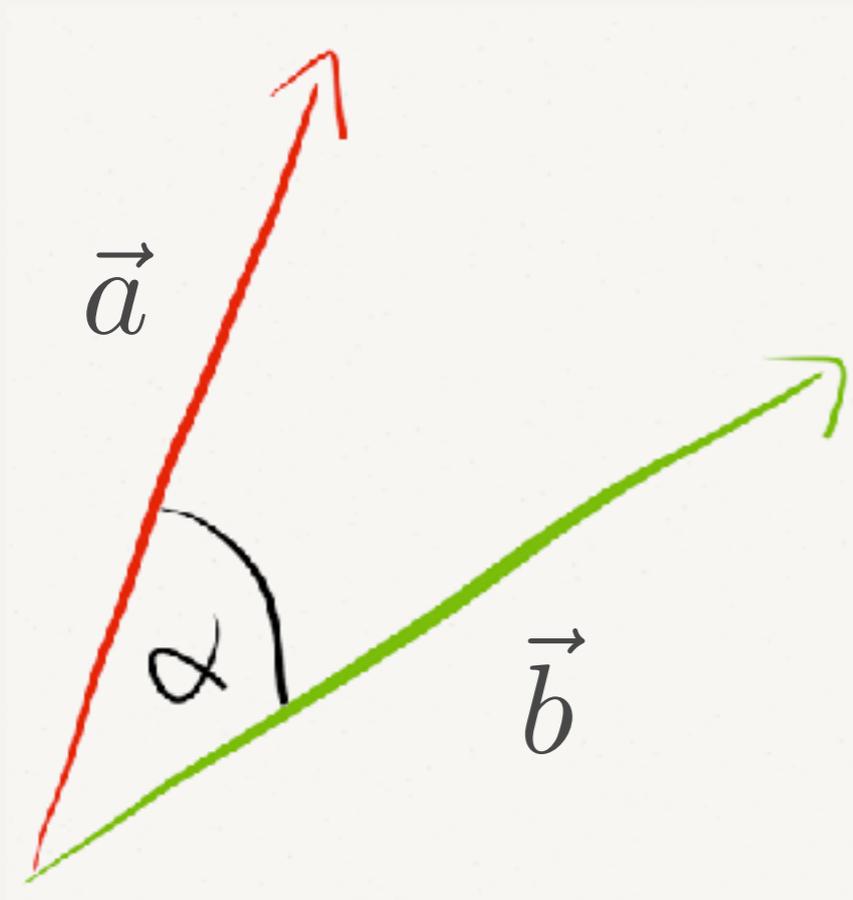


Skalarprodukt

Vektormultiplikation

Typ	Name	Schreibweise	Resultat
Skalar mal Vektor	Produkt mit einem Skalar	$\vec{a}' = c \cdot \vec{a}$	Vektor
Vektor mal Vektor	Skalarprodukt (inneres Produkt)	$s = \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalar
Vektor mal Vektor	Kreuzprodukt (äußeres Produkt) (Vektorprodukt)	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	Vektor

Skalarprodukt

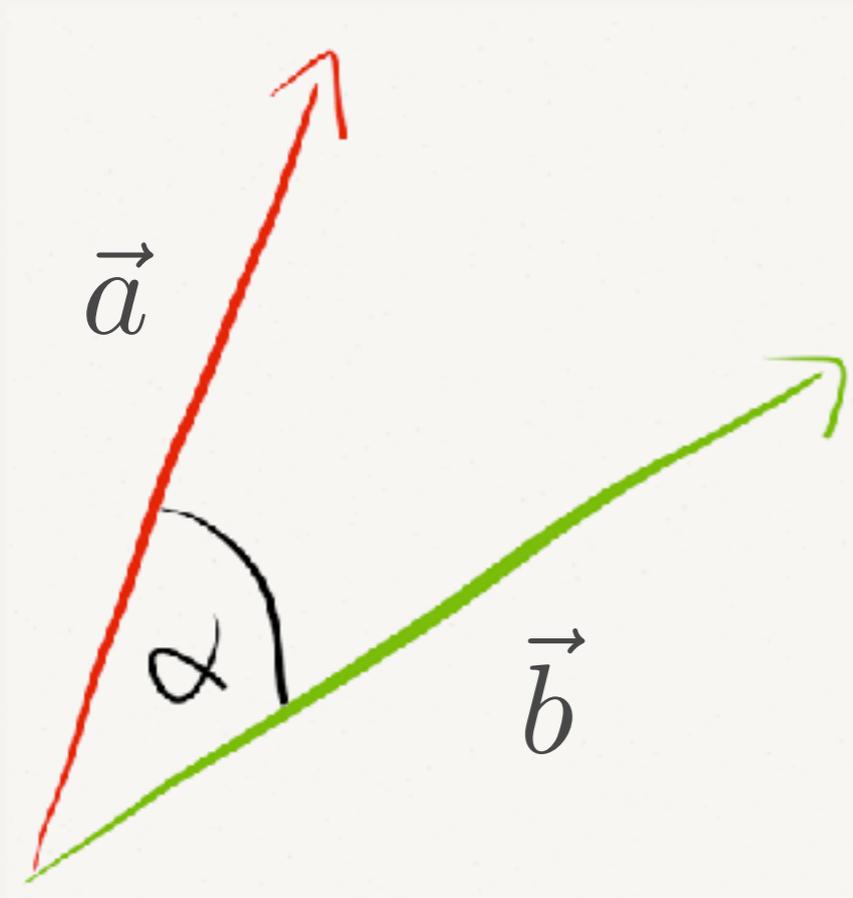


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Skalarprodukt Zahlenbeispiel

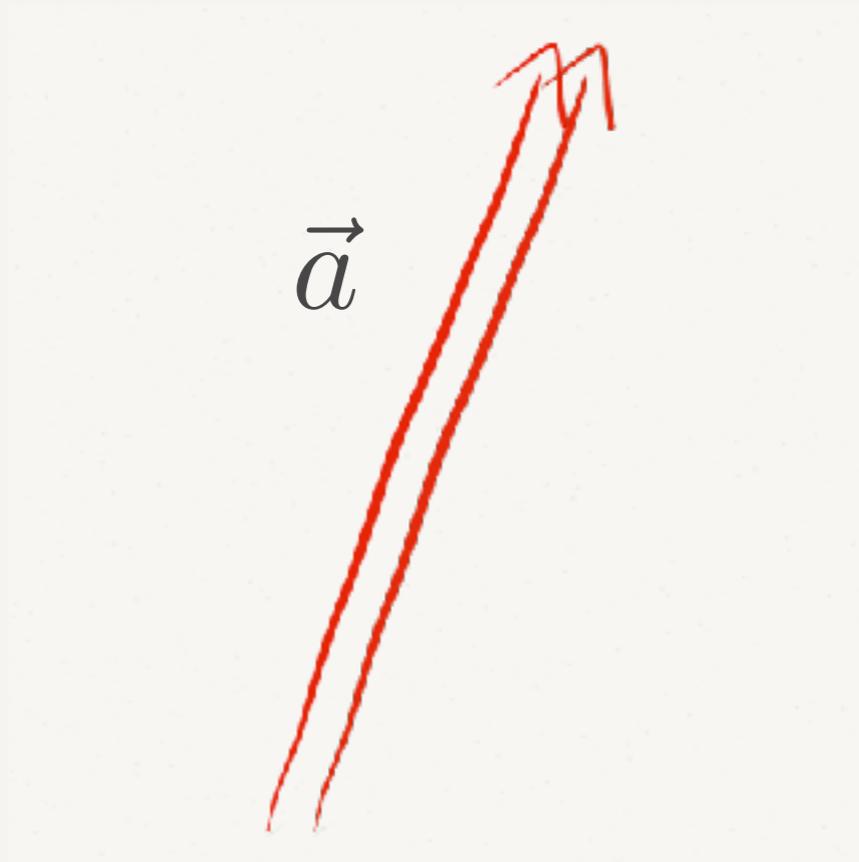


$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

Skalarprodukt

Betragsquadrat

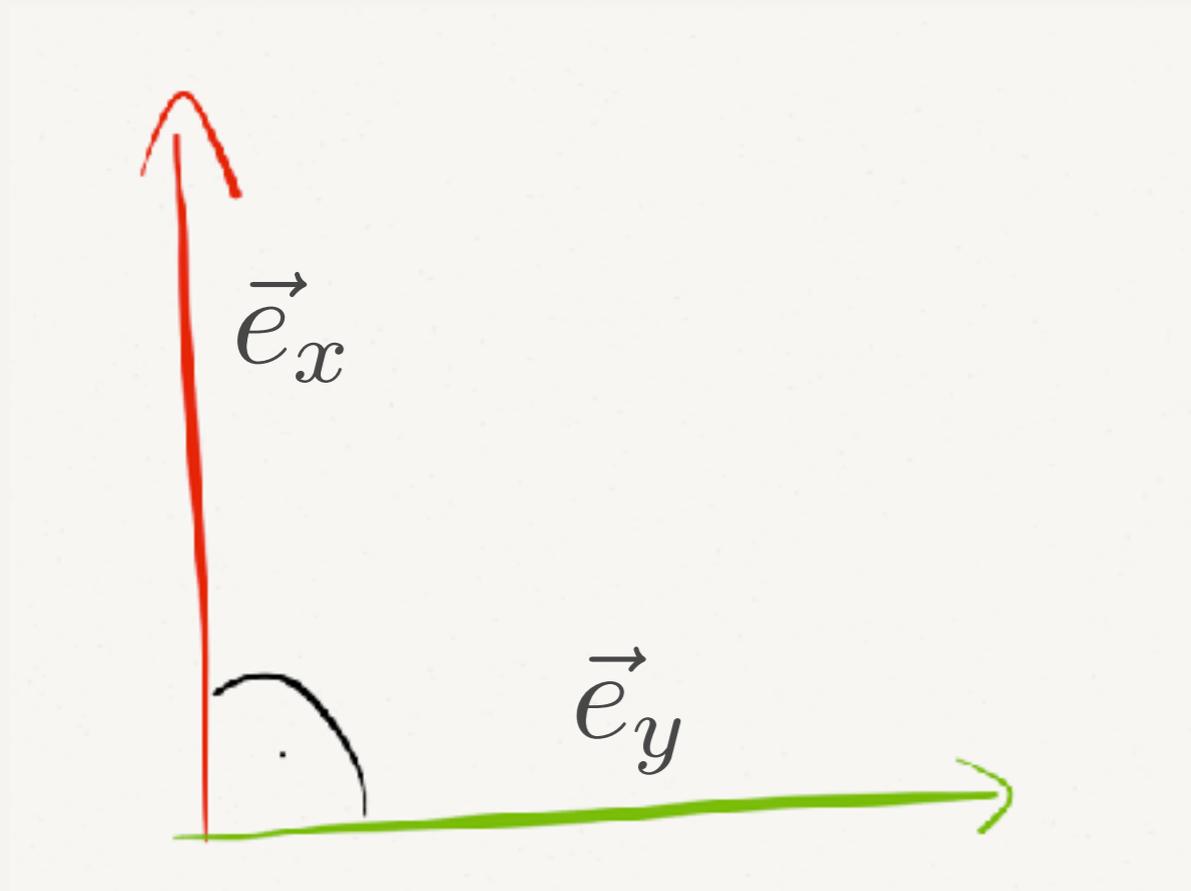


$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \\ &= a_x^2 + a_y^2 \\ &= |\vec{a}|^2\end{aligned}$$

Skalarprodukt

Orthogonale Vektoren



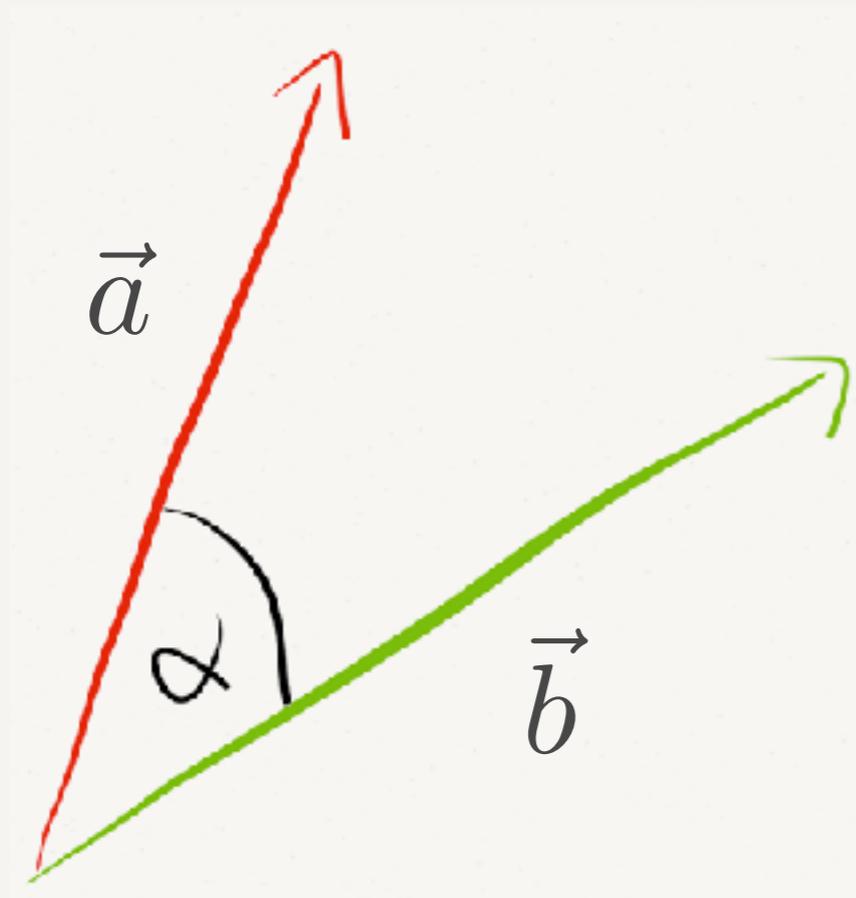
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \\ = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ = 0$$

Skalarprodukt

Zahlenbeispiel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{200} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

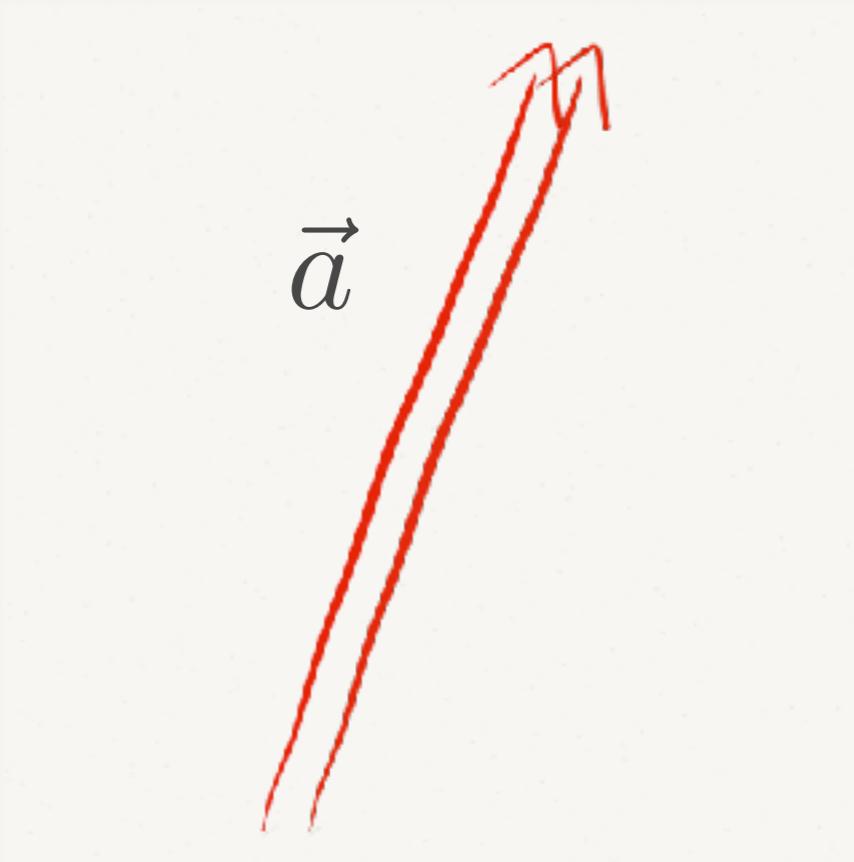
Skalarprodukt

Betragsquadrat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

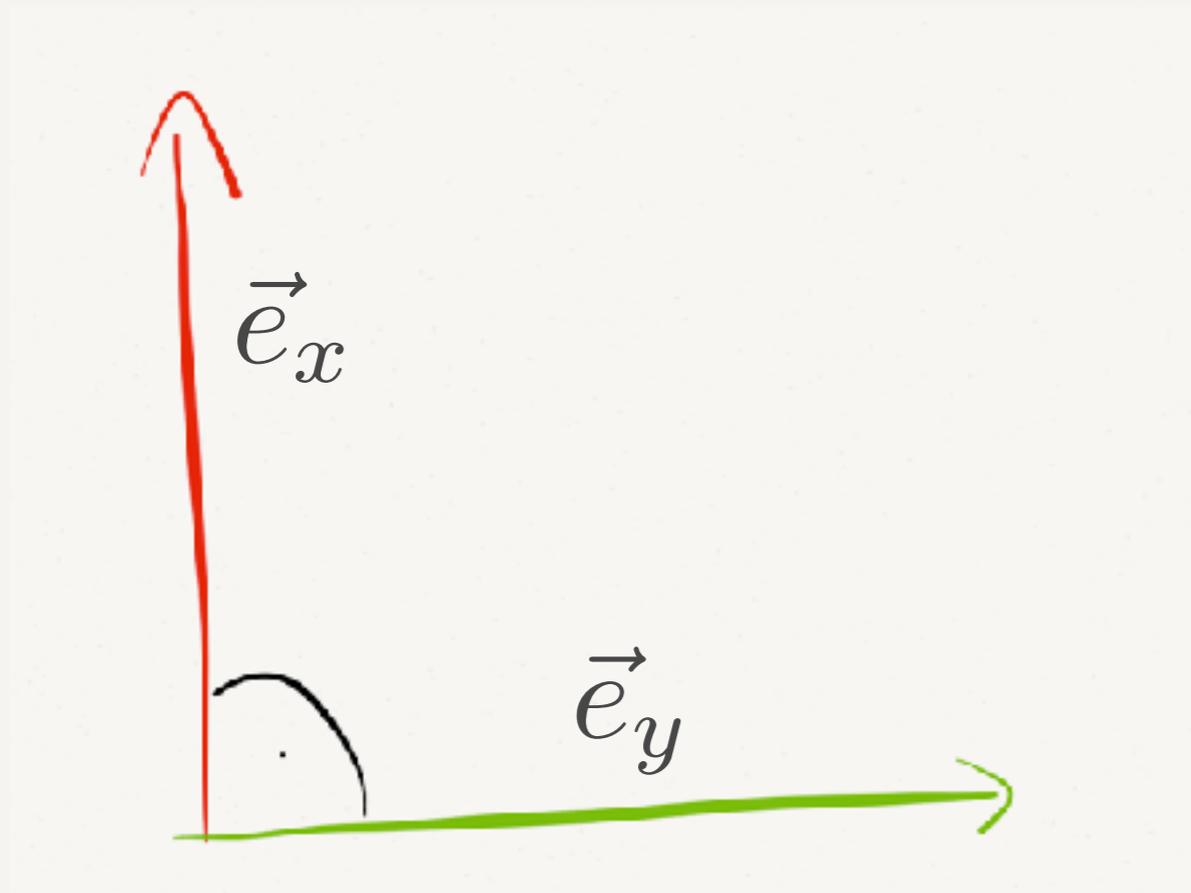
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \\ &= a_x^2 + a_y^2 \\ &= |\vec{a}|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ \\ &= |\vec{a}|^2\end{aligned}$$



Skalarprodukt

Orthogonale Vektoren



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

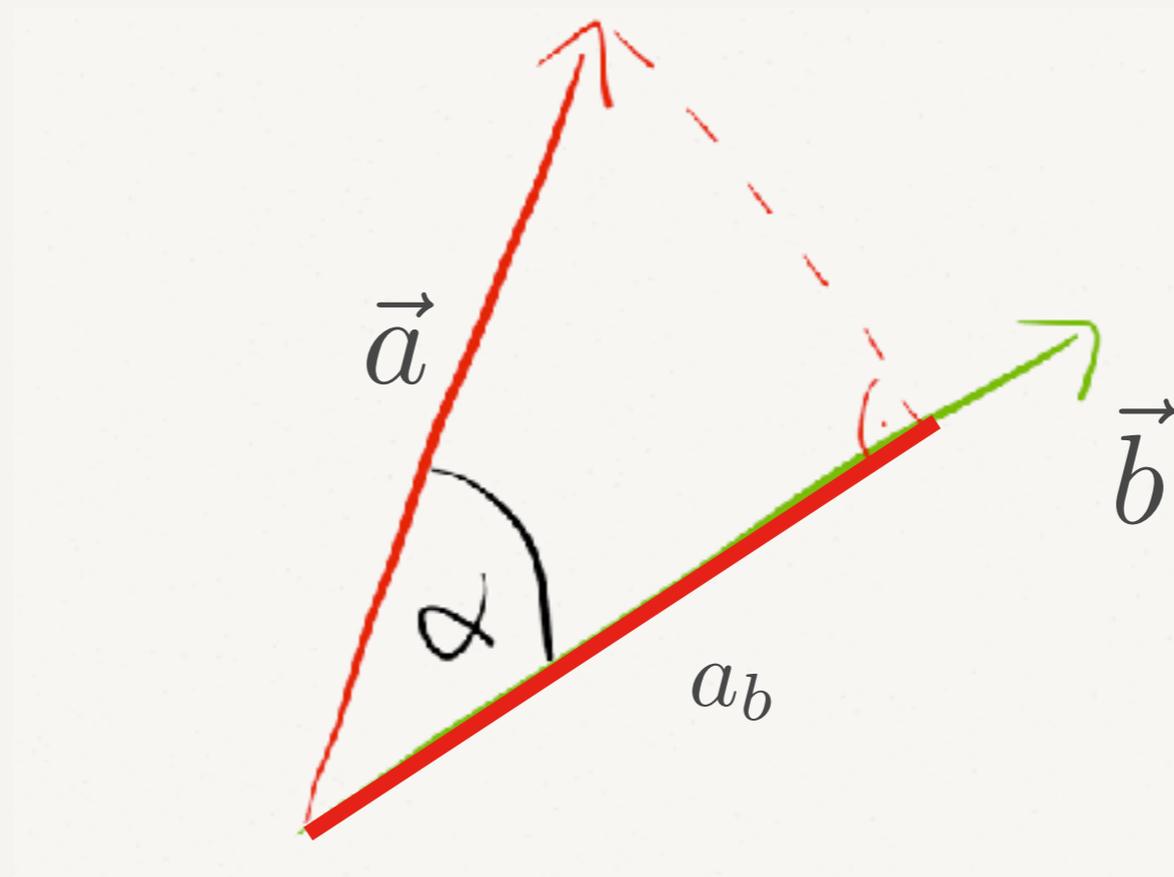
$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

Skalarprodukt als Projektion

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} a_b &= |\vec{a}| \cdot \cos \alpha \\ &= |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{e}_b \end{aligned}$$



Skalarprodukt als Projektion

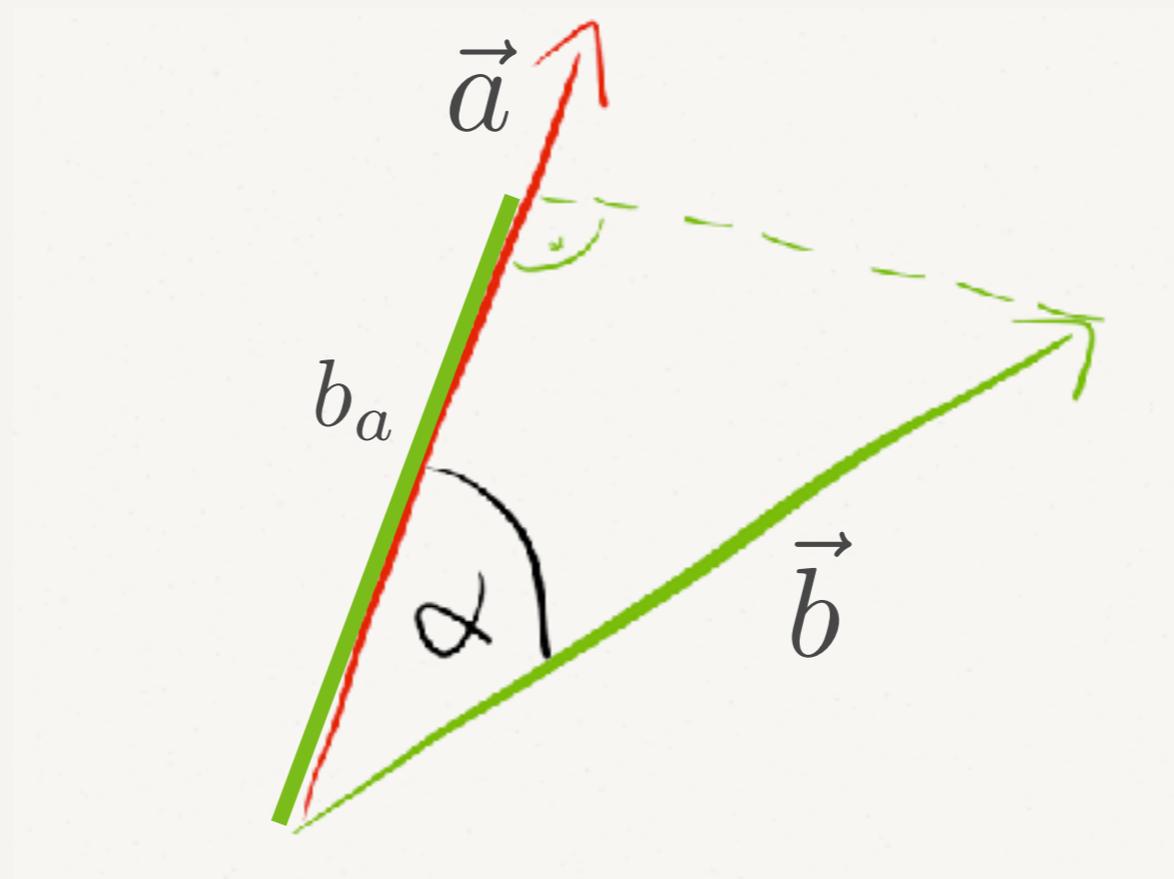
+

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$b_a = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

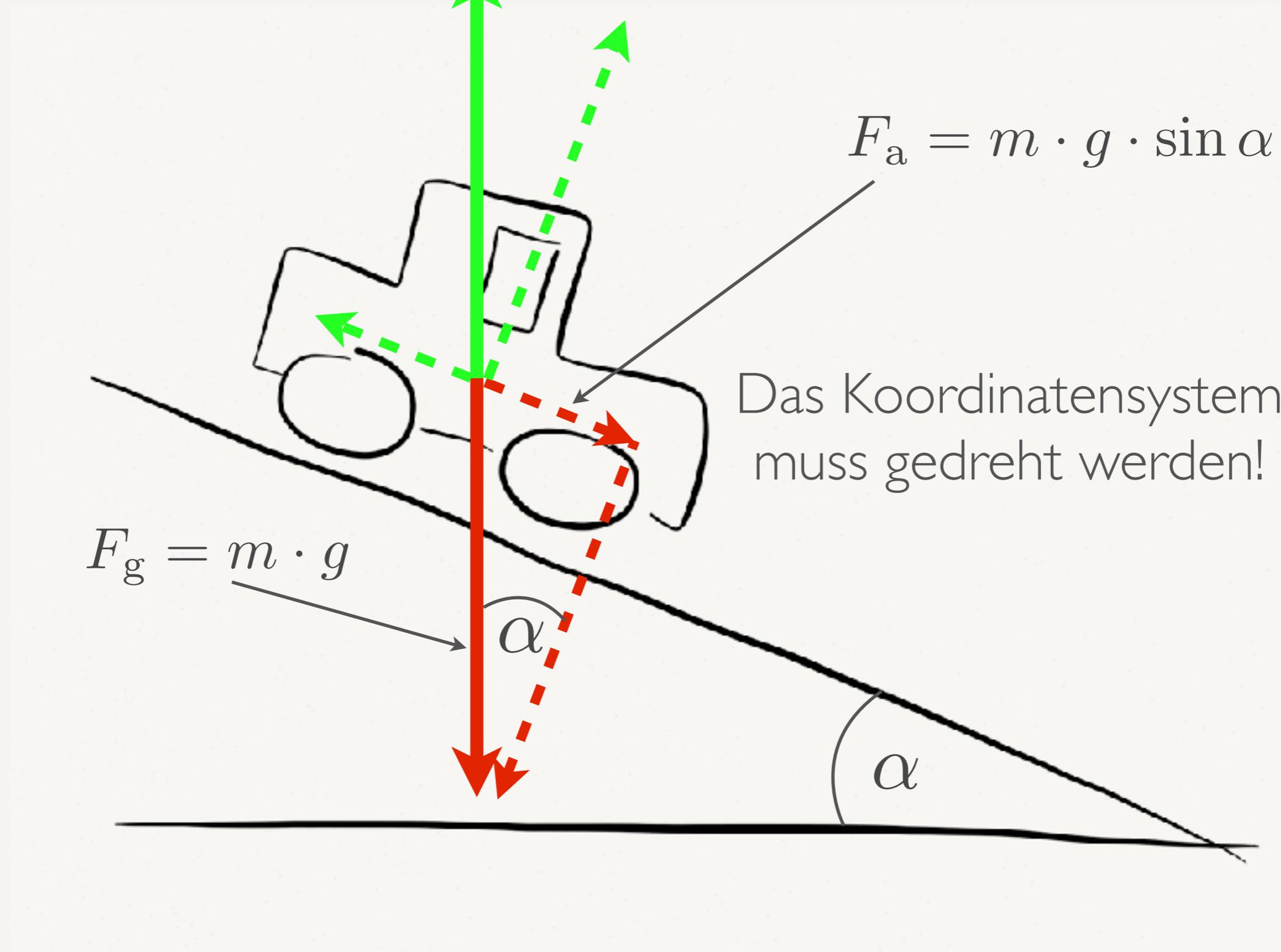
$$= |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{e}_a$$

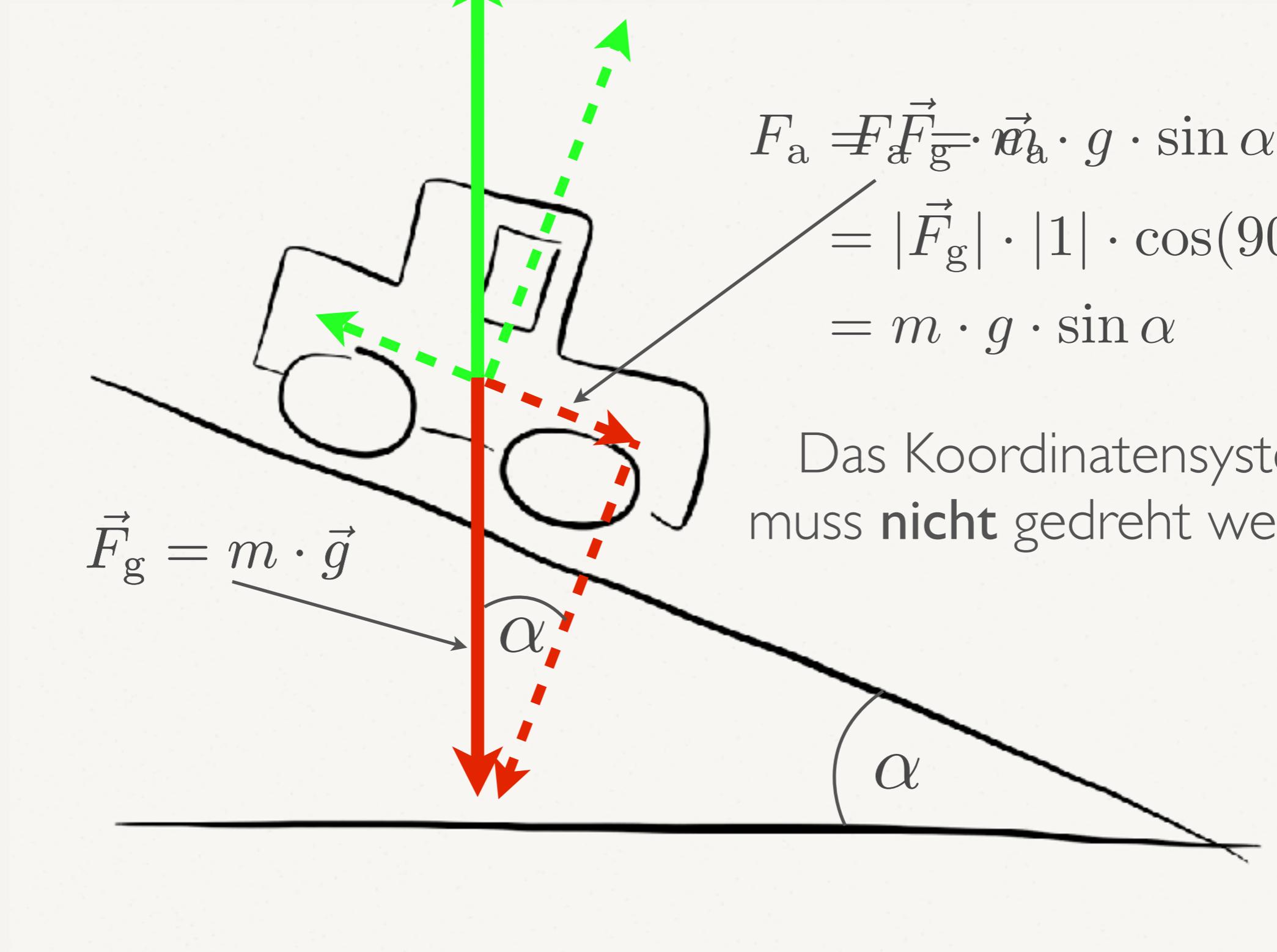


Schiefe Ebene

Schiefe Ebene



Schiefe Ebene



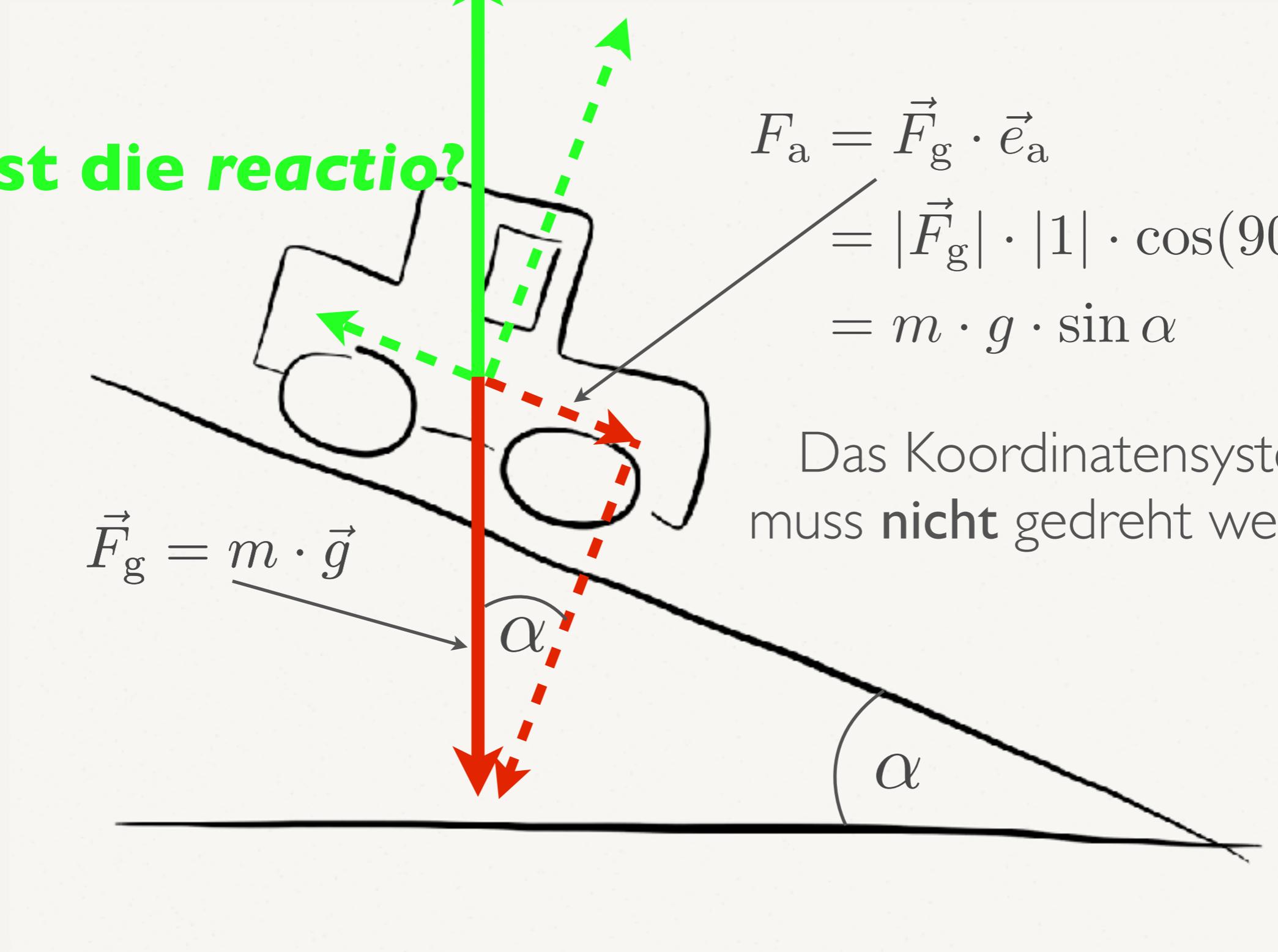
$$\begin{aligned} F_a &= \vec{F}_{\text{a}} \cdot \vec{F}_{\text{g}} = |\vec{F}_{\text{a}}| \cdot |\vec{F}_{\text{g}}| \cdot \cos(\theta) \\ &= |\vec{F}_{\text{g}}| \cdot |1| \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= m \cdot g \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Das Koordinatensystem muss **nicht** gedreht werden!

$$\vec{F}_{\text{g}} = m \cdot \vec{g}$$

Schiefe Ebene

Wo ist die *reactio*?



$$\begin{aligned} F_a &= \vec{F}_{\text{gg}} \cdot \vec{e}_a \\ &= |\vec{F}_{\text{gg}}| \cdot |1| \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= m \cdot g \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Das Koordinatensystem muss **nicht** gedreht werden!

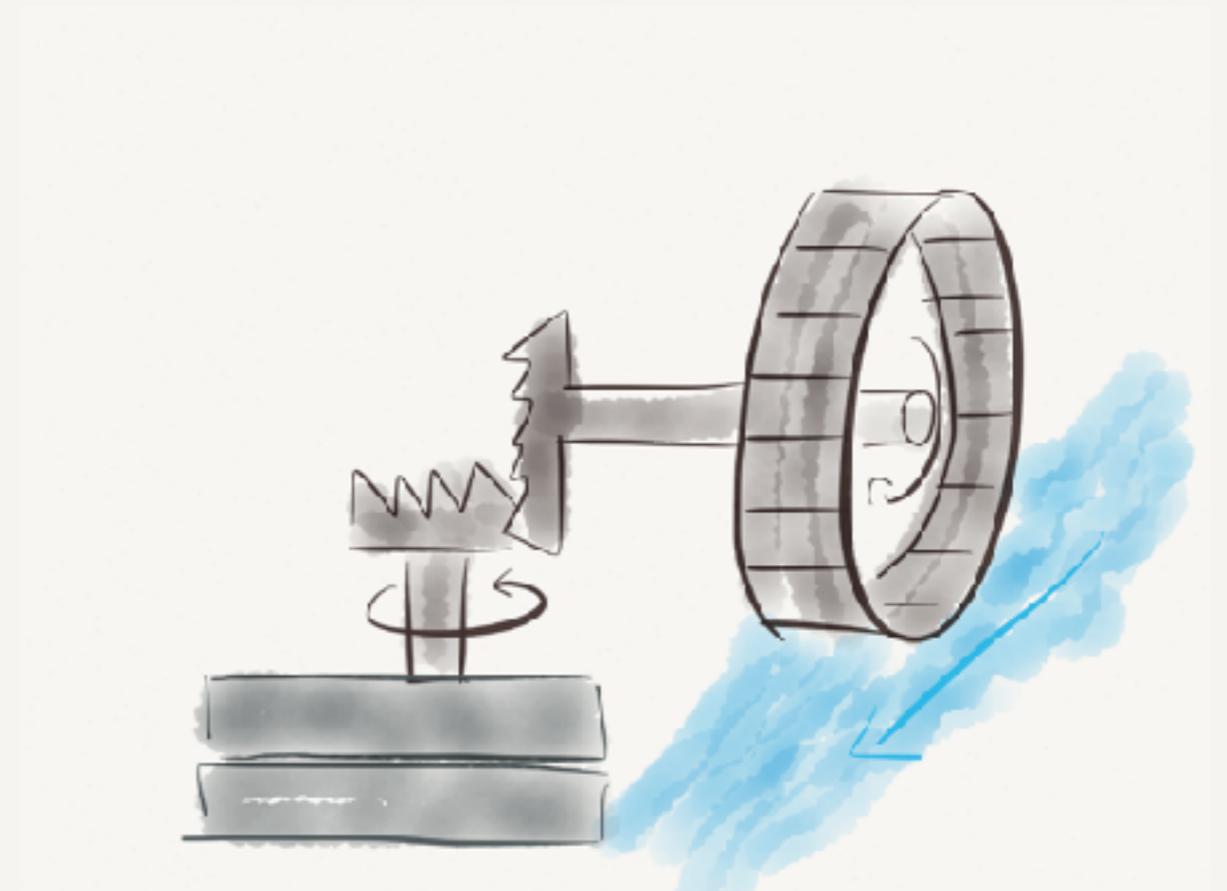
$$\vec{F}_{\text{gg}} = m \cdot \vec{g}$$

Energie

Energie

*Fähigkeit eines Systems,
Arbeit zu verrichten*

- $\epsilon\nu$ - Innen
- $\epsilon\rho\gamma o\nu$ - Wirken
- Viele Energieformen: potentielle, kinetische, chemische, elektrische, thermische, ...
- Energie kann umgewandelt werden.
- Energie kann übertragen werden.
- Energie kann gespeichert werden.



Energie

Energie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden!

Energie ist eine *Erhaltungsgröße*!

Die Menge an Energie im Universum ist konstant
(und schon immer gewesen).

Energieformen

Chemische Energie

Quelle: Wikipedia



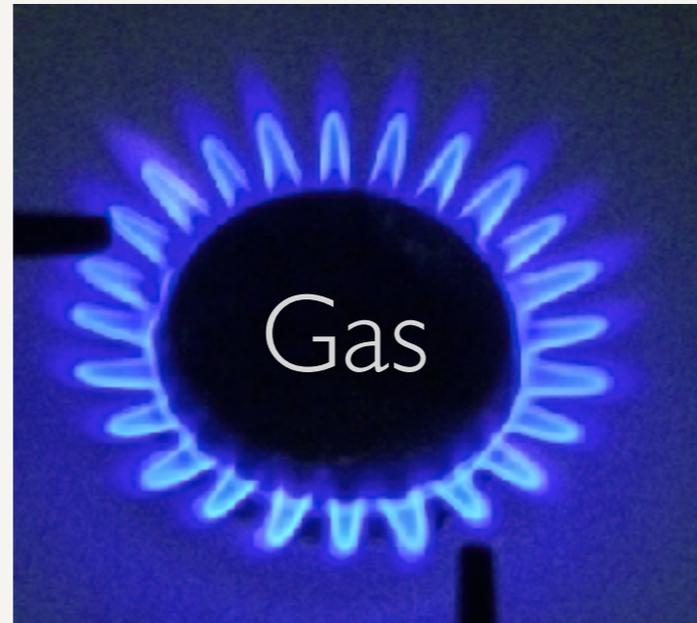
- Energie, die in einer chemischen Verbindung gespeichert ist.
- Kann durch chemische Reaktionen aufgenommen (endotherm) oder abgegeben werden (exotherm).
- Beispiel: Verbrennung mit einem Heizwert.

http://de.wikipedia.org/wiki/Chemische_Energie



Energieformen

Verbrennung



Energieformen

Elektrische Energie

Quelle: Wikipedia



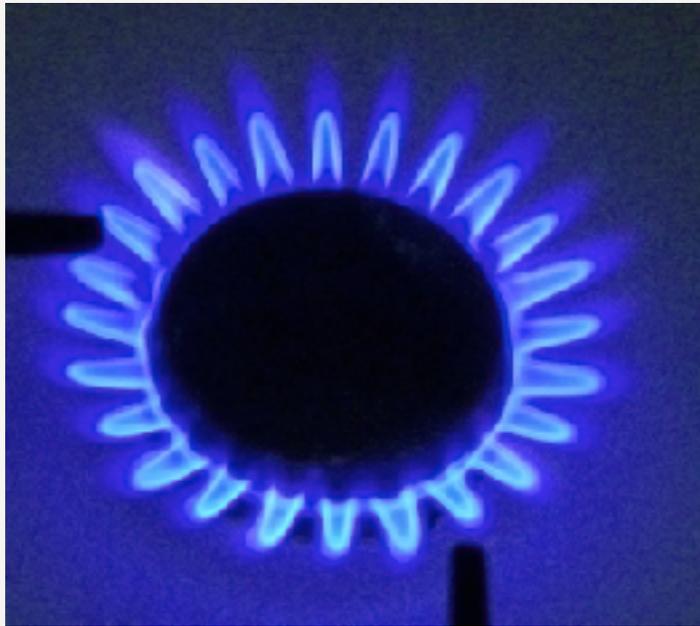
- Spannung =
Potentialenergie im
Coulomb-Potential



http://www.teslamotors.com/de_DE/models/features#/performance

Energieformen

Wärme



- Wärme ist ungeordnete Bewegung von Atomen oder Molekülen.



Energie

- In dieser Vorlesung konzentrieren wir uns auf drei Energieformen:

1. Arbeit

2. Potentielle Energie

- Gravitationspotential
- Coulombpotential
- Elastisches Potential

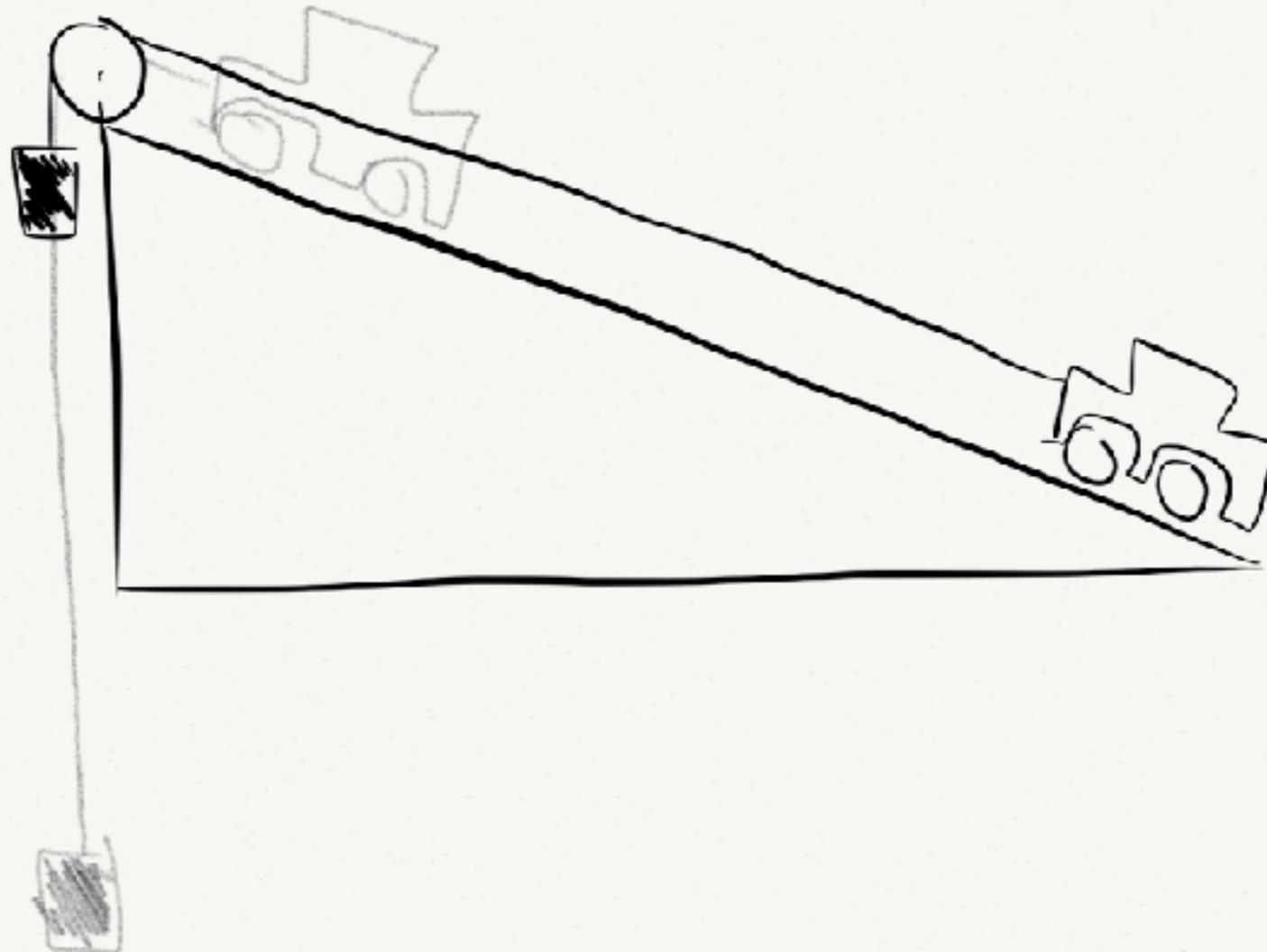
3. Kinetische Energie

Mechanische Energie

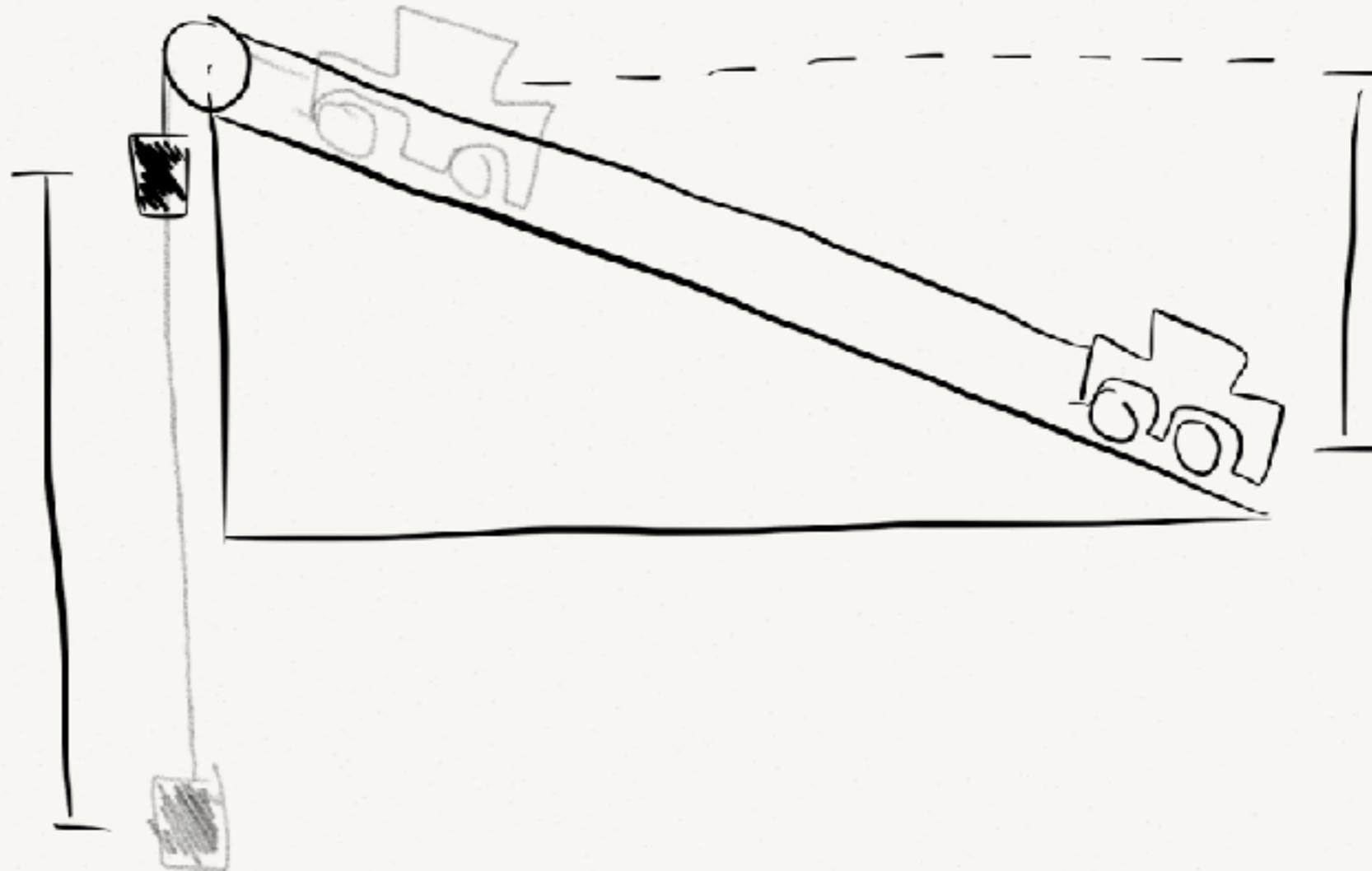
Mechanische Energie - Arbeit



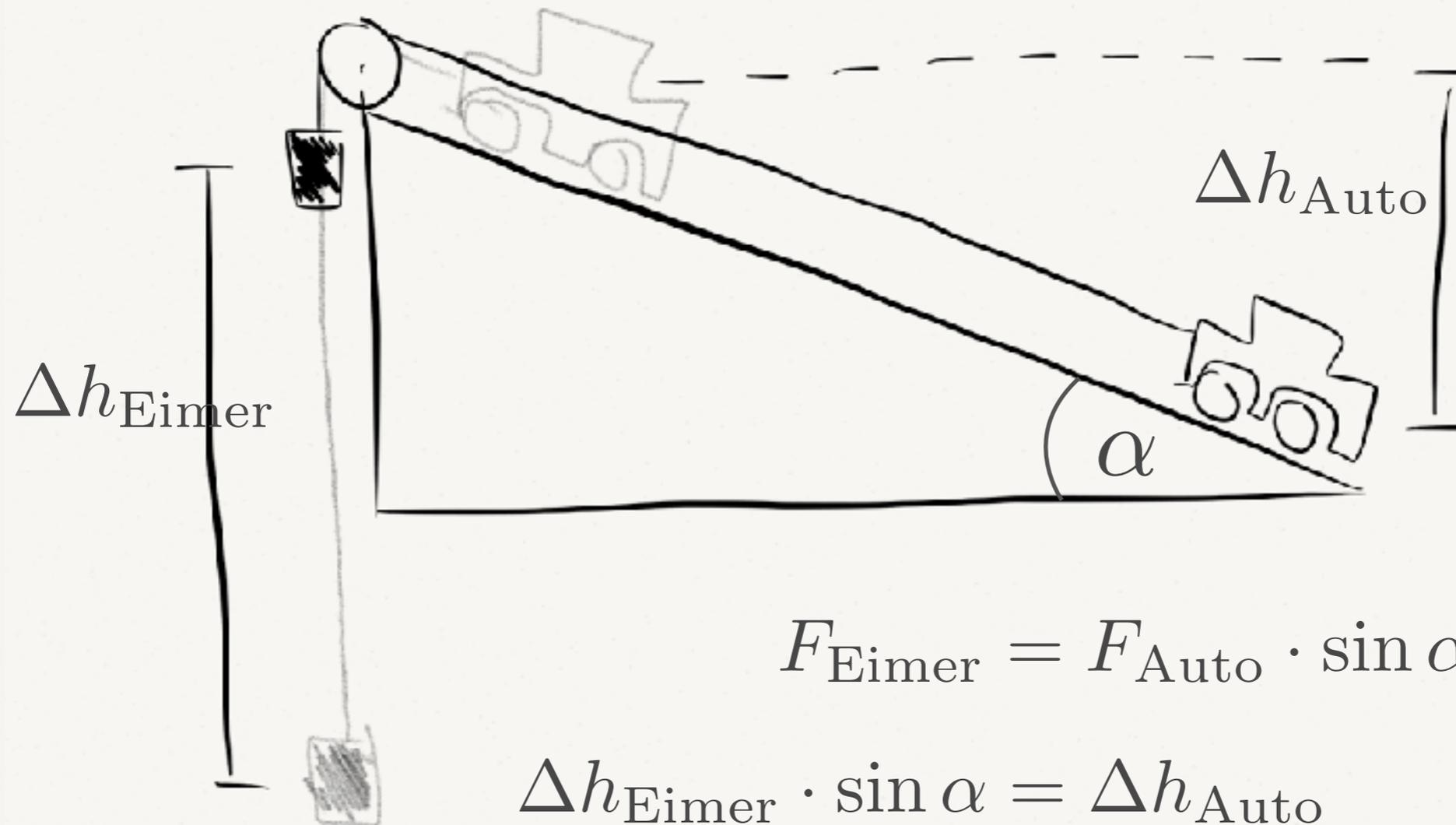
Mechanische Energie - Arbeit



Mechanische Energie - Arbeit



Mechanische Energie - Arbeit



Mechanische Energie - Arbeit

Arbeit ist Kraft mal Weg

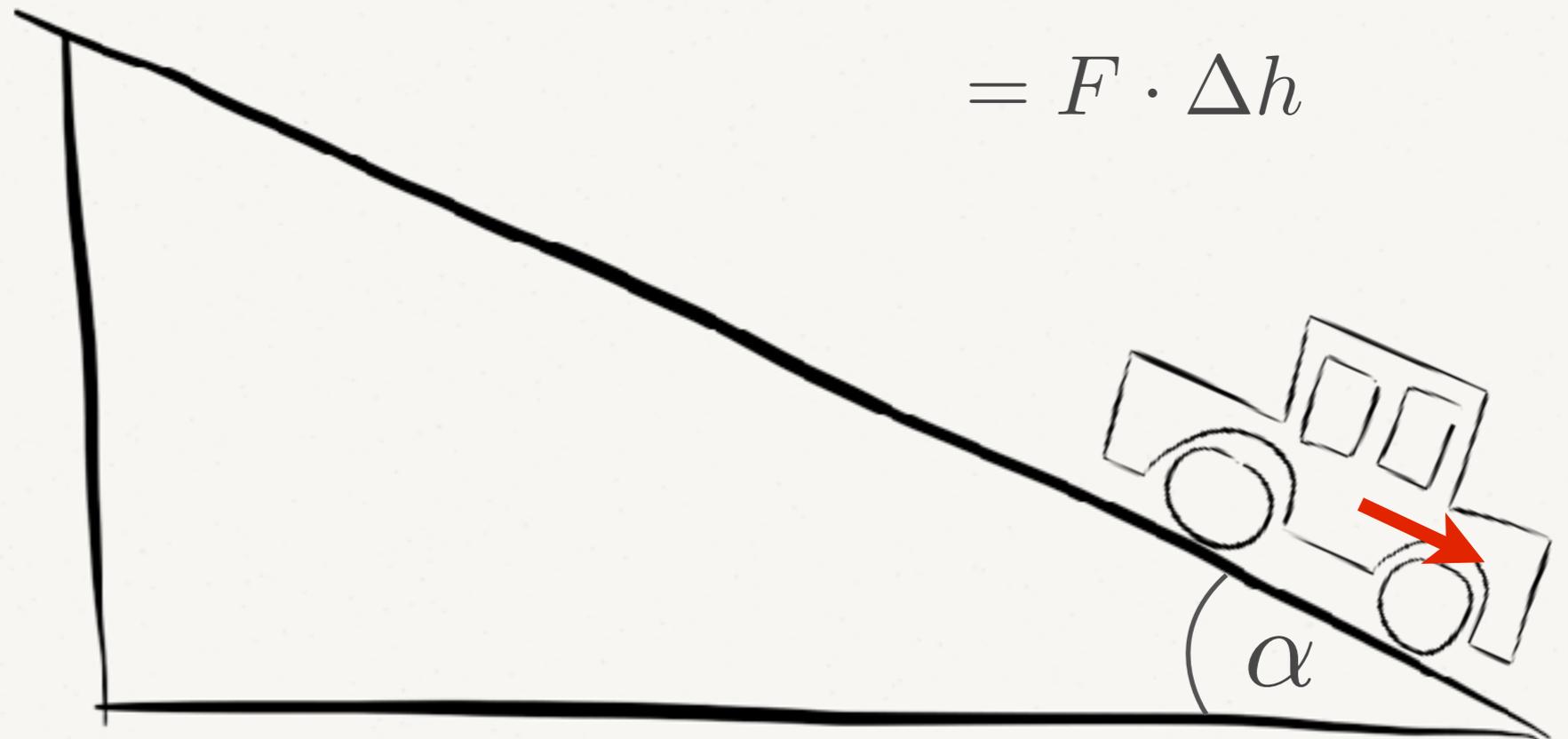
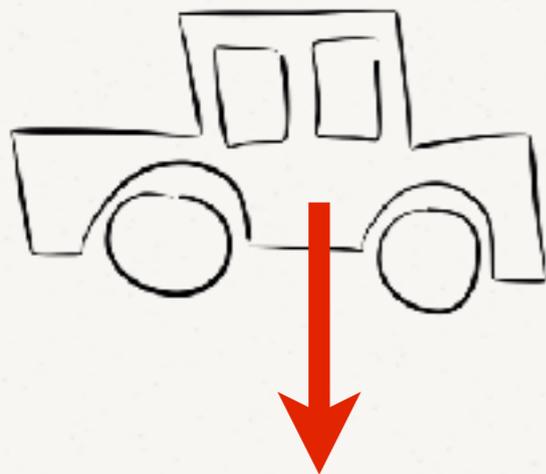
$$W = F \cdot x$$

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Es kommt nur auf den Höhenunterschied
an, nicht auf den Weg!

$$W = F \cdot \sin \alpha \cdot s$$
$$= F \cdot \Delta h$$

$$W = F \cdot \Delta h$$

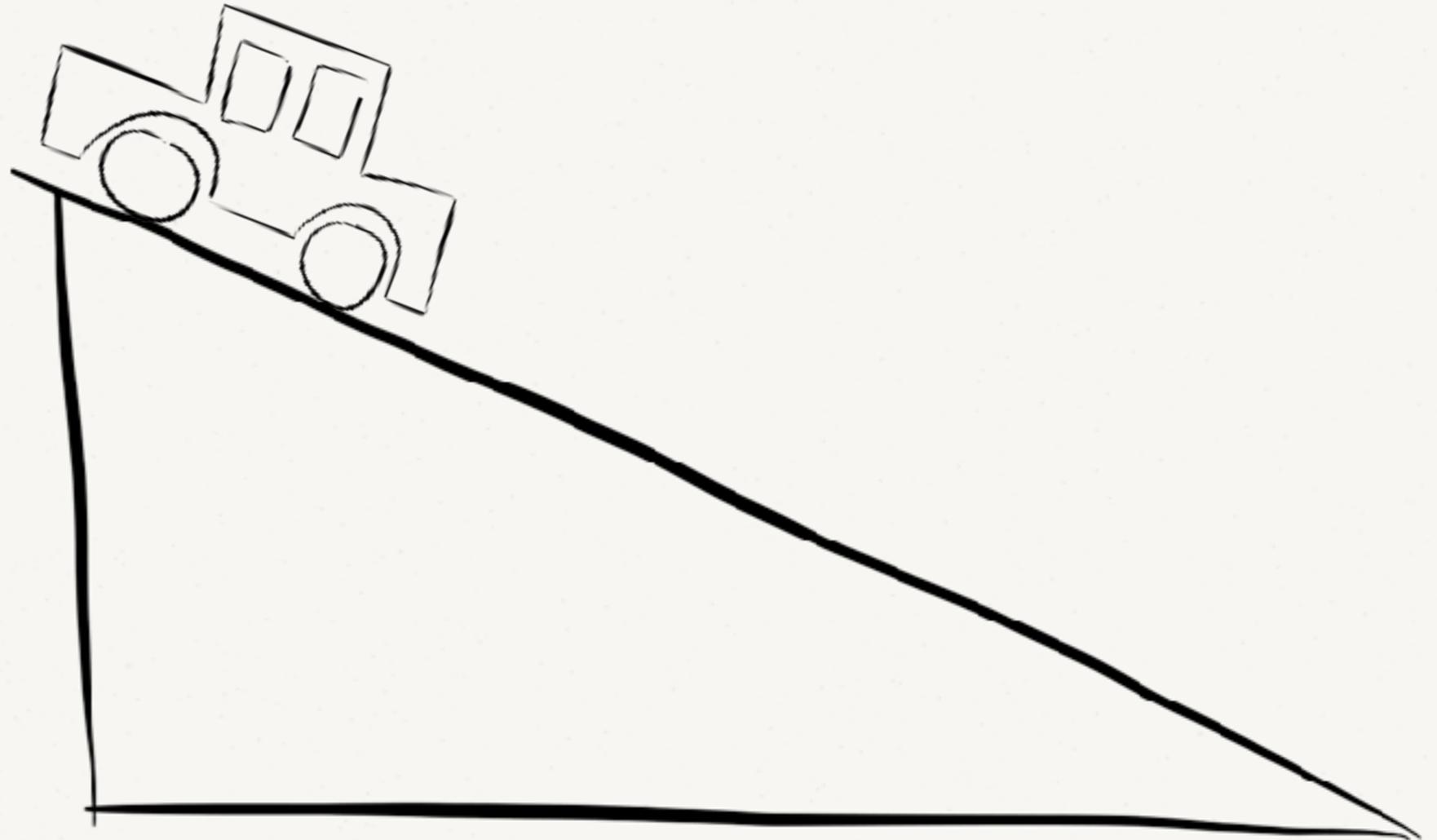


Potentielle Energie im Gravitationsfeld

- Die Arbeit W wurde aufgebracht um das Auto hochzuheben.
- Diese Arbeit ist als **potentielle Energie** im Auto gespeichert.
- Die potentielle Energie im Gravitationsfeld hängt nur vom Höhenunterschied ab!

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

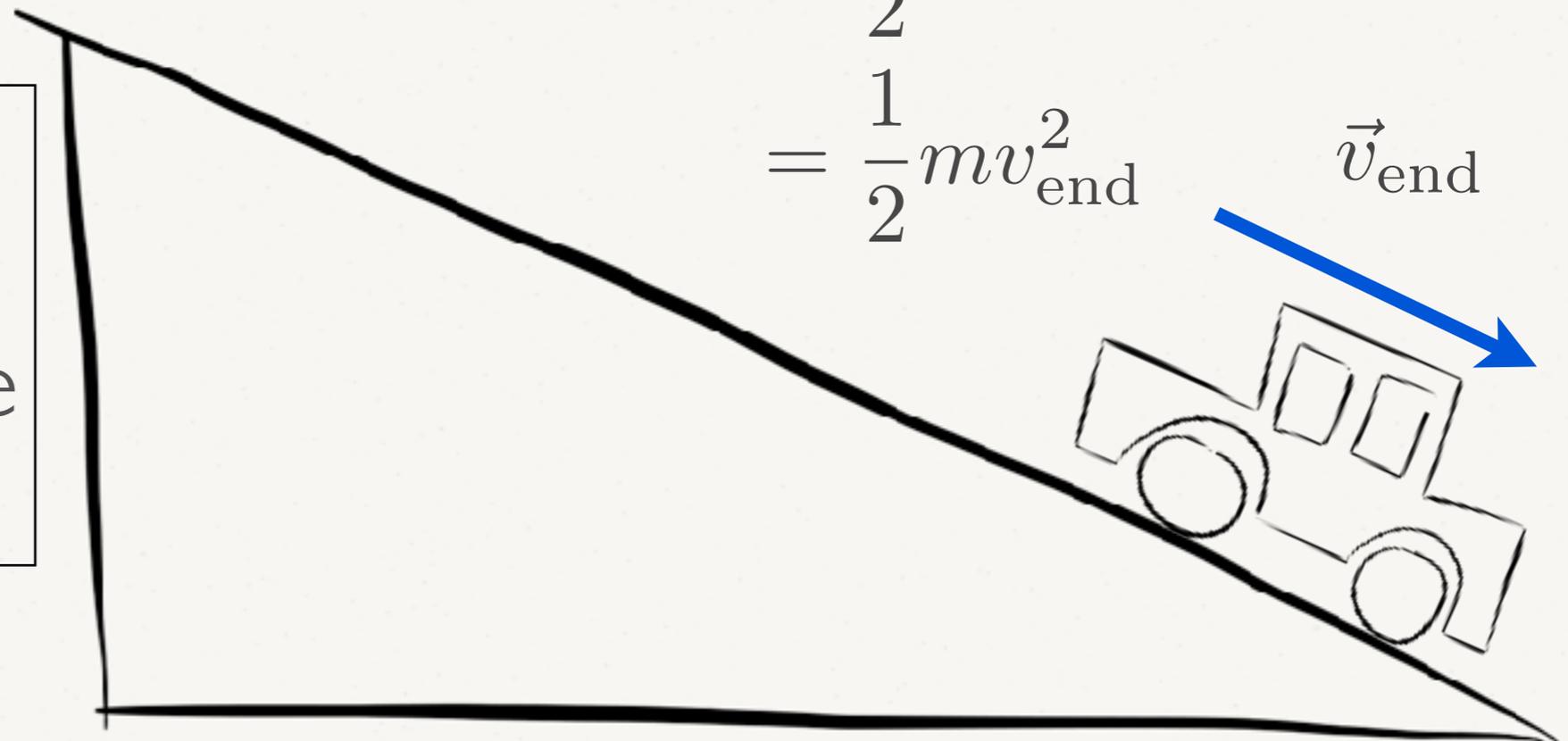
Kinetische Energie



Kinetische Energie

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot \Delta h &= F \cdot x = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} a t_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a t_0)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{end}}^2 \end{aligned}$$

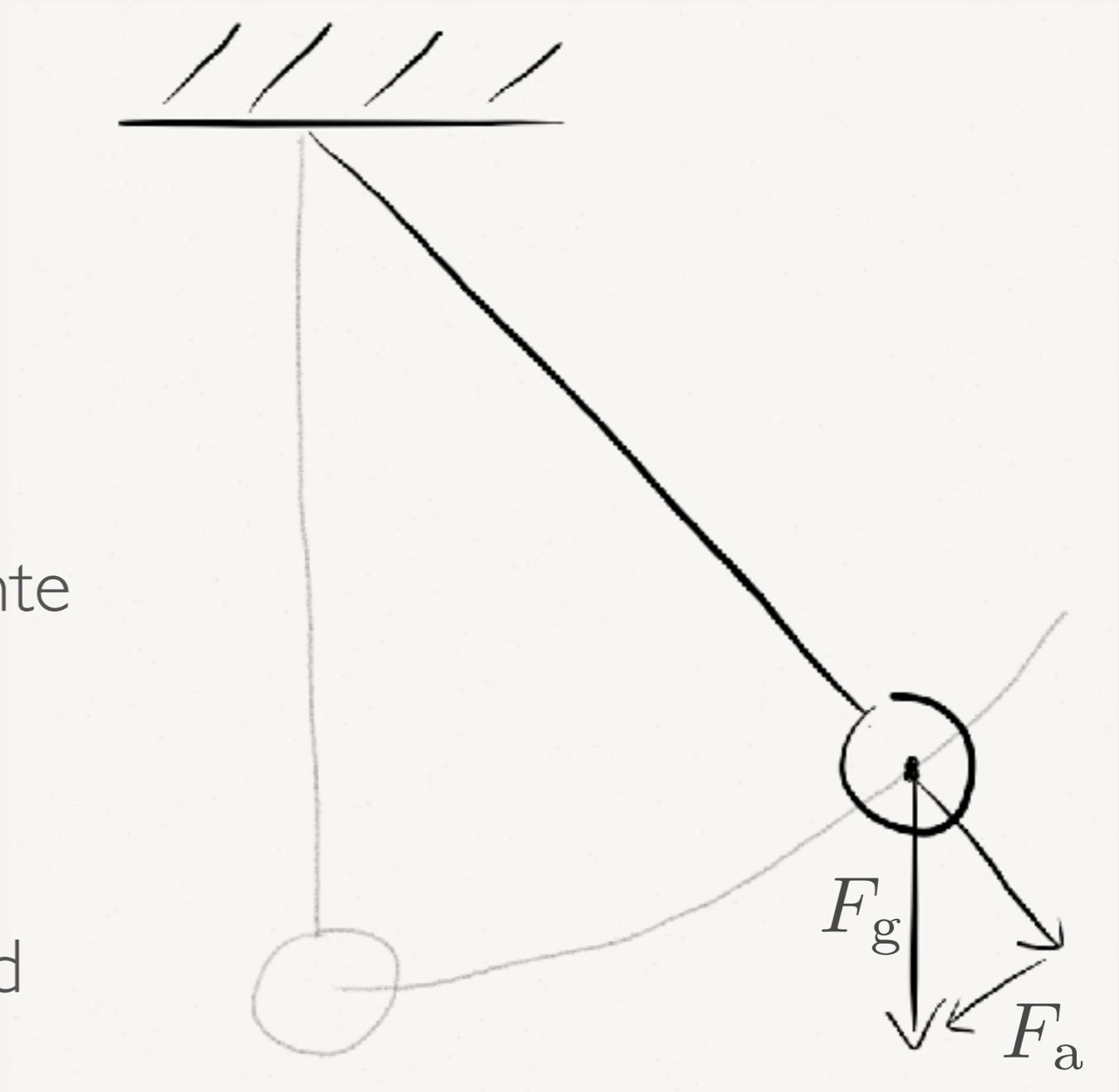
Potentielle
Energie wird in
kinetische Energie
umgewandelt.



Fadenpendel

Umwandlung von potentieller in kinetische Energie

- Vektorzerlegung der Gravitationskraft.
- Ein Teil der Kraft wird vom Faden kompensiert.
- Die tangentiale Komponente an die Bahn ist die beschleunigende Kraft.
- Die Kraft ändert sich permanent in Richtung und Betrag!



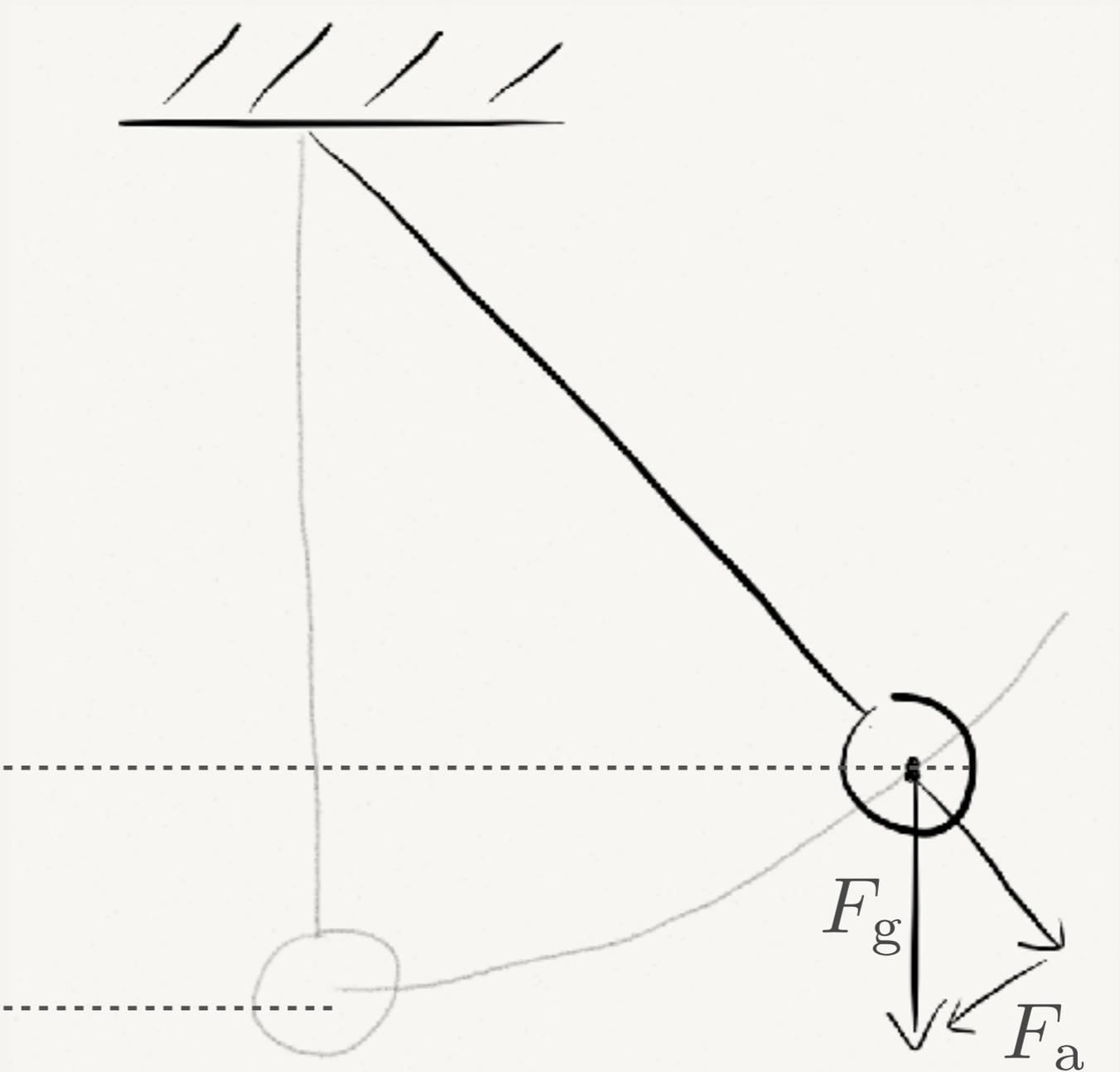
Fadenpendel

Umwandlung von potentieller in kinetische Energie

Berechnung der
Geschwindigkeit mit Hilfe
der Energieerhaltung!

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2$$

Δh



Energieerhaltung

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

Umwandlung der Energieformen

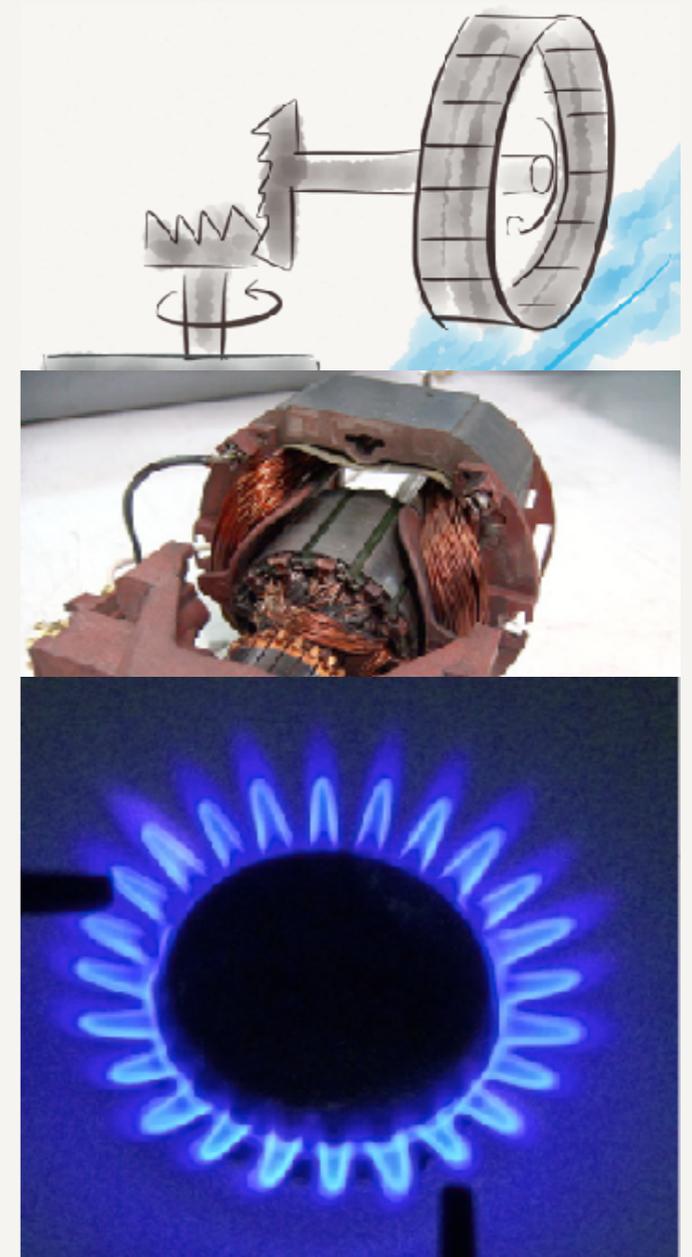
- Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt werden.
- Kinetische - Potentielle (Pendel)
- Elektrische Energie - mechanische Kraft
- Chemische Energie - Wärme
- Wärme - mechanische Kraft

Umwandlung der Energieformen

Quelle: Wikipedia



Von	Nach	Beispiel
Potentielle	Kinetische	Wassermühle
Elektrische	Kinetische	Elektromotor
Chemische	Wärme	Verbrennung
Wärme	Kinetische	Turbine
Kinetische	Elektrische	Generator



Umwandlung der Energieformen

Quelle: Wikipedia



Von	Nach	Beispiel
Potentielle	Kinetische	Wassermühle
Elektrische	Kinetische	Elektromotor
Chemische	Wärme	Verbrennung
Wärme	Kinetische	Turbine
Kinetische	Elektrische	Generator

Kraftwerk

