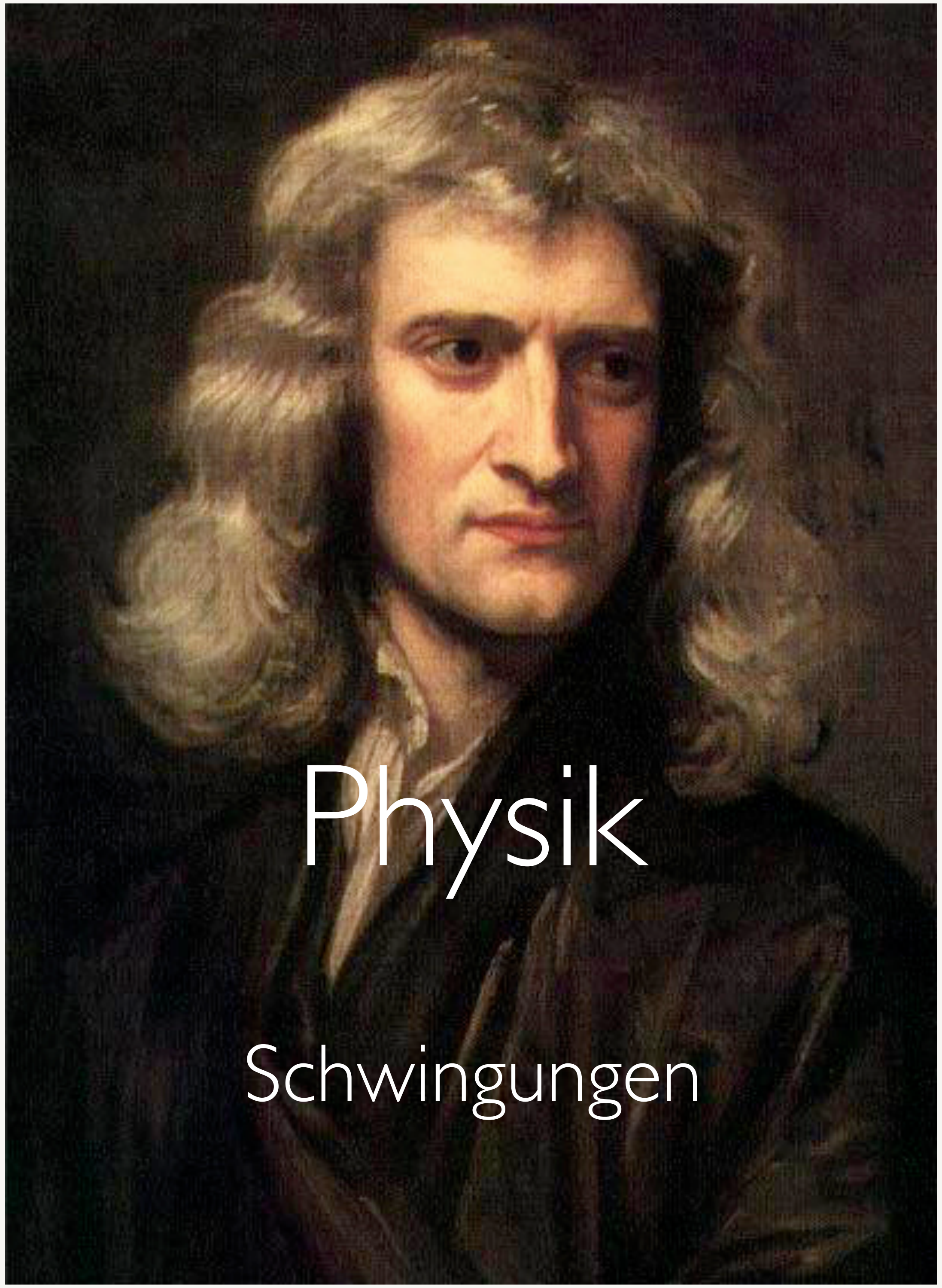
Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

22. Dezember 2016



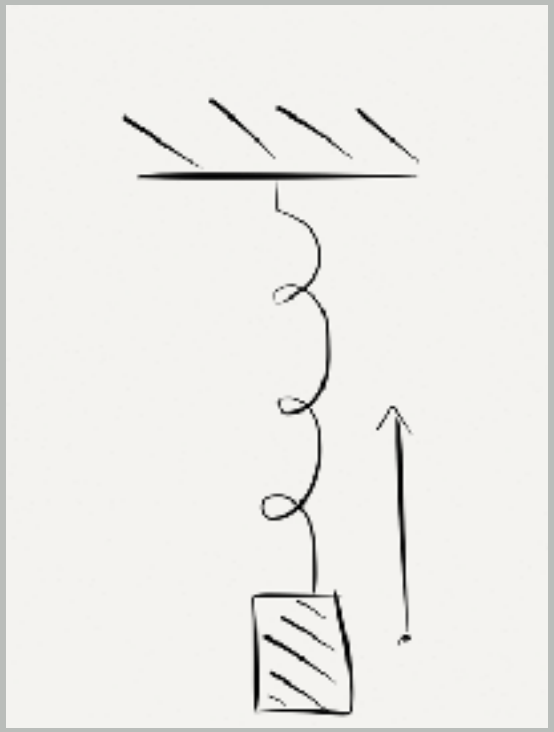
# Zusammenfassung Mechanik

| Physik | | Mathe |
|---|---|---|
| • Einheiten | | |
| • Bewegung | ------------------------------ | • Ableitung, Integration |
| • Bewegung 3d | ------------------------------ | • Vektoren |
| • Newtons Gesetze | | |
| • Energie | ------------------------------ | • Skalarprodukt |
| • Gravitation | ------------------------------ | • Gradient |
| • Rotation | ------------------------------ | • Kreuzprodukt |
| • Impuls | | |

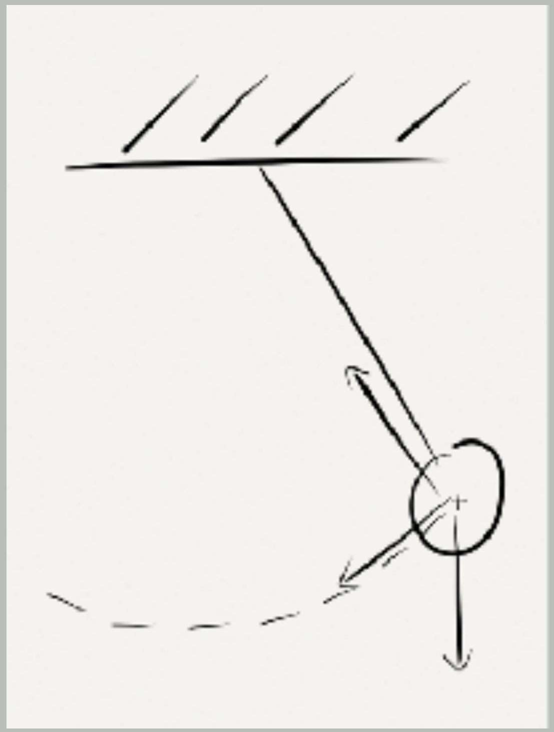
# Physik für KIT

Folie vom 01. Oktober 2015

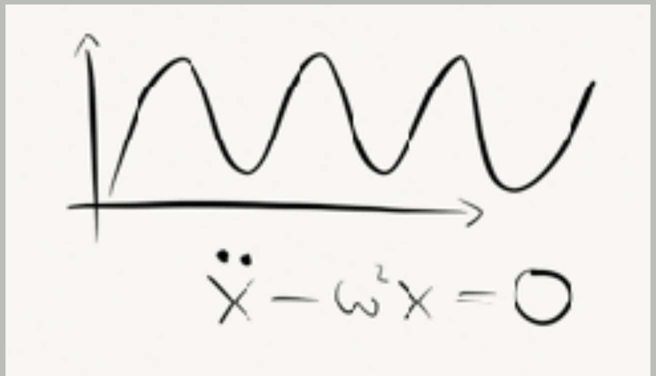
## Bewegung in 1. Dimension

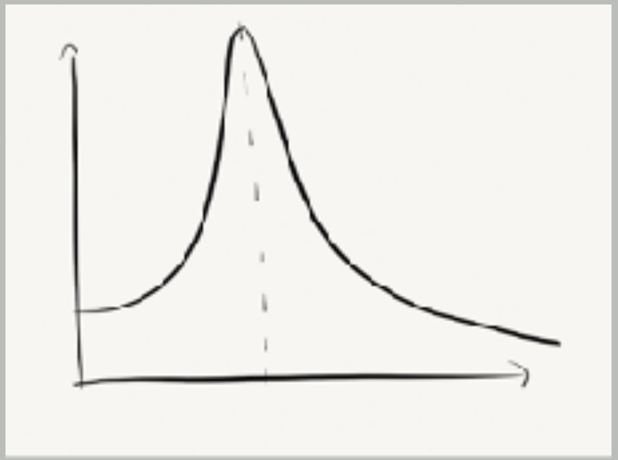


## Kräfte und Vektoren



## Harmonische Schwingung und DGL

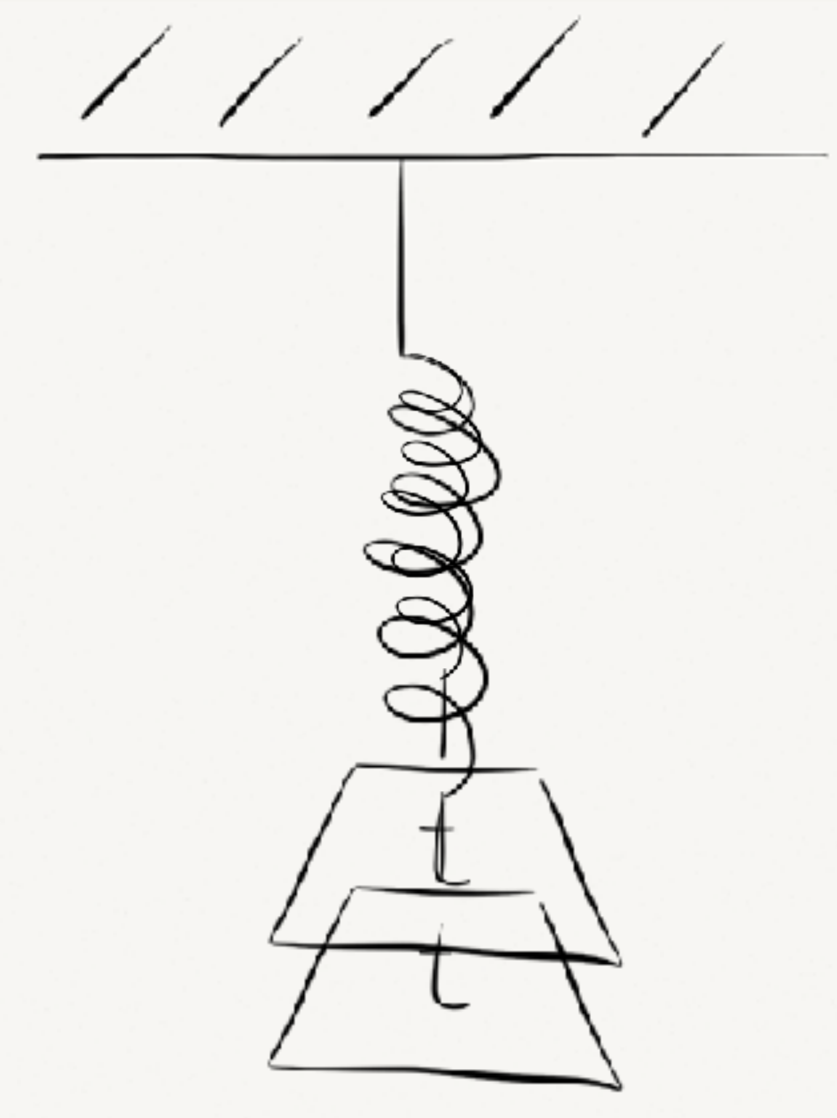


## Erzwungene Schwingung und Dispersionsrelation

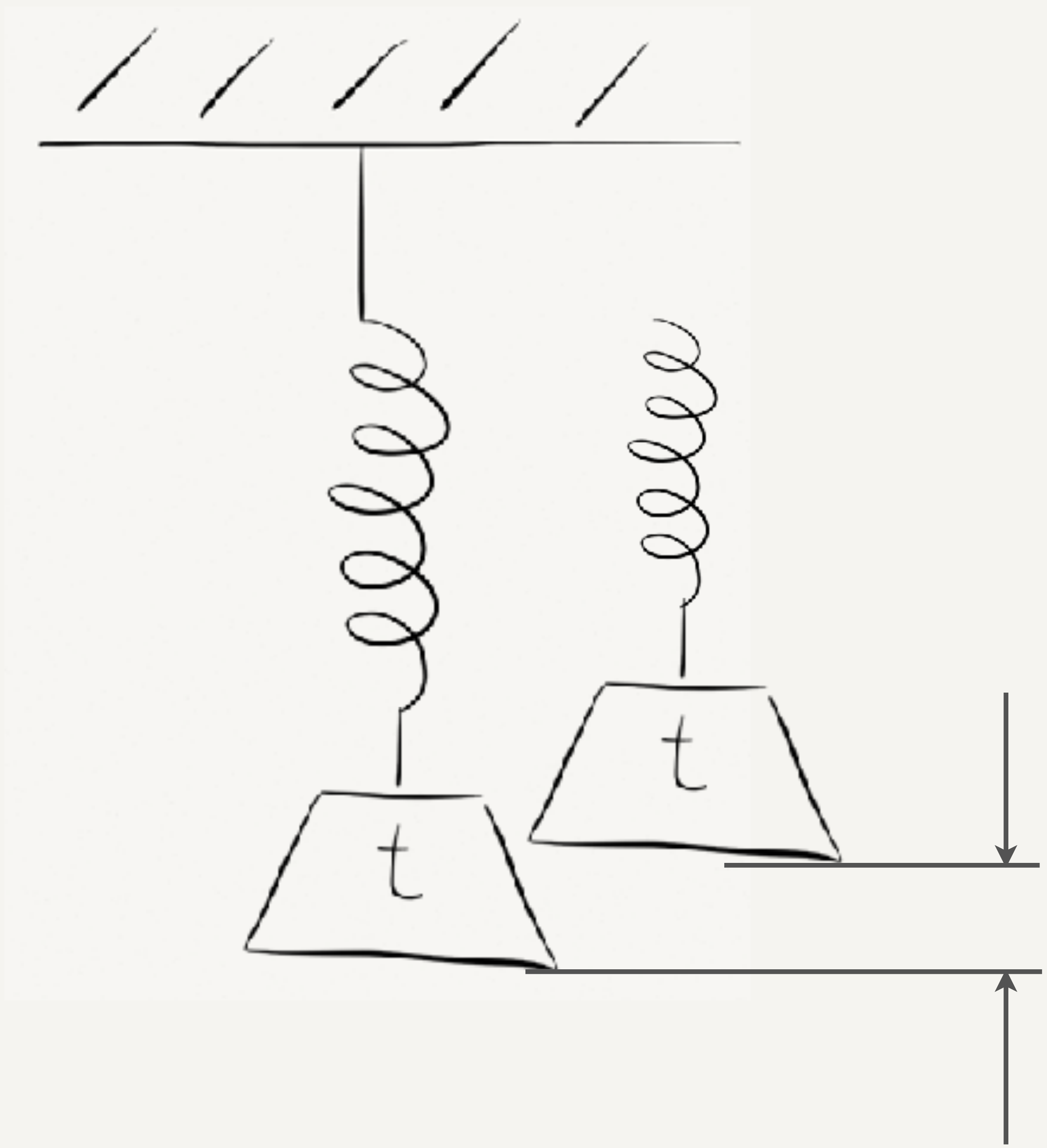
# Schwingungen

- Ein Objekt schwingt hin und her.
- Periodische Bewegung: nach einer Zeit $T$ wird die gleiche Bewegung durchlaufen.
- Hier: zunächst eindimensional.

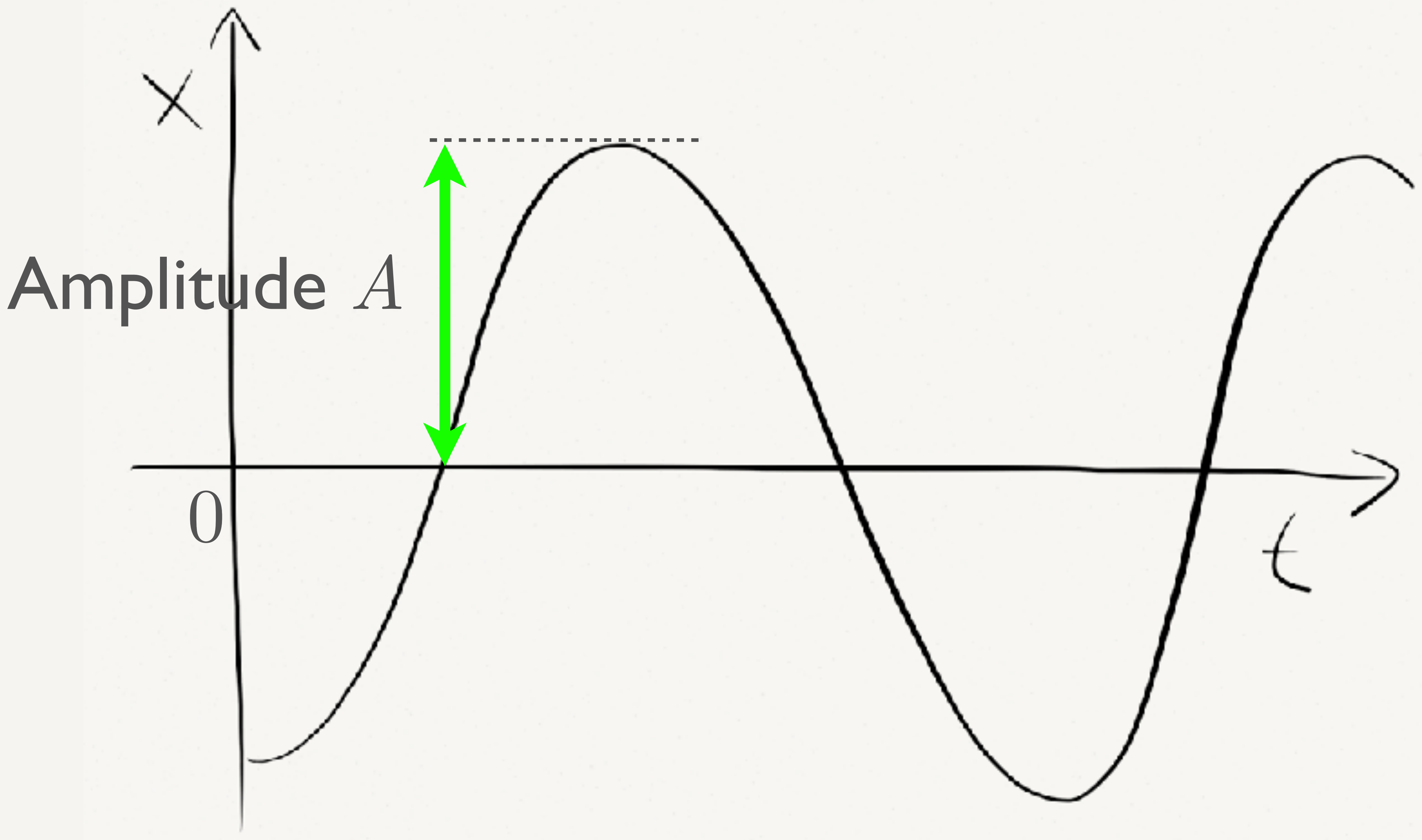


# Schwingungen

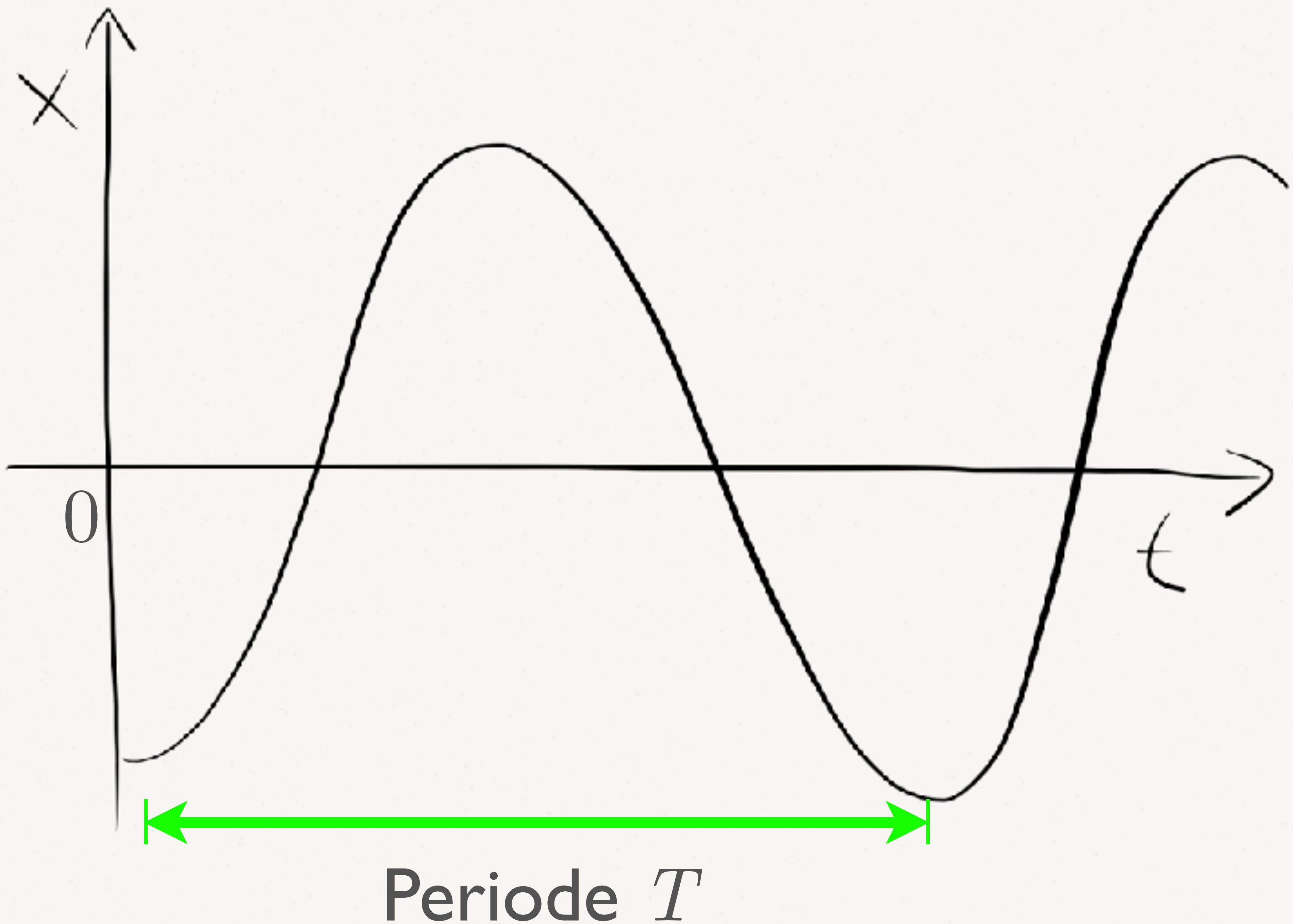
- Ein Objekt schwingt hin und her.
- Periodische Bewegung: nach einer Zeit $T$ wird die gleiche Bewegung durchlaufen.
- Hier: zunächst eindimensional.



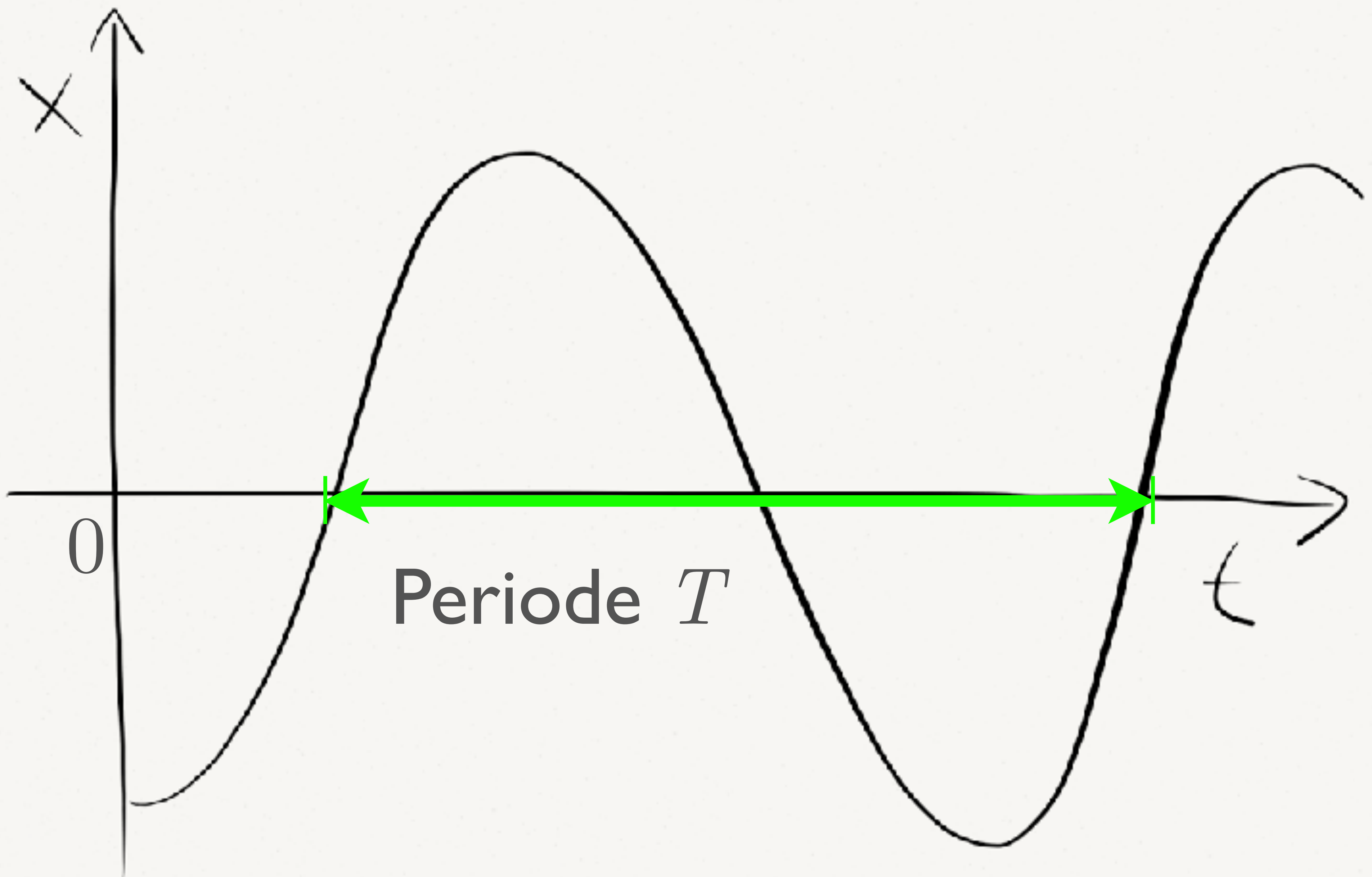
# Schwingung



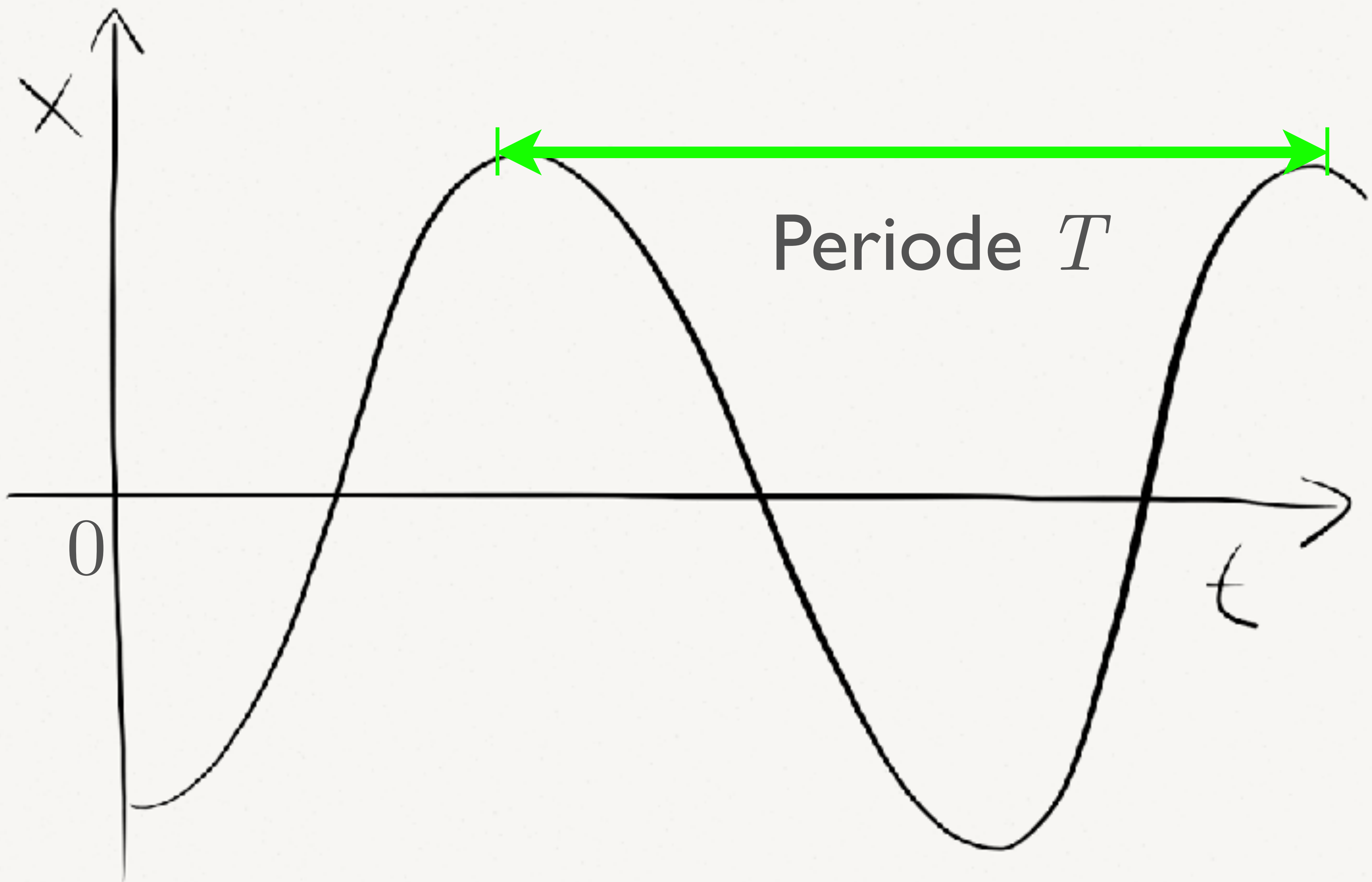
# Schwingung



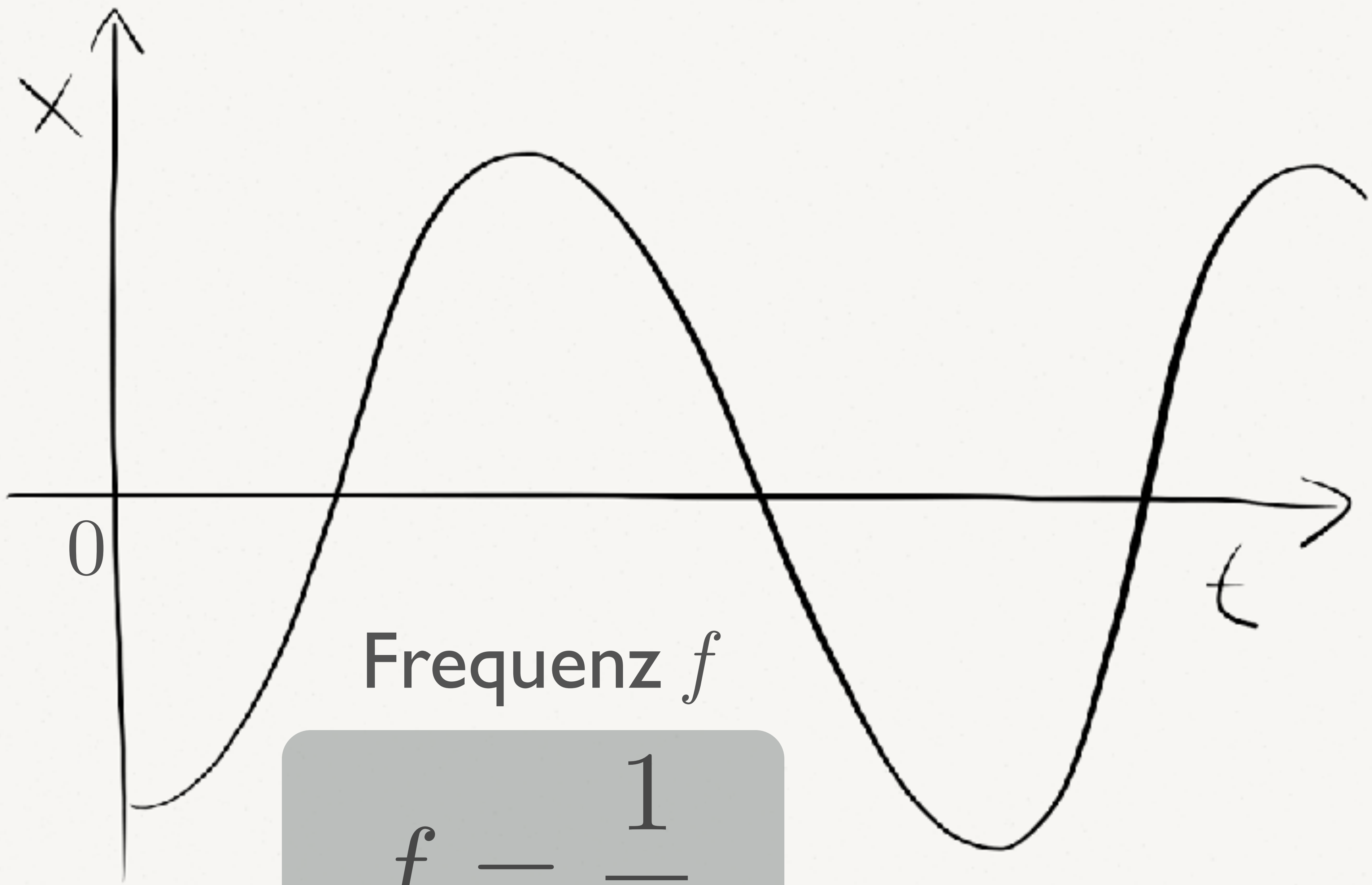
# Schwingung



# Schwingung



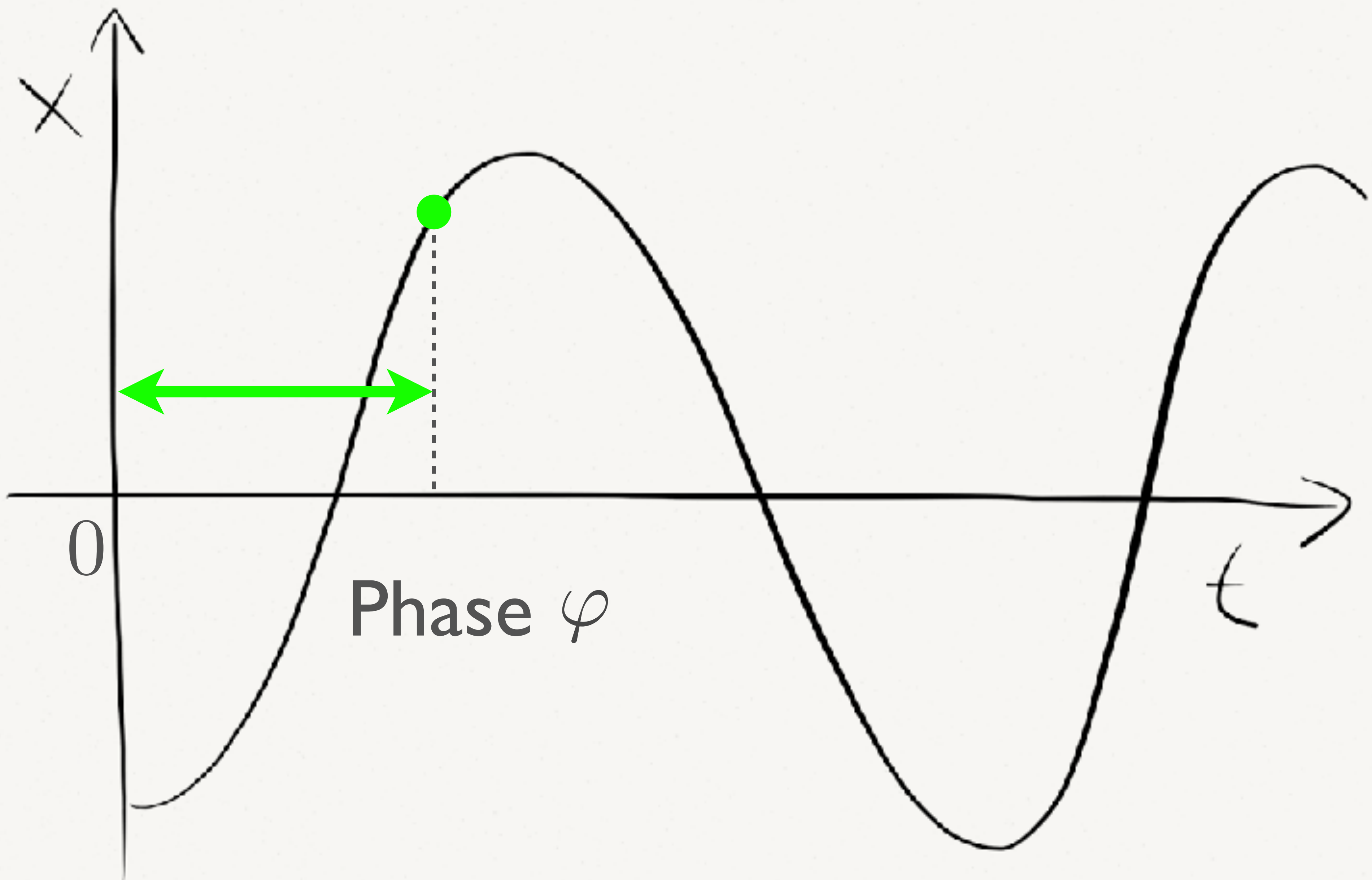
# Schwingung



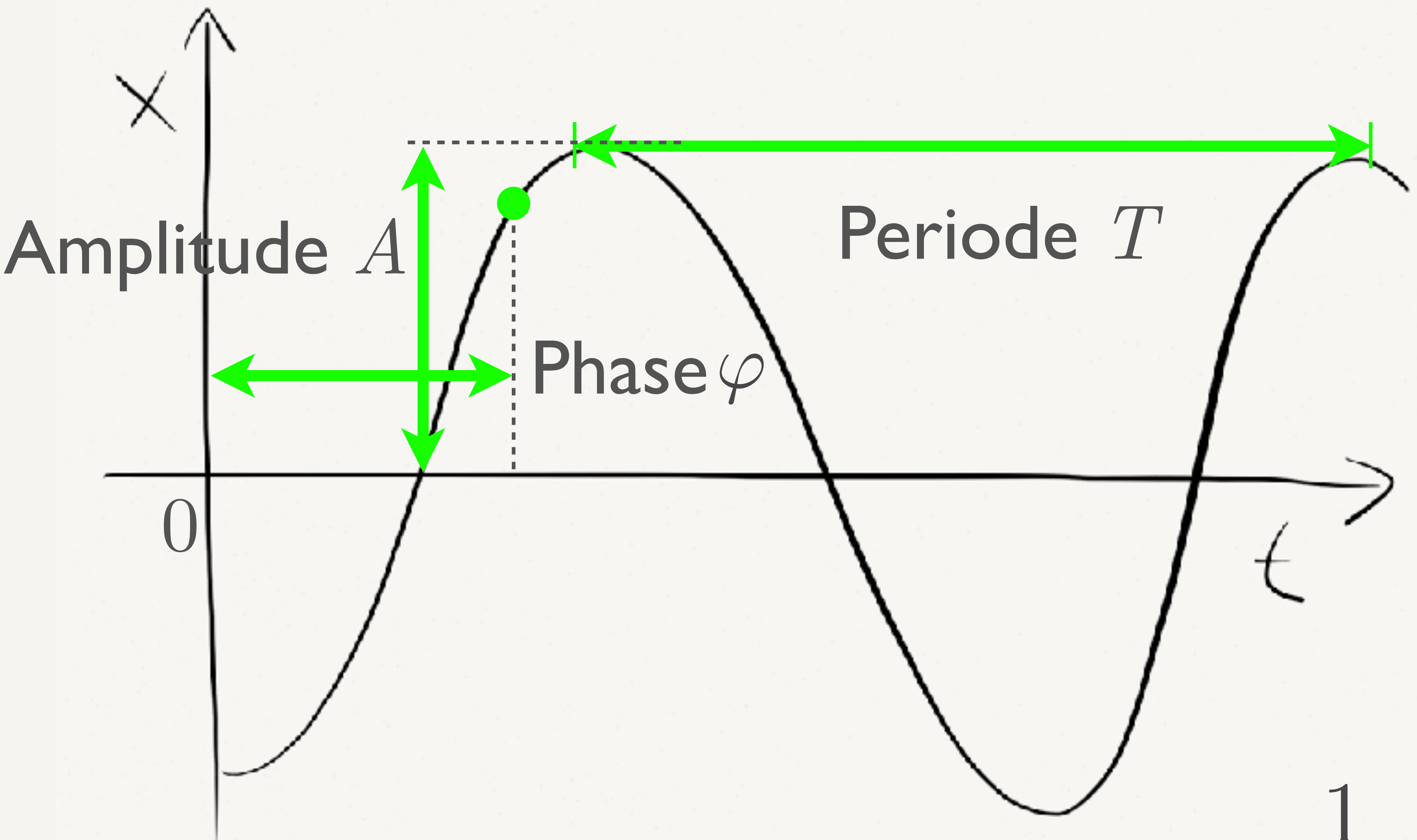

**Frequenz $f$**

$$f = \frac{1}{T}$$

# Schwingung



# Schwingung




Frequenz $f = \dfrac{1}{T}$

# Differentialgleichung!

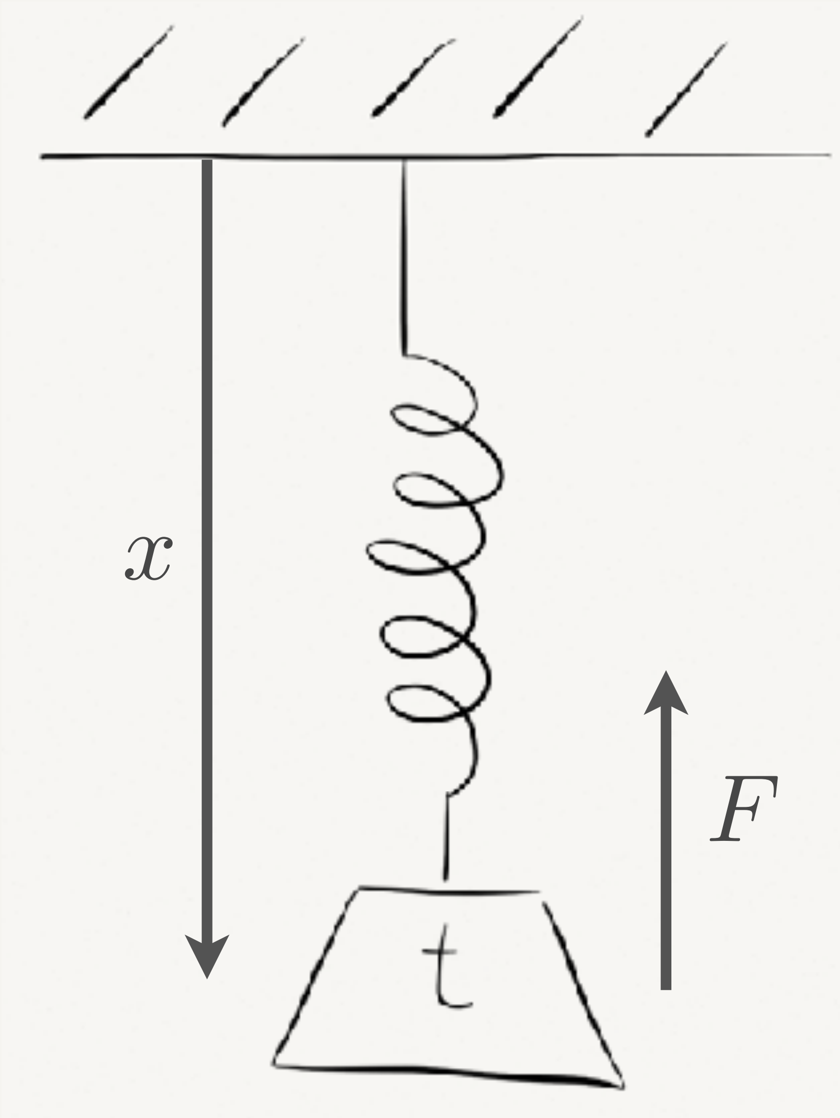
# Endlich!

# 2. Newton‘sches Gesetz

## Differentialgleichung - Hooke‘sches Gesetz

$$F \propto x$$

- Die Kraft ist proportional zur Auslenkung eines Federsystems.
- Es kann ein beliebiges Material sein - z.B. eine Eisenstange.
- Die Linearität ist i.A. nicht für große Auslenkungen gültig.



# 2. Newton'sches Gesetz

## Differentialgleichung - Hooke'sches Gesetz

- Die Kraft ist proportional zur Auslenkung eines Federsystems.
- Hier: eindimensional gerechnet.
- Proportionalitätskonstante *k* heisst Federkonstante.
- Einsetzen in das 2. Newton'sche Gesetz liefert eine Differentialgleichung.

$$F \propto x$$

Kraft zeigt entgegen der Auslenkung

$$F = -k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k \cdot x = 0$$

# Differentialgleichung mit Hooke'schem Gesetz

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

Definiere $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

# Der harmonische Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

mit $$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

# Der harmonische Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

- Die Differentialgleichung legt die Bewegung des Schwingers für alle Zeiten fest.
- Die Differentialgleichung hat unendliche viele Lösungen.
- Eine Lösung stellt eine Bahnkurve $x(t)$ dar.
- Eine einzelne Lösung wird durch Randbedingungen festgelegt.
- Durch die Ableitungen von $x(t)$ sind auch $v(t)$ und $a(t)$ festgelegt.

# Differentialgleichungen
## Beispiele

- Schrödingergleichung $$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$
- (Eine) Maxwell-Gleichung $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
- Wellengleichung $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

# Der harmonische Oszillator

## Eine Lösung

Eine Lösung raten: $x(t) = \cos \omega_0 t$

Ableitung bilden: $\dot{x}(t) = \omega_0 \sin \omega_0 t$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t$$
$$= -\omega_0^2 x(t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

# Der harmonische Oszillator

## Eine Lösung

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

Hier mal einsetzen:

$$-\omega_0^2 x(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) x(t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{k}{m} = \omega_0^2}$$

# Schwingungsfrequenz

- Je größer die Federkonstante desto höher die Schwingungsfrequenz
- Je größer die Masse desto kleiner die Schwingungsfrequenz
- In der Lösung steht eine Kreisfrequenz und keine Frequenz, weil das Argument des Kosinus im Bogenmaß ist.

$$\Rightarrow \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

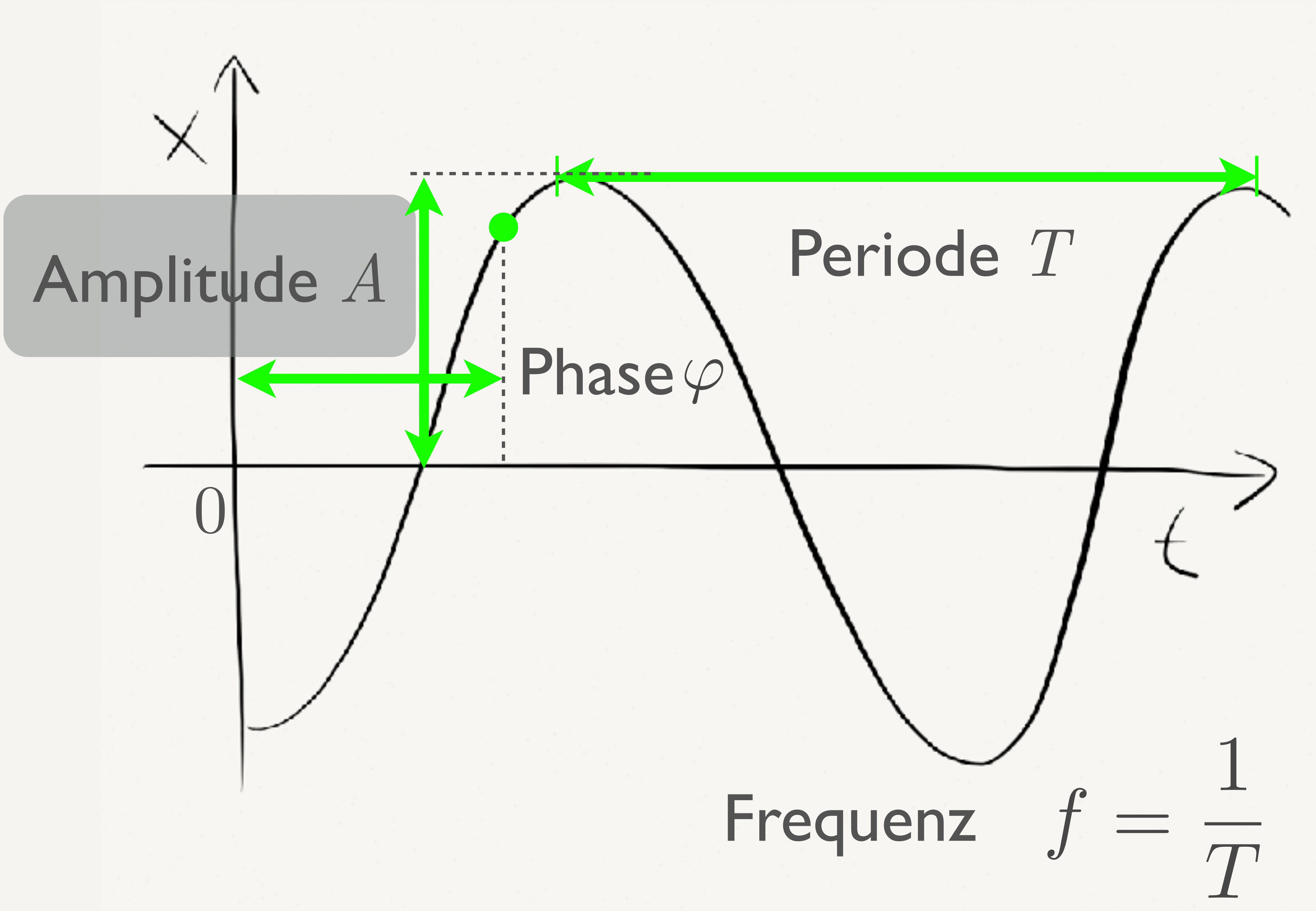
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

# Kreisfrequenz

- Die Kreisfrequenz unterscheidet sich von der Frequenz um den Faktor $2\pi$.
- Ansonsten würde das Argument des Sinus nach einer Periode nicht stimmen.

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

# Schwingung



# Schwingungsamplitude
## Noch eine Lösung

Eine andere Lösung raten: $x(t) = 2 \cdot \cos \omega_0 t$

Ableitung bilden: $\dot{x}(t) = 2 \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot 2 \cdot \cos \omega_0 t$$
$$= -\omega_0^2 x(t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$-\omega_0^2 x(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) x(t) \stackrel{!}{=} 0$$

**Die Schwingungsfrequenz bleibt gleich!**

# Beliebige Amplitude

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

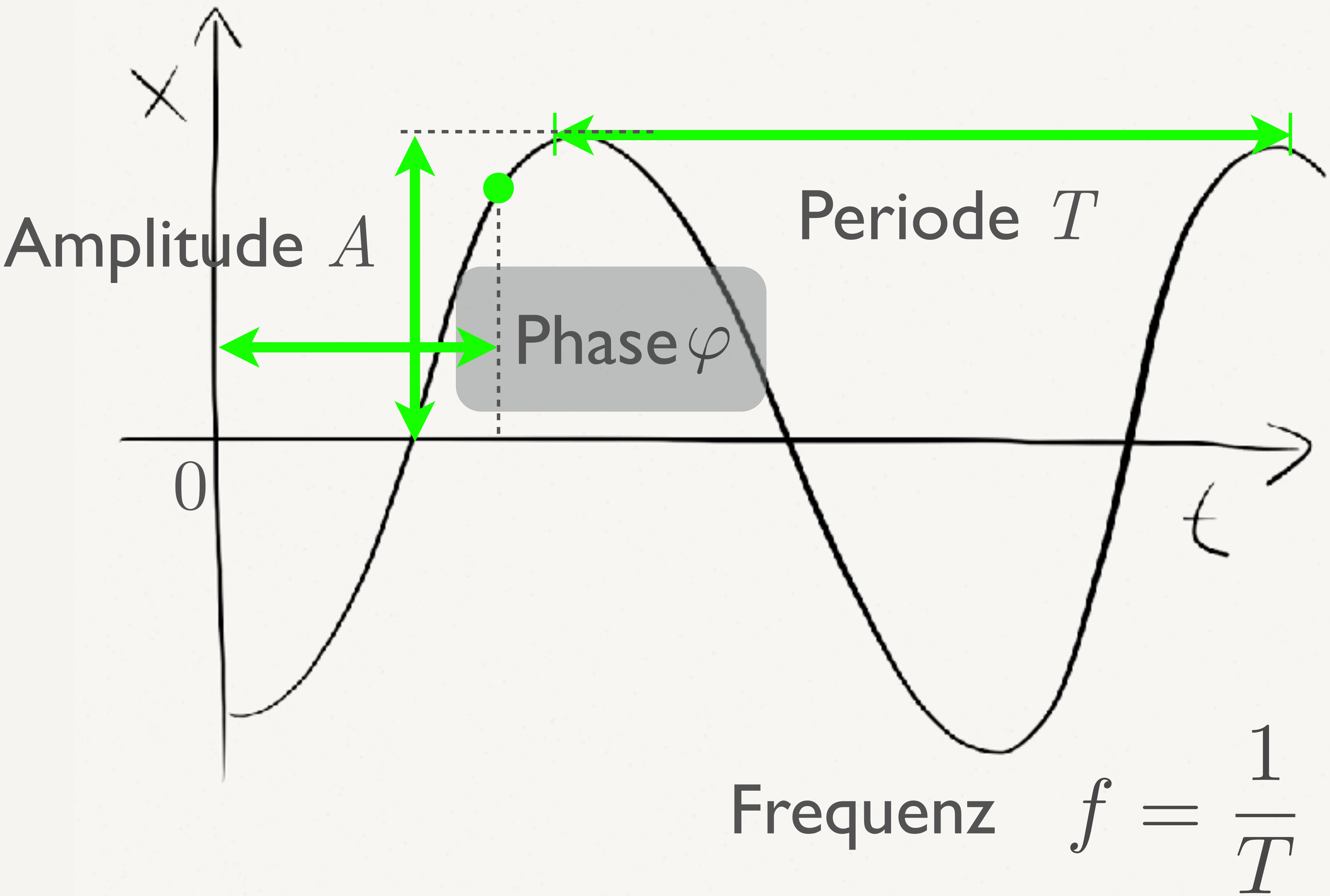
$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 \cdot A \cdot \cos \omega_0 t \\ &= -\omega_0^2 x(t) \end{aligned}$$

$$-\omega_0^2 x(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \left( \frac{k}{m} - \omega_0^2 \right) x(t) \overset{!}{=} 0$$

Die Schwingungsfrequenz bleibt gleich

# Schwingung



# Allgemeine Lösung

- Auch mit Amplitude ist die Lösung noch nicht die allgemeinste Form.
- Die Schwingung kann noch zu einem beliebigen Zeitpunkt starten.
- Dazu wird die Phase explizit in die Lösung eingeführt.
- Auch die Phase ändert die Schwingungsfrequenz nicht.

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

# Randbedingungen

- Randbedingungen legen die konkrete Lösung fest.
- Zwei Parameter: Amplitude und Phase.
- Es werden zwei Gleichungen benötigt um die beiden Parameter festzulegen.
- z.B. Anfangsort $x(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$.

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

| Beschreibung | Ort | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| Volle Auslenkung, in Ruhe | $x(0) = A_0$ | $v(0) = 0$ |
| In Nulllage, volle Geschwindigkeit | $x(0) = 0$ | $v(0) = v_0$ |
| In Nulllage, in Ruhe | $x(0) = 0$ | $v(0) = 0$ |

# Randbedingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

| Beschreibung | Ort | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| Volle Auslenkung, in Ruhe | $x(0) = A_0$ | $v(0) = 0$ |
| In Nulllage,volle Geschwindigkeit | $x(0) = 0$ | $v(0) = v_0$ |
| In Nulllage, in Ruhe | $x(0) = 0$ | $v(0) = 0$ |

Geschwindigkeit einsetzen:

$$v(0) = \omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \varphi = 0$$

Ort einsetzen:

$$x(0) = A \cos(\omega_0 \cdot 0 + 0) \stackrel{!}{=} A_0$$
$$\Rightarrow A = A_0$$

# Randbedingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

| Beschreibung | Ort | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| Volle Auslenkung, in Ruhe | $x(0) = A_0$ | $v(0) = 0$ |
| In Nulllage,volle Geschwindigkeit | $x(0) = 0$ | $v(0) = v_0$ |
| In Nulllage, in Ruhe | $x(0) = 0$ | $v(0) = 0$ |

Ort einsetzen:

$$x(0) = A\cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

Geschwindigkeit einsetzen:

$$v(0) = \omega_0 A \sin\left(\omega_0 \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \omega_0 A \cos 0 \stackrel{!}{=} v_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

# Randbedingungen

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

| Beschreibung | Ort | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| Volle Auslenkung, in Ruhe | $x(0) = A_0$ | $v(0) = 0$ |
| In Nulllage,volle Geschwindigkeit | $x(0) = 0$ | $v(0) = v_0$ |
| $\boxed{\text{In Nulllage, in Ruhe}}$ | $x(0) = 0$ | $v(0) = 0$ |

Geschwindigkeit einsetzen:

$$v(0) = \omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

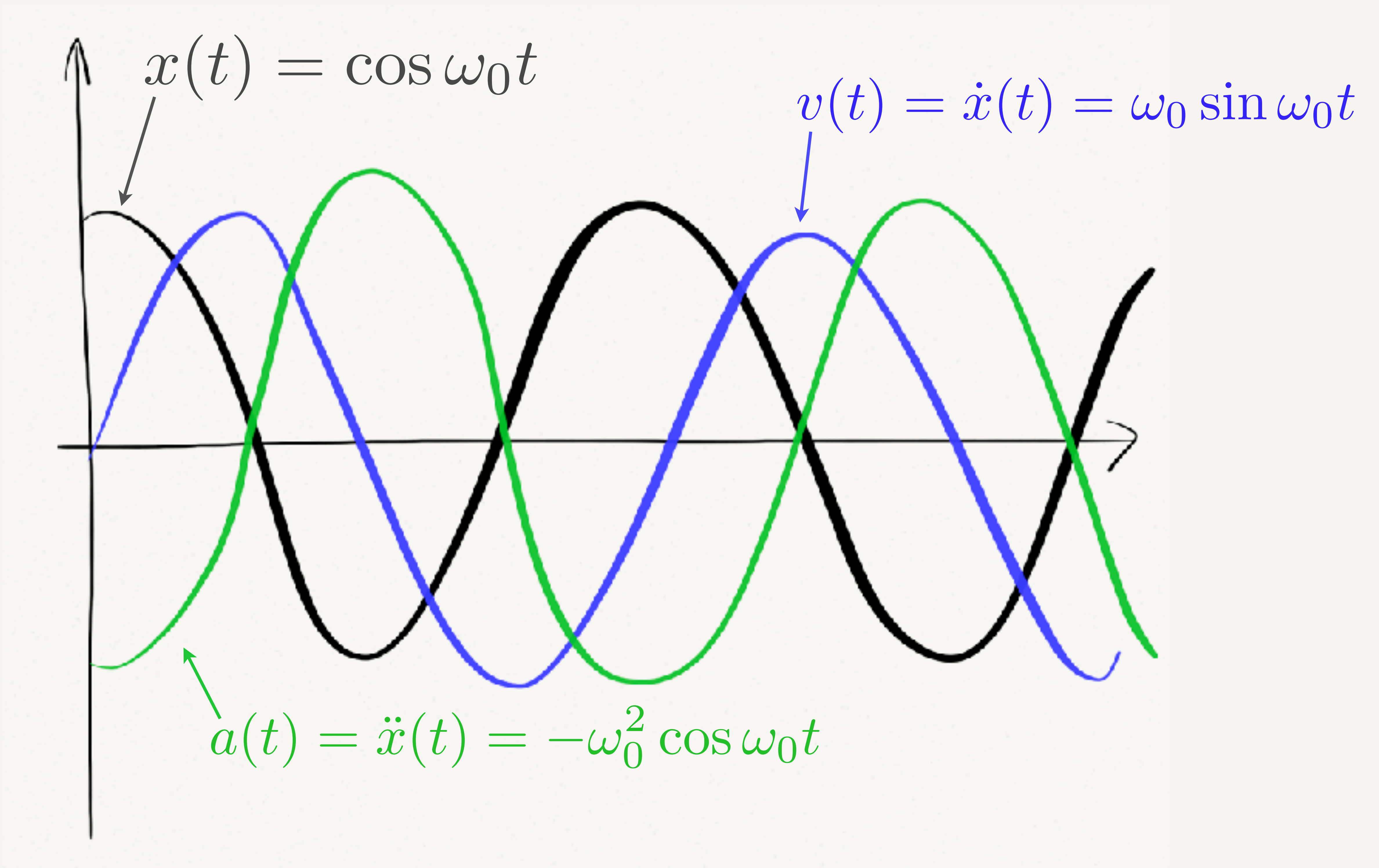
$$\Rightarrow \varphi = 0$$

Ort einsetzen:

$$x(0) = A \cos(\omega_0 \cdot 0 + 0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

# Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

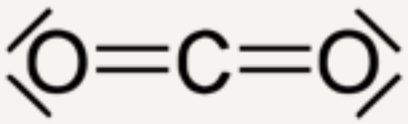


# Der harmonische Oszillator
## Zusammenfassung

- Differentialgleichung $$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$
- Lösung $$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
- Schwingungsfrequenz $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Molekülschwingungen

## Kohlendioxid



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Die Schwingungsfrequenzen hängen von der Stärke der Bindung und den Massen der schwingenden Atome ab.
- Bei größeren Molekülen können Molekülgruppen gegen den Rest schwingen.
- Die Schwingungsfrequenzen können mit IR-Spektroskopie vermessen werden.
- Die Schwingungsfrequenzen sind ein Fingerabdruck des Molekülsystems.

- **Masse** $m$ : Bindungen mit Wasserstoff-Atomen haben höhere Frequenzen als Bindungen mit schweren Atomen (C, N, O).
- **Federkonstante** $k$ : Dreifach-Bindungen haben höhere Frequenzen als zweifach-Bindungen als einfach-Bindungen.