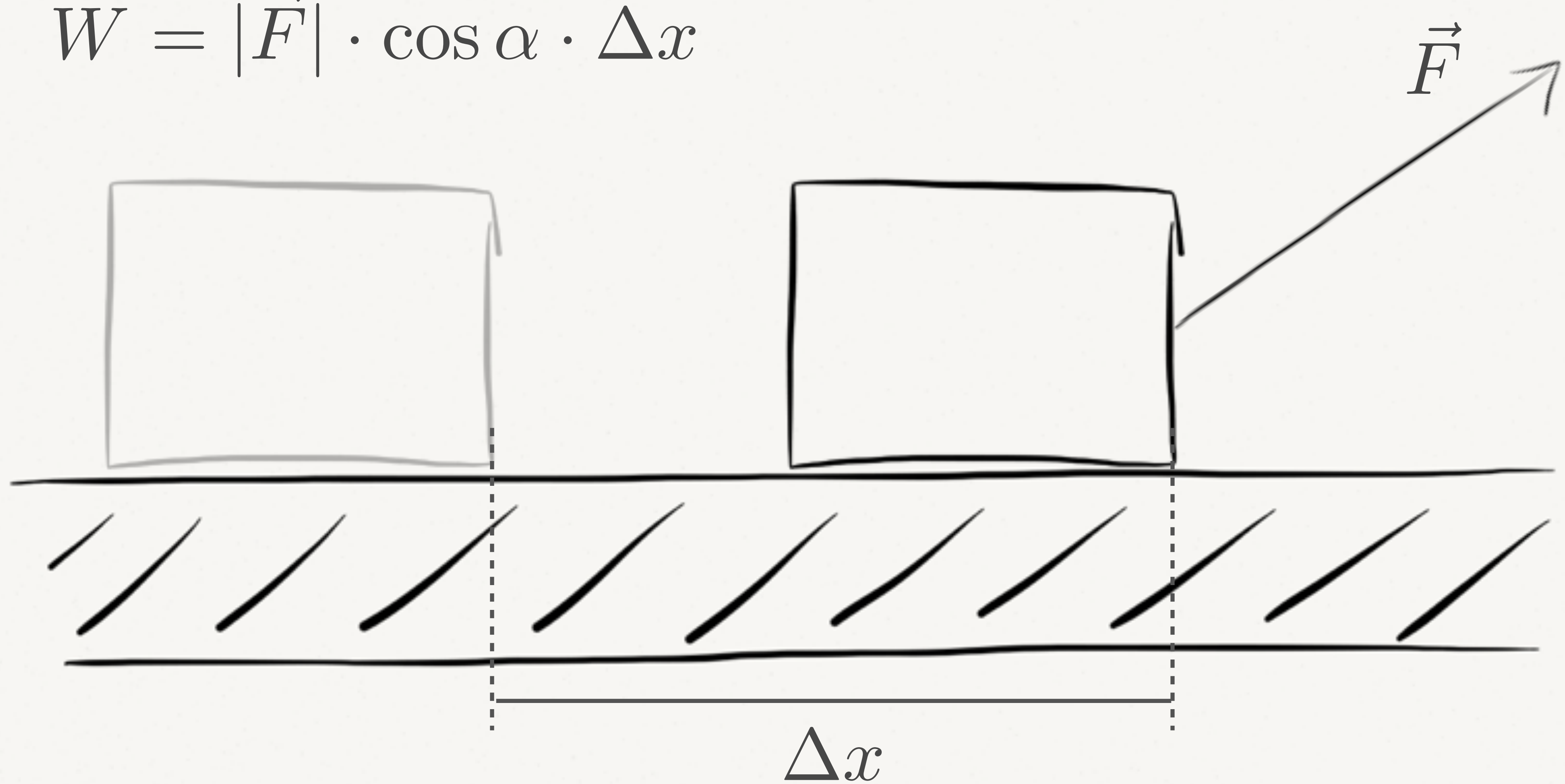
$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Konstante Kraft und grader Weg

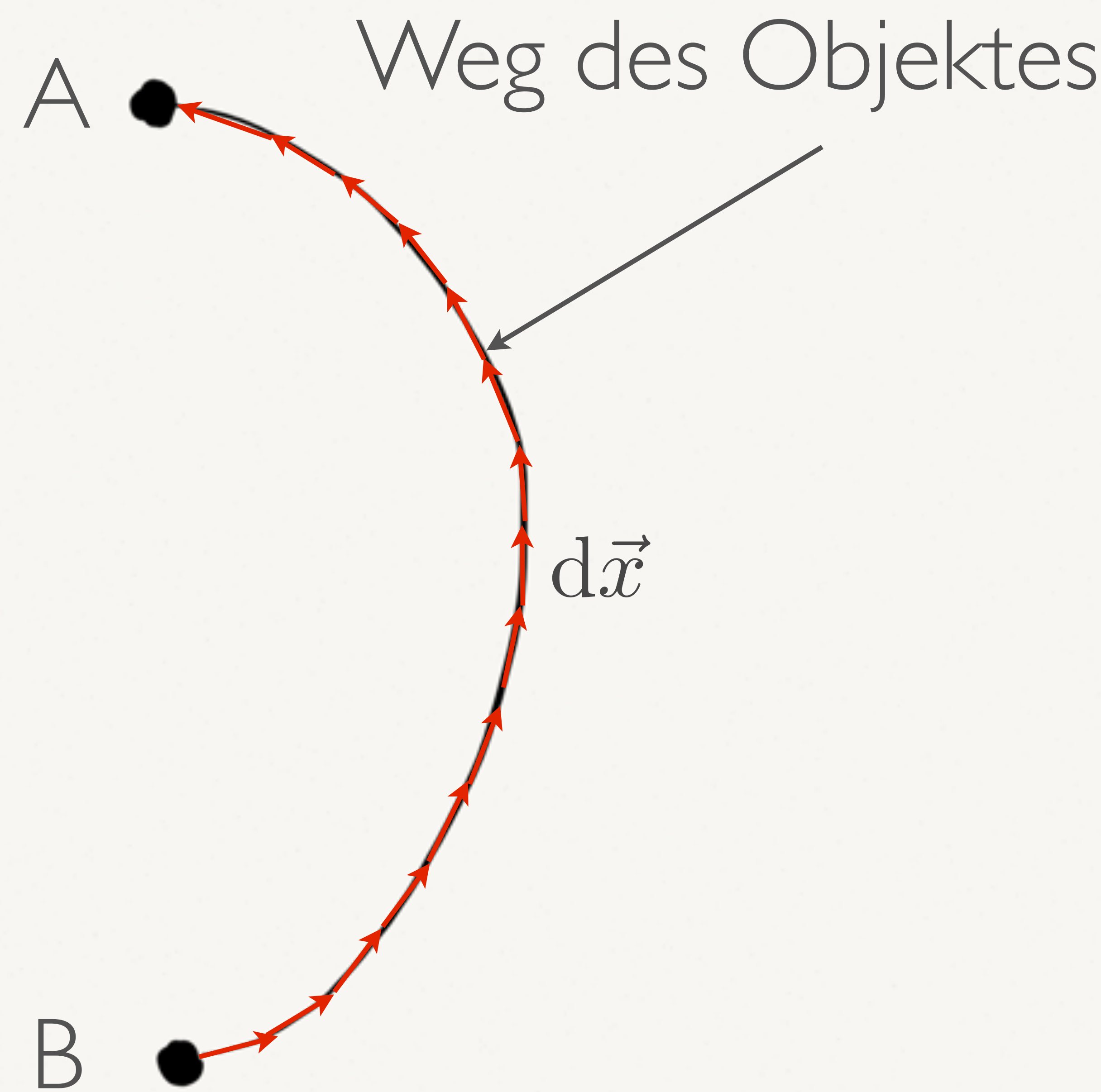


Konstante Kraft und grader Weg

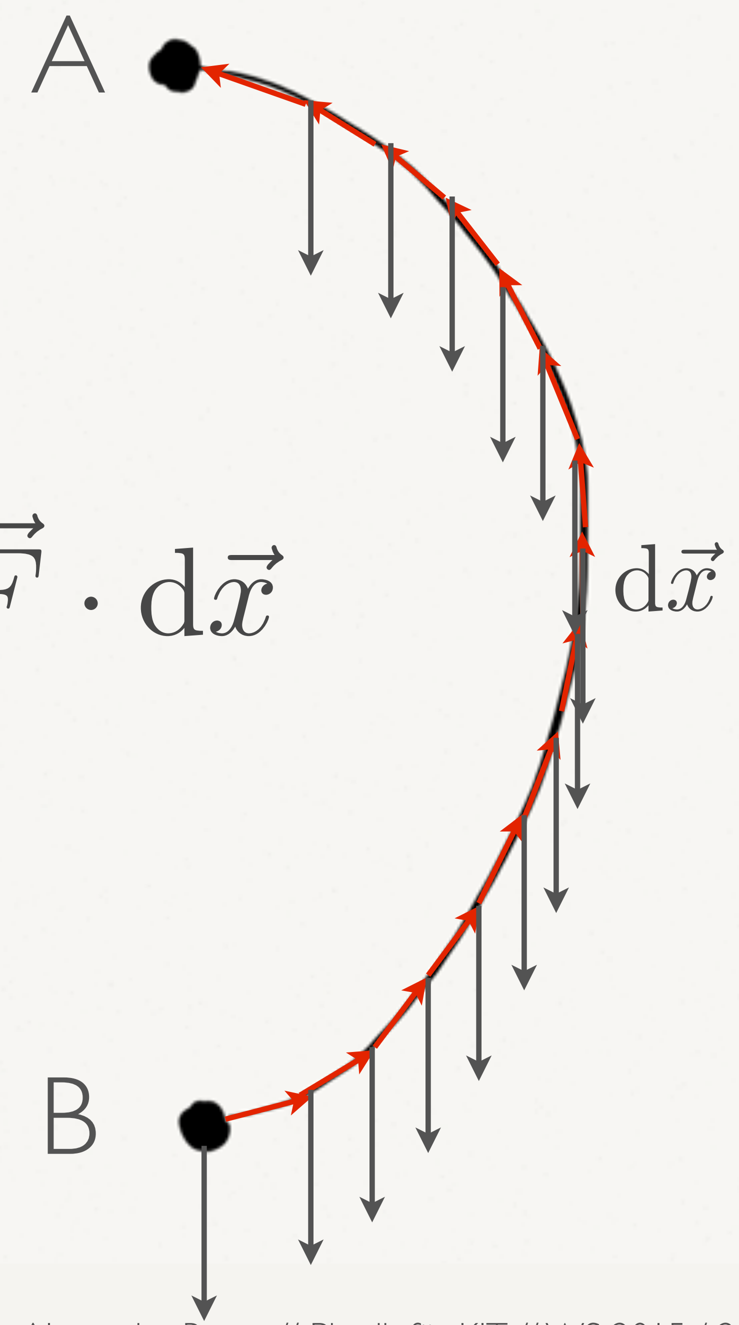
$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot \Delta x$$



Weg vektoriell



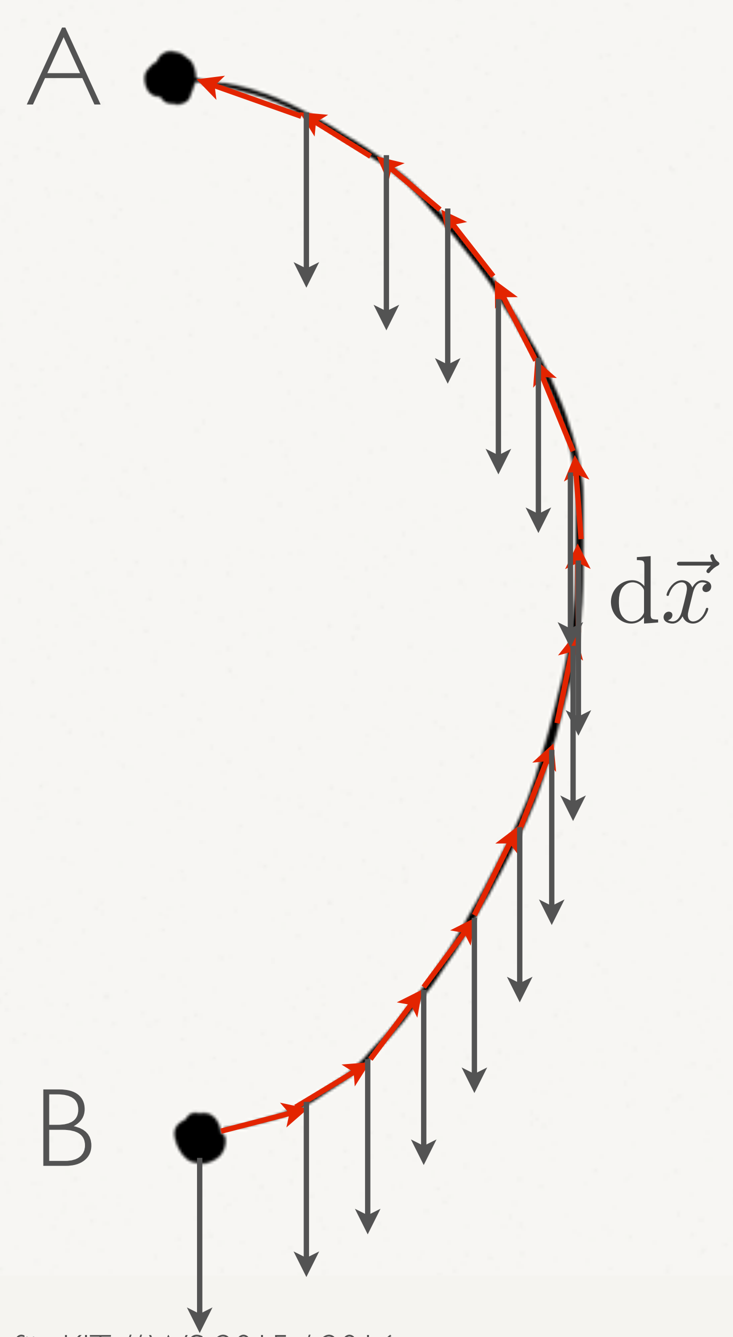
Weg vektoriell



$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Weg vektoriell

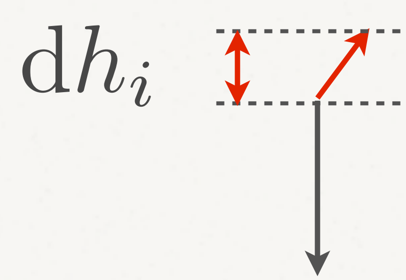
$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$



Weg vektoriell

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Das Skalarprodukt ist die Projektion von $\mathrm{d}x$ auf F



Weg vektoriell

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int \vec{e}_{\mathrm{y}} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

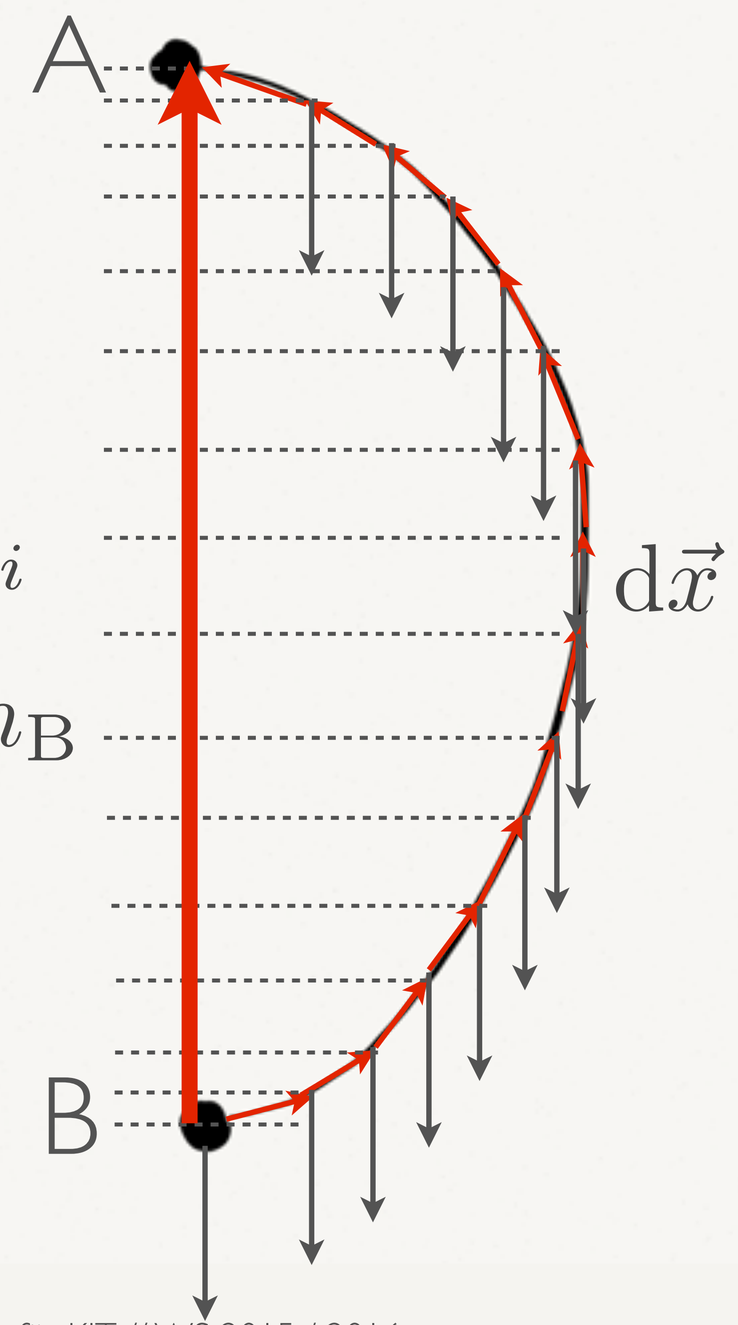
$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int \mathrm{d}h$$

$$= m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \sum \mathrm{d}h_i$$

$$= h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}$$



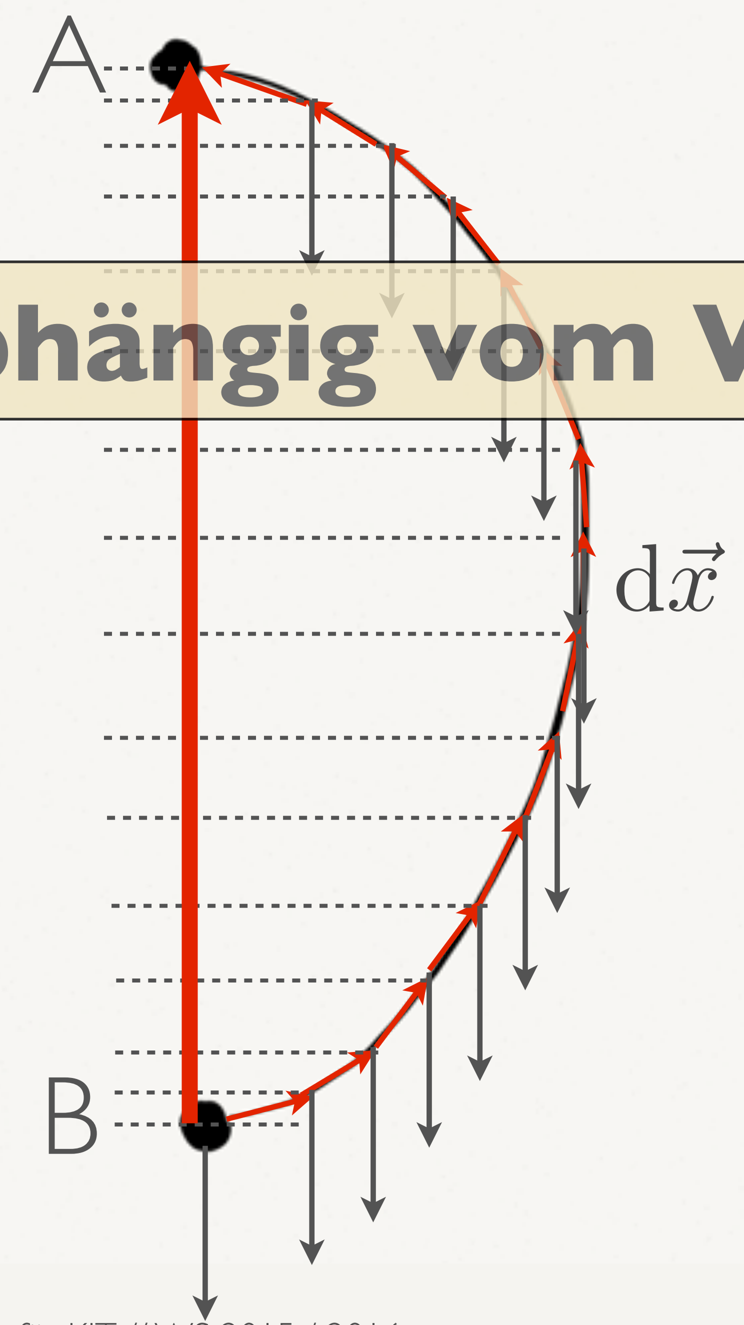
Weg vektoriell

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int \vec{e}_\mathrm{y} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

$$= m \cdot g \cdot \int \mathrm{d}h$$

$$= m \cdot g \cdot \Delta h$$



Die Arbeit ist unabhängig vom Weg!

Konservatives Kraftfeld

- Wenn die Arbeit gegen eine Kraft unabhängig vom Weg ist nennt man es eine ***konservative Kraft***.
- Die Gravitationskraft ist eine konservative Kraft.
- Die Coulomb-Kraft ist eine konservative Kraft
- Alle fundamentalen Kräfte (also noch schwache und starke Kernkraft) sind konservativ!

Arbeit und keine Arbeit

Kraft als Ableitung des Potentials

$$W = \int F \cdot \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W$$

$$W = m \cdot g \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad F = m \cdot g$$

Ableitung vektoriell?

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = ?? \quad W$$

Erst einmal veranschaulichen...

Ableitung vektoriell?

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla} W$$

$$\vec{\nabla}$$

Nabla

Nabla ist der Ableitungsoperator

Definition *Nabla*

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- $\frac{\partial}{\partial x}$ ist eine ***partielle Ableitung***.
- Es wird in Richtung x abgeleitet wie eine normale Ableitung.
- Es wird also die Steigung einer Funktion in x-Richtung ermittelt.
- Dabei werden y und z konstant gehalten, es spielt also nur die Differenz in der x-Komponente der Funktion eine Rolle.
- Entsprechend für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$.

Vektormultiplikation

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Skalar mal Vektor	Produkt mit einem Skalar	$\vec{a}' = c \cdot \vec{a}$	Vektor
Vektor mal Vektor	Skalarprodukt (inneres Produkt)	$s = \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalar
Vektor mal Vektor	Kreuzprodukt (äußeres Produkt) (Vektorprodukt)	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	Vektor

Vektorielle Ableitungen

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Nabla mal skalare Funktion	Gradient	$\vec{\nabla} f$	Vektor
Nabla mal Vektorfeld	Divergenz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$	Skalar
Nabla kreuz Vektorfeld	Rotation	$\vec{\nabla} \times \vec{E}$	Vektor

Definition *Gradient*

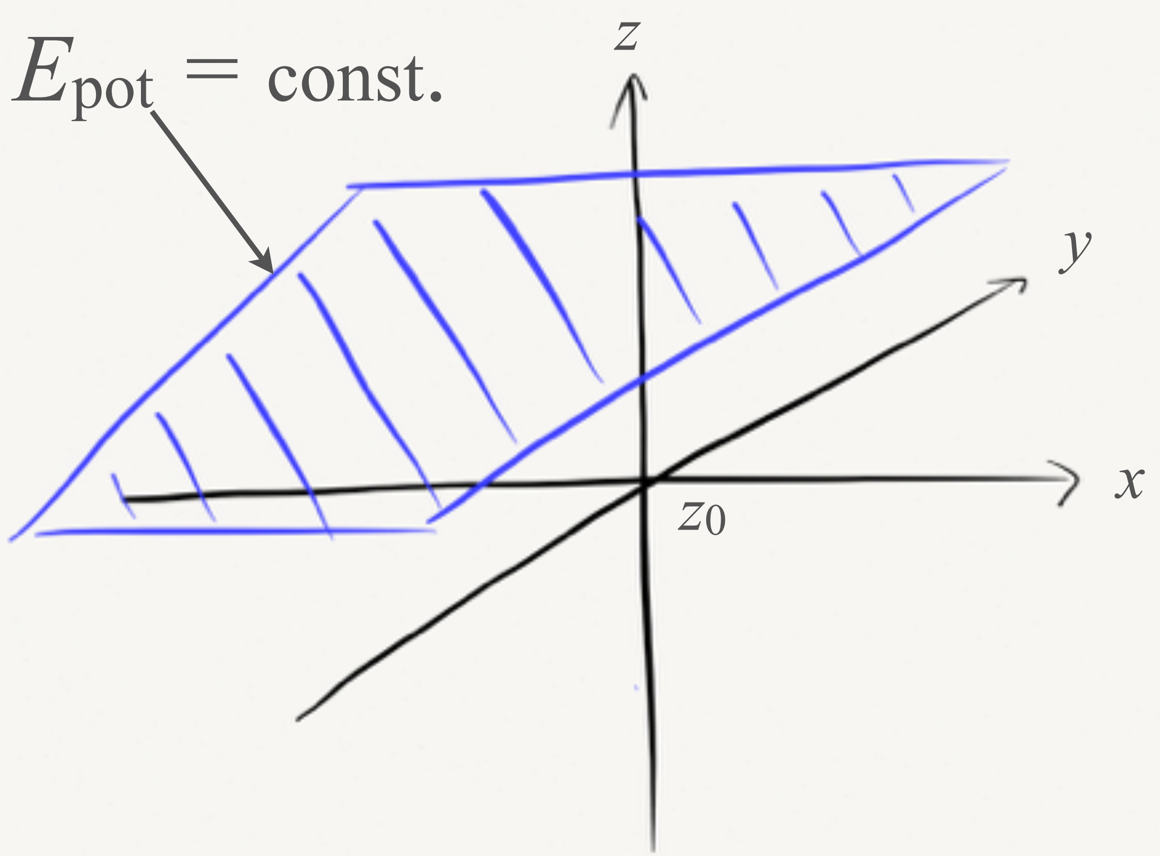
$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,y,z)$$
$$= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)$$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ ist eine Zahl, deren Größe die Änderung von f in Richtung x wiedergibt.
- Diese Zahl multipliziert mit dem Einheitsvektor in x-Richtung zeigt an, wie groß die Änderung in genau diese Richtung ist.
- Entsprechend für $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)$ und $\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)$.
- Zusammen: die Summe der drei Vektoren ist der Gradient.
- Der Gradient ist ein Vektor, der in Richtung der stärksten Änderung zeigt.

Potentielle Energie als skalare Funktion

$$\vec{F} = mg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{pot}} = mg \cdot (z - z_0)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} E_{\text{pot}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_{\text{pot}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\text{pot}} = mg$$

$$\boxed{\vec{\nabla} E_{\text{pot}}} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{= \vec{F}}$$

Gradient eines Potentials

Der Gradient eines Potentials ist eine Kraft!

$$-\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}$$

Ruhelage

- Die Kraft zeigt immer entlang des Gradienten des Potentials.
- Die Beschleunigung ist immer in Richtung Potential-Minimum.
- Die Ruhelage ist in einem Minimum, wo der Gradient Null ist.