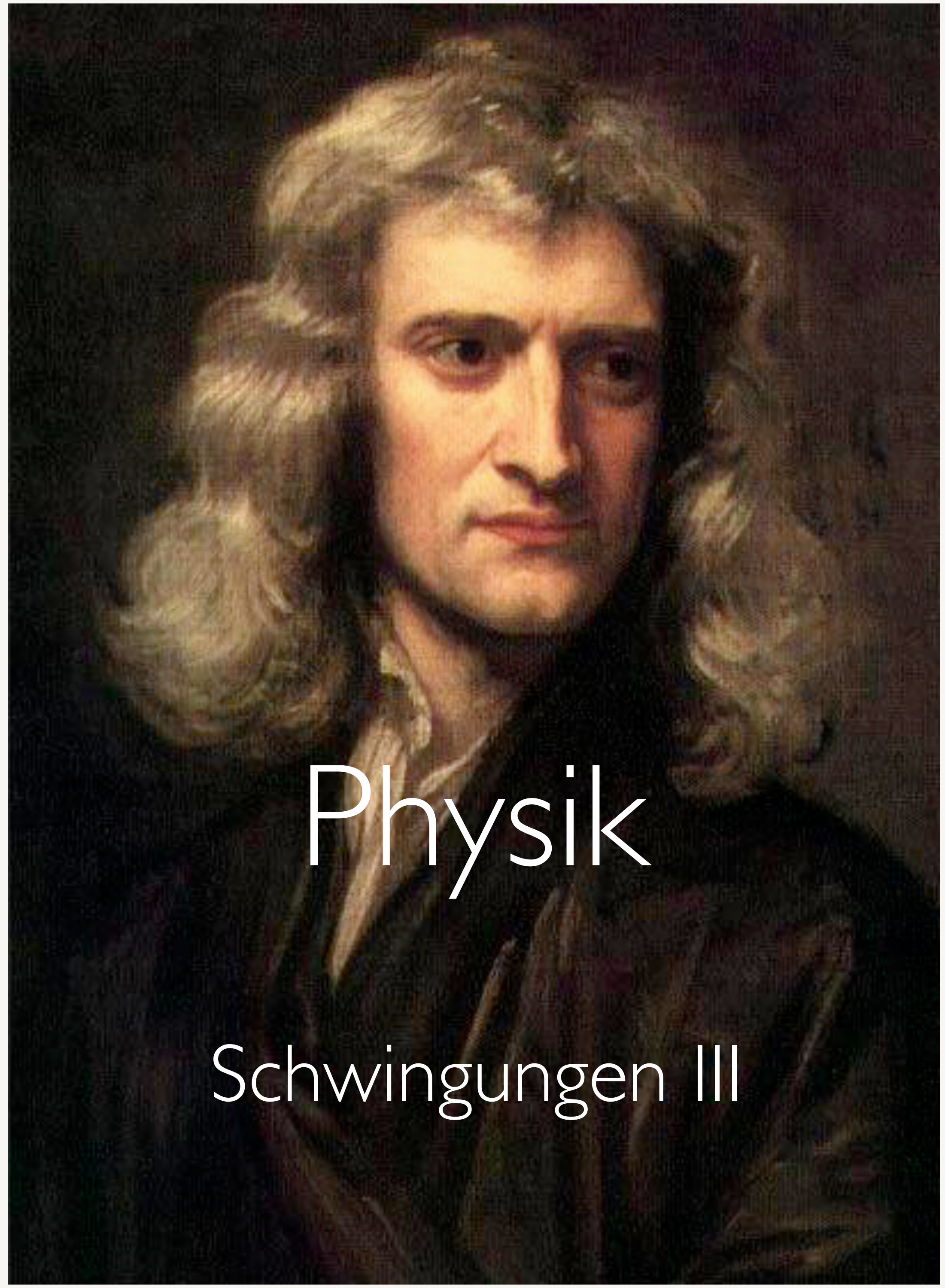
12. Januar 2017



Physik

Schwingungen III

Wiederholung

- Komplexe Zahlen
- Harmonischer Oszillator
- DGL
- Getrieben
- Gedämpft

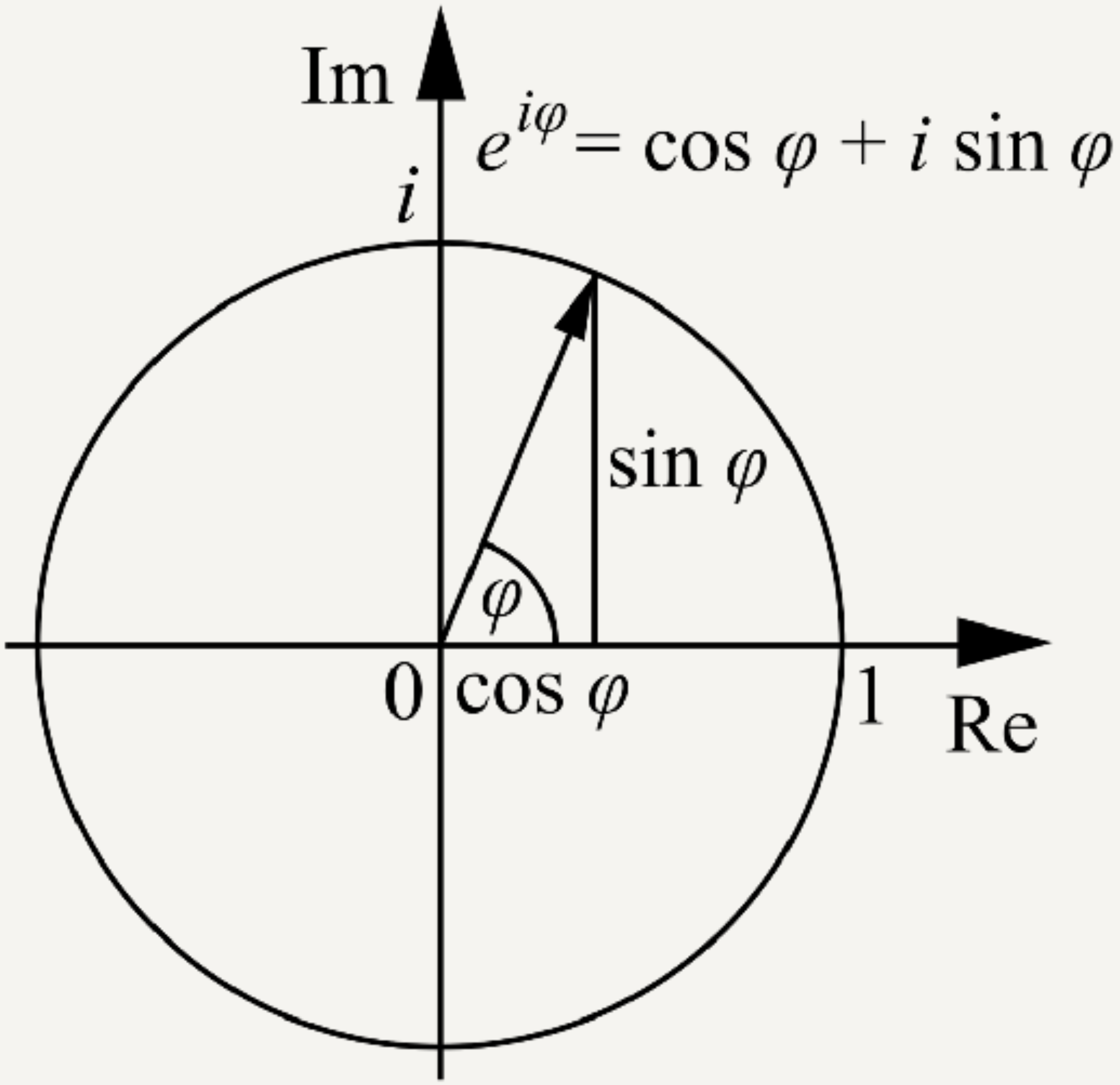
Komplexe Zahlen

Eulersche Formel

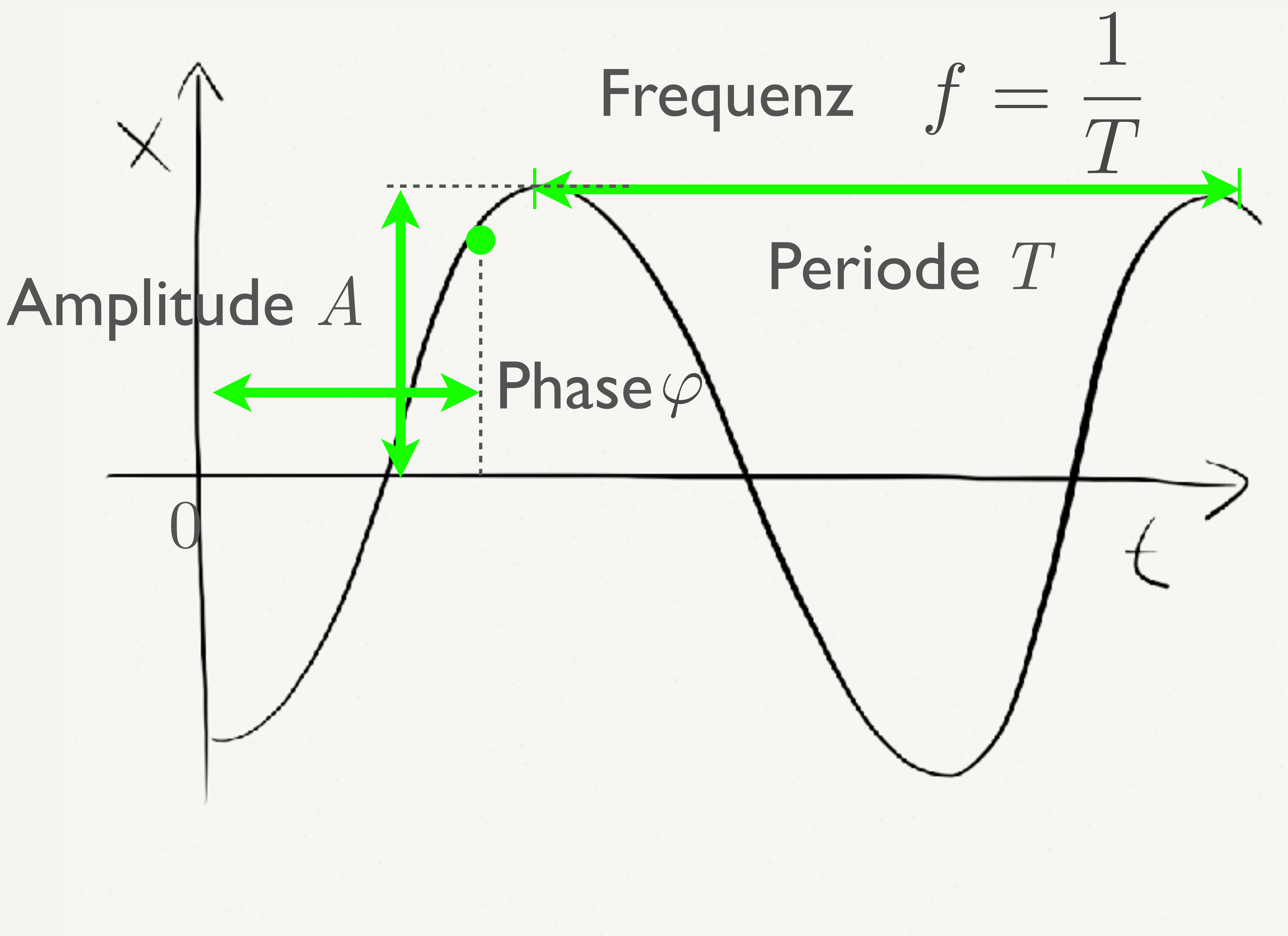
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Komplexe Schwingung

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$



Schwingung



Der harmonische Oszillator

- Ein **Oszillator** ist ein schwingfähiges System.
- Es ist **harmonisch**, wenn die Rückstellkraft linear zur Auslenkung ist.
- Die mathematische Beschreibung des Verhaltens und Ablaufs ist eine **Differentialgleichung**.
- Eine **Lösung** erfüllt die DGL und beschreibt die Ortskurve des Oszillators.
- Die Ableitungen beschreiben die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Oszillators.

$$F = -k \cdot x$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t)$$

Lösungsverfahren

Eine Lösung raten: $x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$

Ableitung bilden: $\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot A \cdot \cos \omega_0 t$$
$$= -\omega_0^2 x(t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$-\omega_0^2 x(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2 \right) x(t) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Schwingungsfrequenz

- Je größer die Federkonstante desto höher die Schwingungsfrequenz
- Je größer die Masse desto kleiner die Schwingungsfrequenz
- In der Lösung steht eine Kreisfrequenz und keine Frequenz, weil das Argument des Kosinus im Bogenmaß ist.

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Zeitliches Verhalten der Energie

Schwingung:

$$x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$$

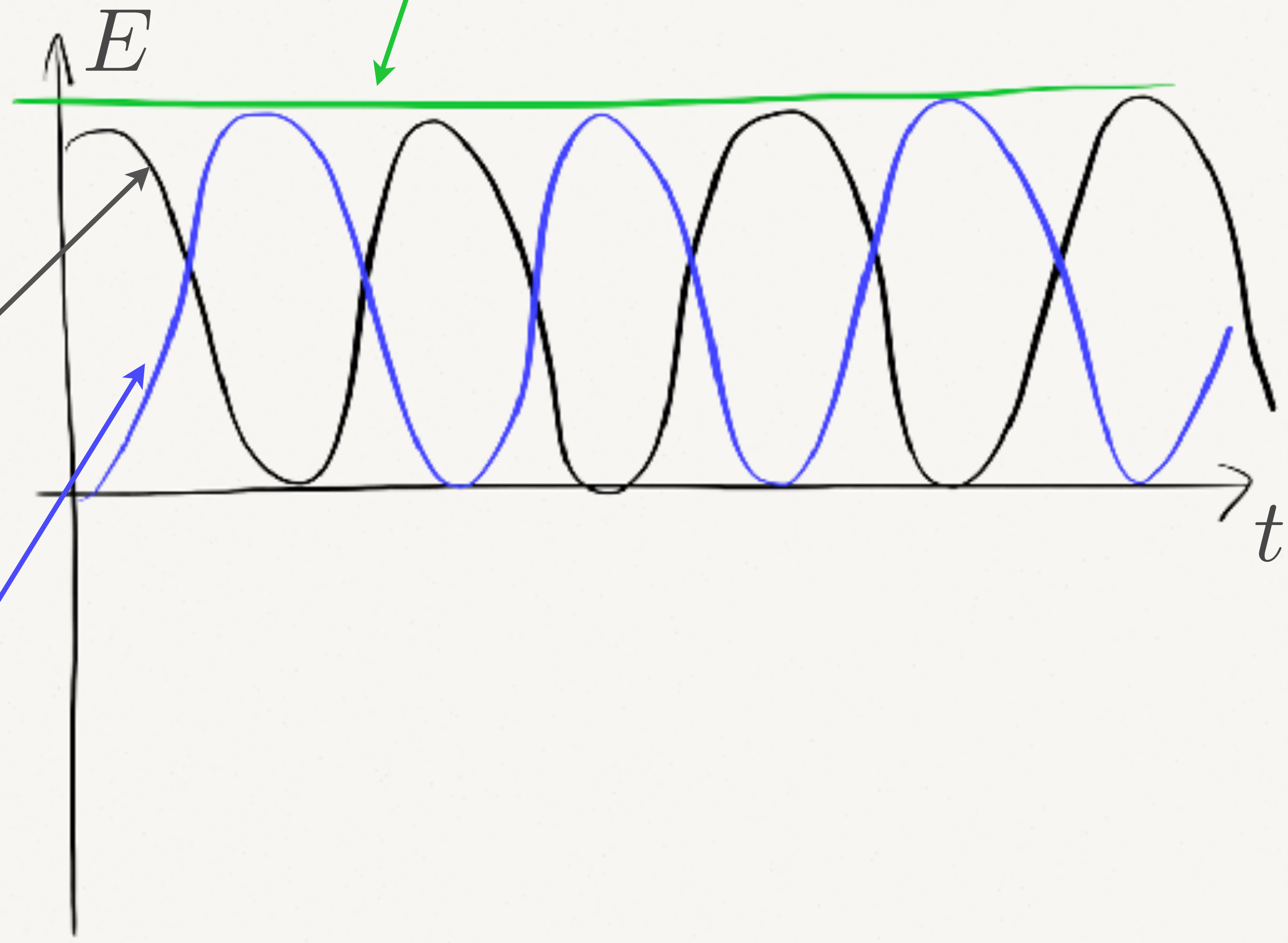
Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$$

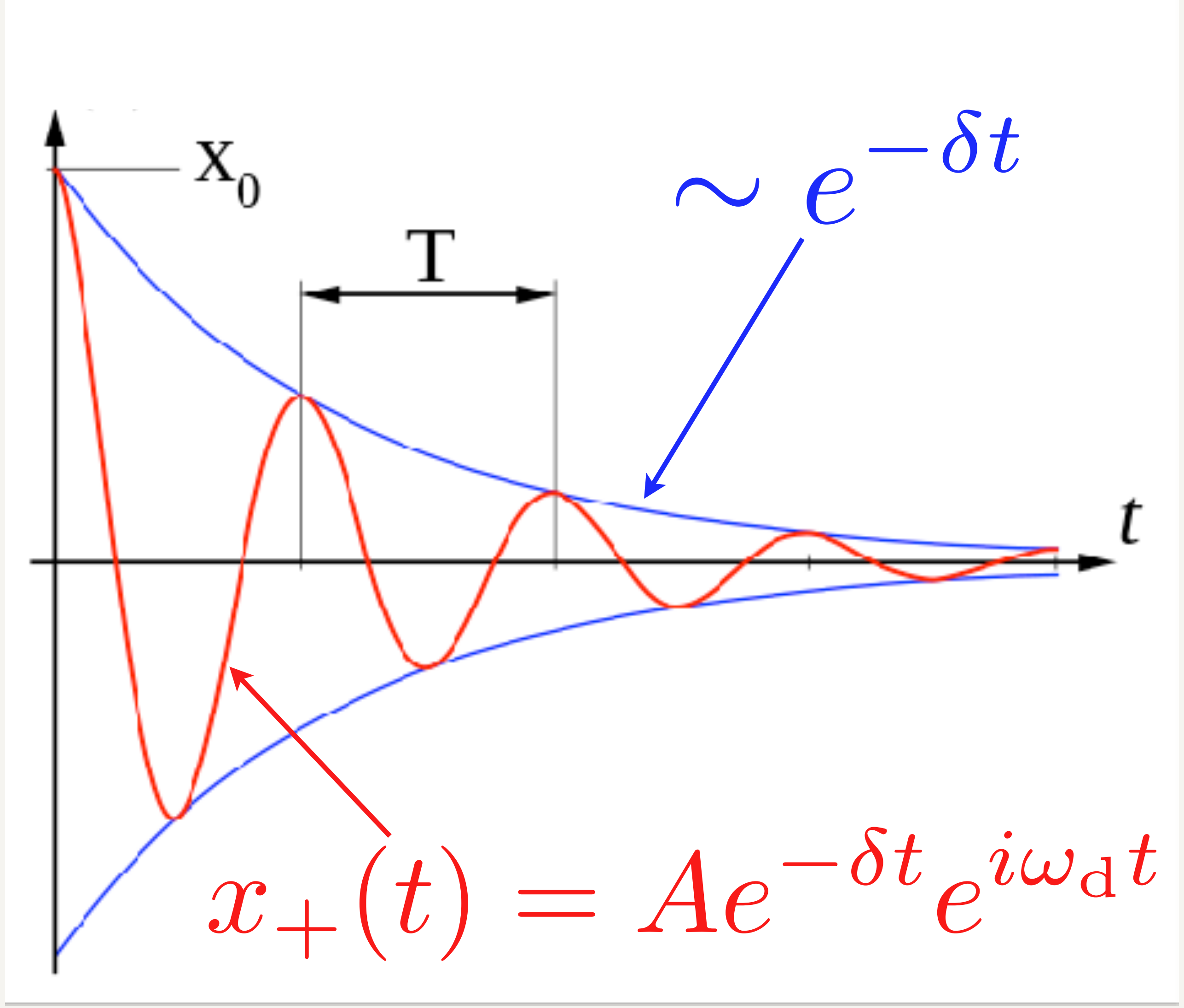
$$E = \frac{1}{2} k A^2$$



Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung

Getriebener harmonischer Oszillator

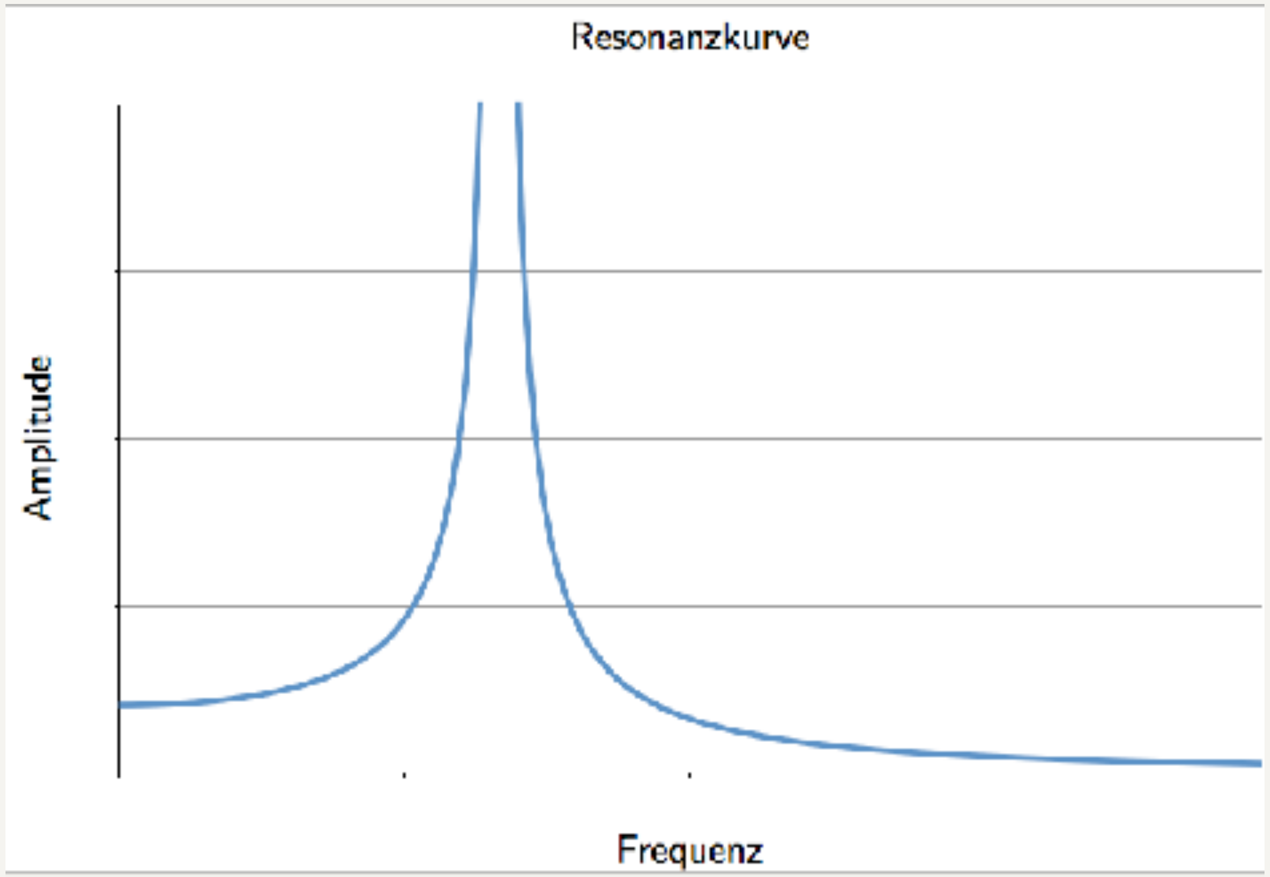
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_\mathrm{A} t$$

$$A = \frac{F_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2)}$$

- Die Kurve zeigt ein scharfes Maximum bei der Resonanzfrequenz
- Für kleine Frequenzen geht die Amplitude gegen die *statische Auslenkung:*

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

- Für große Frequenzen geht die Amplitude gegen Null.



Harmonischer Oszillator

Getrieben *und* gedämpft

- DGL
- Lösungsansatz
- Spektrum (Resonanzkurven)
- Qualitativ: Phasenverschiebung

Getriebenen und gedämpft

Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F$$

Newton

Reibung

Rückstellkraft

Antriebskraft

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Lösungsansatz

Eine Lösung raten:

$$x(t) = A\, e^{i\omega t}$$

Ableitung bilden:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= i\omega A\, e^{i\omega t} \\ &= i\omega x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega^2 A\, e^{i\omega t} \\ &= -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Lösung

DGL:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Einsetzen:

$$\left(-\omega^2 + i\omega 2\delta + \omega_0^2\right) A e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Algebraische Gleichung:

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega 2\delta}$$

Ohne Dämpfung:

$$A = \frac{F_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_\mathrm{A}^2)}$$

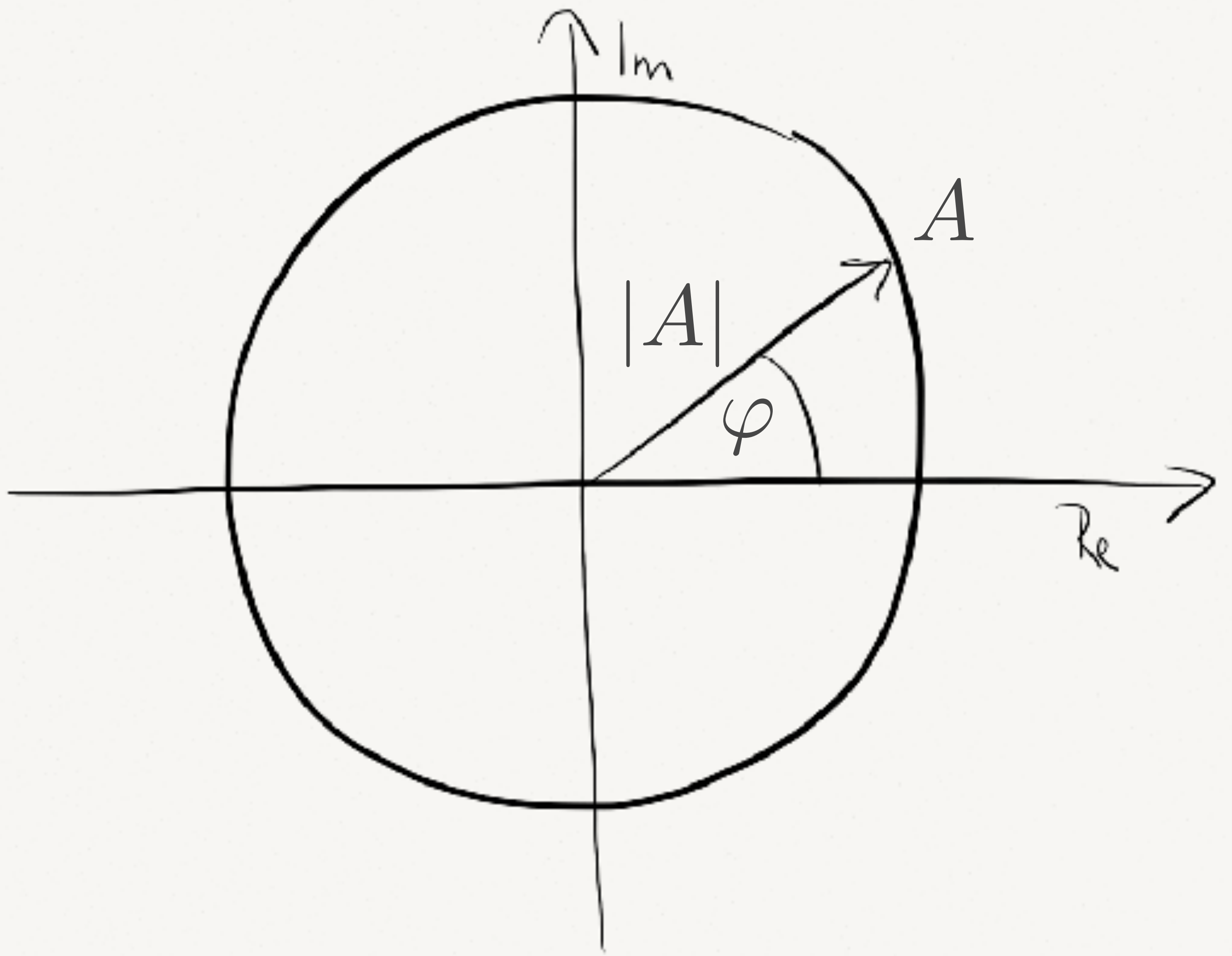
Die Amplitude ist eine komplexe Zahl!

Lösung

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega 2\delta}$$

$$A = |A| \cdot e^{i\varphi}$$

- Der Betrag von A ist die Amplitude der Schwingung.
- Die Phase tritt als zusätzliche Phase in der Schwingung auf.

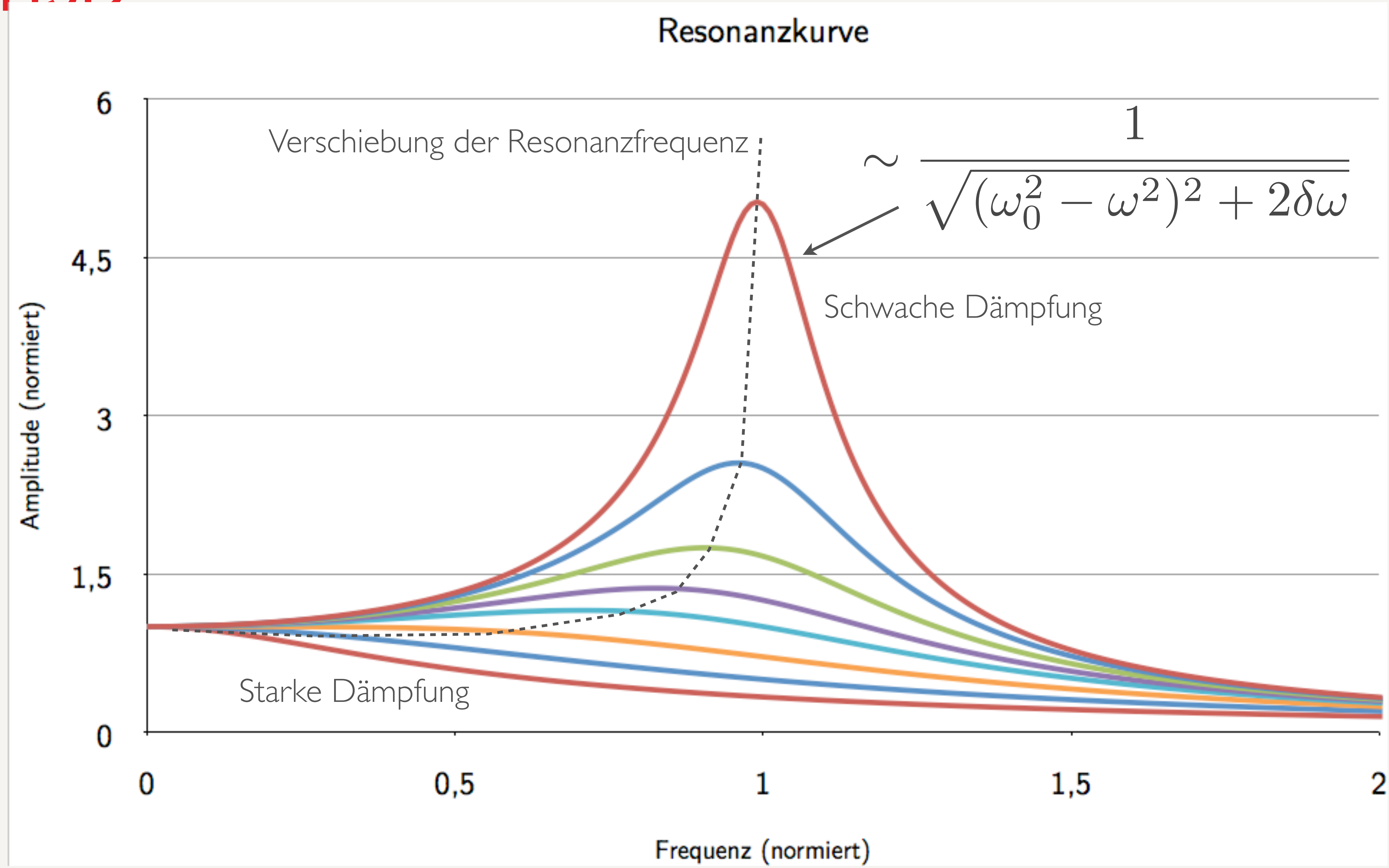


Wo sind die Resonanzkurven?

Komplex konjugiert

Für komplexe Zahlen gilt: $|A|^2 = A \cdot \overline{A}$

$$\begin{aligned} A &= |A| \cdot e^{i\varphi} \\ &= \frac{|F_0|}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega|} \cdot e^{i\varphi} \\ &= \frac{|F_0|}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \cdot e^{i\varphi} \end{aligned}$$


Resonanzkurve
6
4,5
3
1,5
0
Amplitude (normiert)
Verschiebung der Resonanzfrequenz
$\sim \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\delta\omega}}$
Schwache Dämpfung
Starke Dämpfung
0
0,5
1
1,5
2
Frequenz (normiert)

Vereinfachungen

- In dieser Darstellung sind einige Dinge vereinfacht worden.
- Zur besseren Übersicht sind die Phasen ignoriert worden.
- Eigentlich steckt je eine in der Lösung und eine in der Antriebskraft.
- Es gibt auch ein Einschwingverhalten, die sogenannten *Transienten*.

$$
\begin{aligned}
A &= |A| \cdot e^{i\varphi} \\
&= \frac{|F_0|}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega|} \cdot e^{i\varphi} \\
&= \frac{|F_0|}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \cdot e^{i\varphi}
\end{aligned}
$$

Literatur zum harmonischen Oszillator

- R. Feynman: „The Feynman Lectures on Physics“, Addison-Wesley (1970)
  - Lehrbuch für Physiker
  - Kapitel 21 - 25
  - Sowohl anschaulich als auch anspruchsvoll.
- U. Harten: „*Physik*“, Springer (2007)
  - Lehrbuch für Ingenieure und Naturwissenschaftler.
  - Einfachere Darstellung, eher Überblick

Linearität

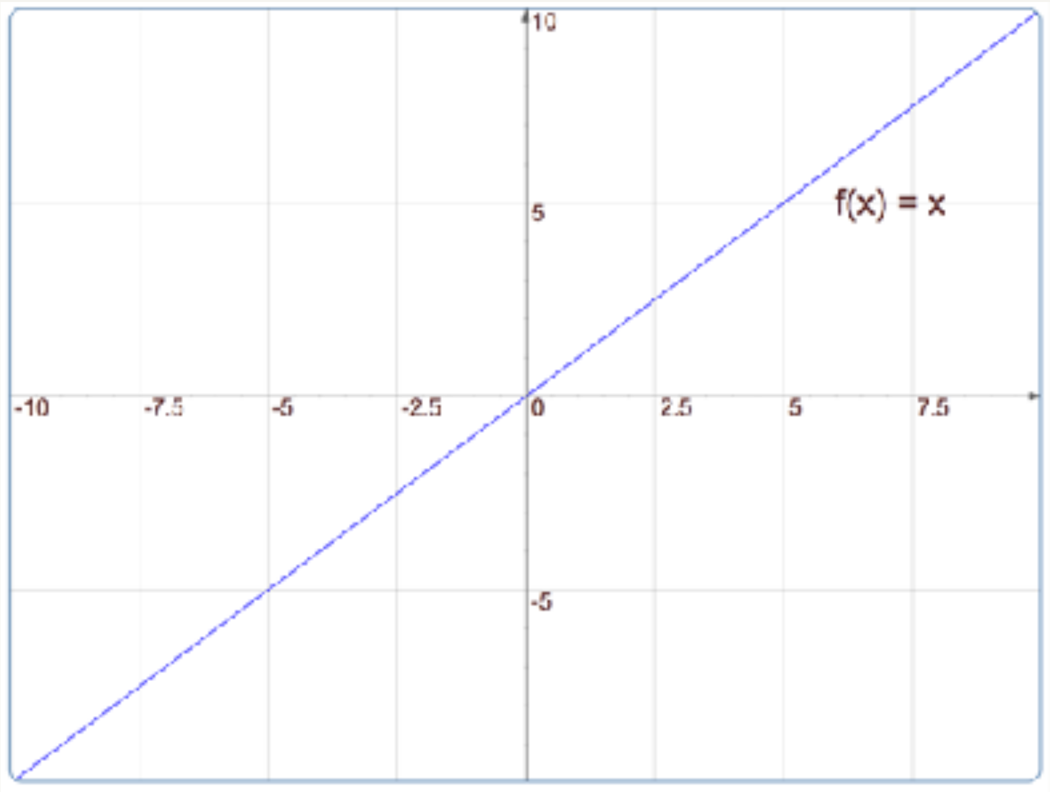
Eine Funktion ist *linear* wenn $f(a+b) = f(a) + f(b)$

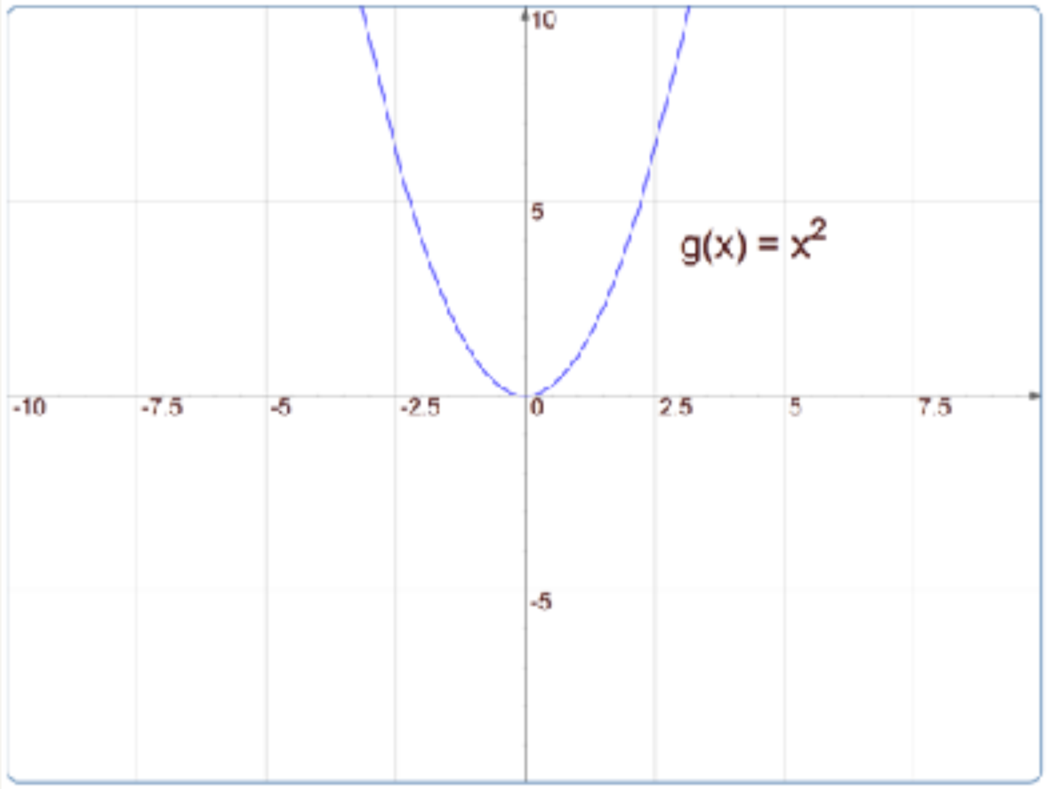
Beispiel dafür: $f(x) = x$

$$f(3+4) = f(7) = 7$$
$$= 3+4 = f(3) + f(4)$$

Beispiel dagegen: $g(x) = x^2$

$$g(3+4) = g(7) = 49$$
$$\neq g(3) + g(4) = 9 + 16 = 25$$





Linearität des Differentialoperators

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Die Ableitung ist eine lineare Operation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t) + g(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)$$

Daher können Lösungen von Differentialgleichungen addiert werden!

Und sind dann wieder Lösungen.

Addition der Lösungen

Harmonischer Oszillator

Lösung 1: $x_1(t)$ $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$

Lösung 2: $x_2(t)$ $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$

Lösung 3: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x + \omega_0^2 x &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 + \omega_0^2 x_2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Addition der Lösungen

Getriebener Oszillator: Transienten

Sei x_0 Lösung zu: $\ddot{x}_0 + 2\delta\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$

Sei x_a Lösung zu: $\ddot{x}_\mathrm{a} + 2\delta\dot{x}_\mathrm{a} + \omega_0^2 x_\mathrm{a} = F_\mathrm{a}$

Dann ist $x = x_0 + x_\mathrm{a}$ Lösung zu: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_\mathrm{a}$

Beweis: $$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_0 + x_\mathrm{a}) + 2\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + x_\mathrm{a}) + \omega_0^2(x_0 + x_\mathrm{a}) = F_\mathrm{a} + 0 = F_\mathrm{a}$$

Die Schwingung x_0 ist gedämpft und verschwindet nach einiger Zeit. Das ist der *Einschwingvorgang*, die Bewegung wird eine *Transiente* genannt.

Addition der Lösungen

Getriebener Oszillator: zwei Antriebsfrequenzen

Gegeben seien zwei verschiedene Antriebskräfte mit unterschiedlichen Antriebsfrequenzen:

$$F_\mathrm{a} = F_{0,\mathrm{a}} e^{i\omega_\mathrm{a} t}$$

$$F_\mathrm{b} = F_{0,\mathrm{b}} e^{i\omega_\mathrm{b} t}$$

Sei x_a Lösung zu: $\ddot{x}_\mathrm{a} + 2\delta\dot{x}_\mathrm{a} + \omega_0^2 x_\mathrm{a} = F_\mathrm{a}$

Sei x_b Lösung zu: $\ddot{x}_\mathrm{b} + 2\delta\dot{x}_\mathrm{b} + \omega_0^2 x_\mathrm{b} = F_\mathrm{b}$

Was ist dann mit einer Kraft $F = F_\mathrm{a} + F_\mathrm{b}$?

Superpositionsprinzip

Natürlich ist die Summe der Einzellösungen die Lösung für die Summe der Kräfte!

$$\boxed{F = F_\mathrm{a} + F_\mathrm{b}} \Rightarrow \boxed{x = x_\mathrm{a} + x_\mathrm{b}}$$

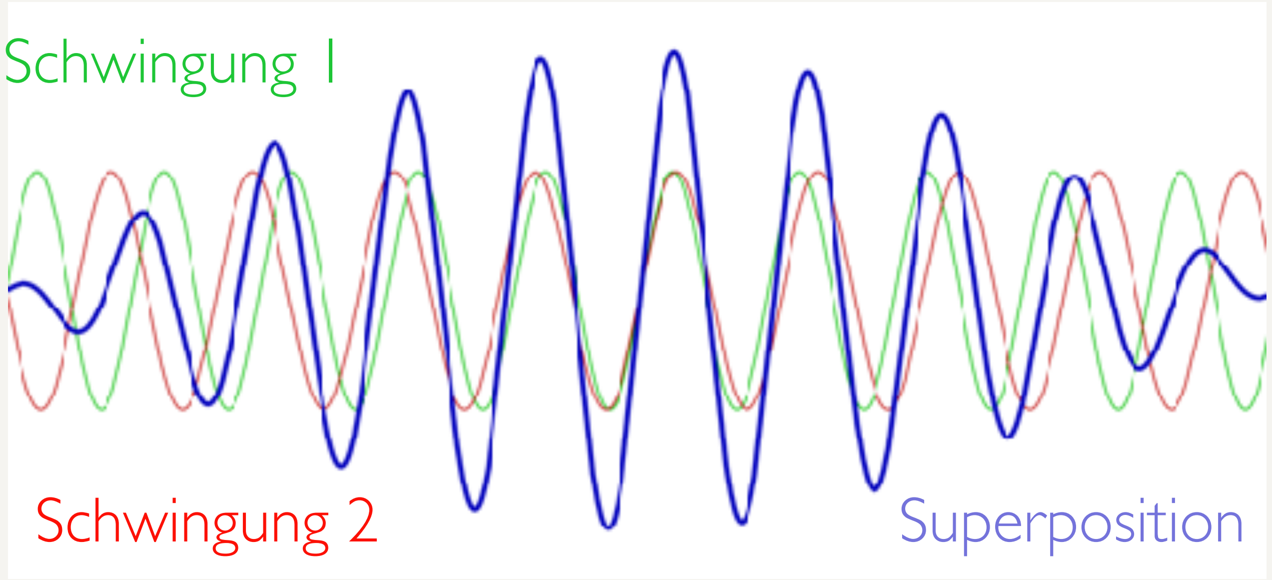
$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_\mathrm{a} + x_\mathrm{b}) + 2\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_\mathrm{a} + x_\mathrm{b}) + \omega_0^2(x_\mathrm{a} + x_\mathrm{b}) \\ &= \ddot{x}_\mathrm{a} + 2\delta\dot{x}_\mathrm{a} + \omega_0^2 x_\mathrm{a} + \ddot{x}_\mathrm{b} + 2\delta\dot{x}_\mathrm{b} + \omega_0^2 x_\mathrm{b} \\ &= F_\mathrm{a} + F_\mathrm{b} = F\end{aligned}$$

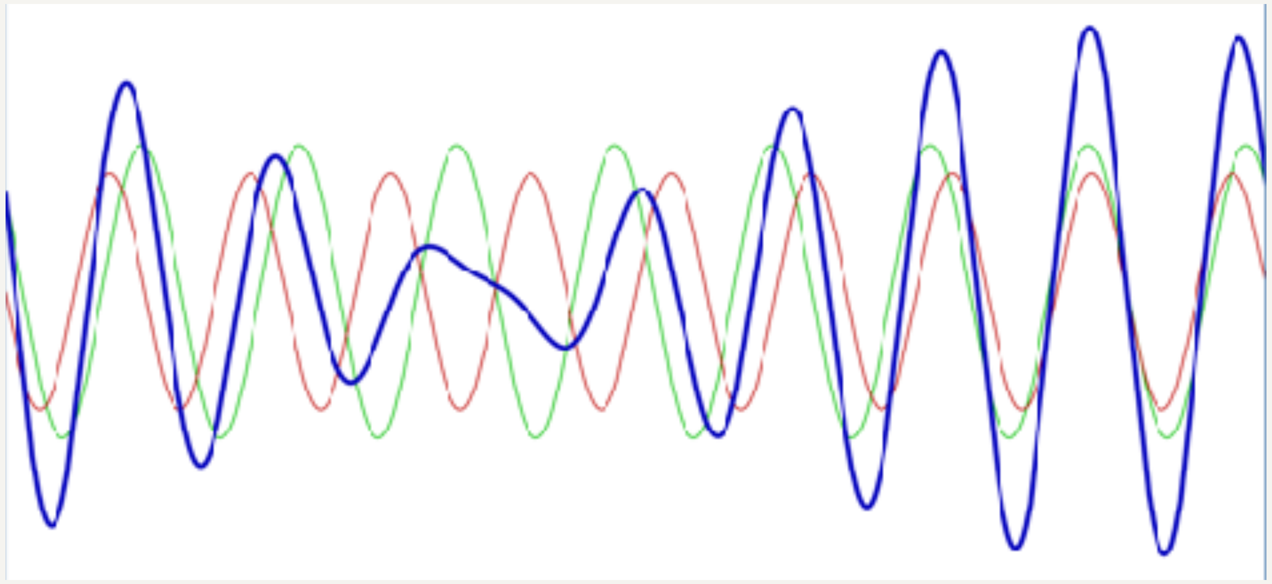
Das ist das Superpositionsprinzip: Lösungen von *linearen* Gleichungssytemen können addiert werden und sind dann wieder Lösungen!

Superposition

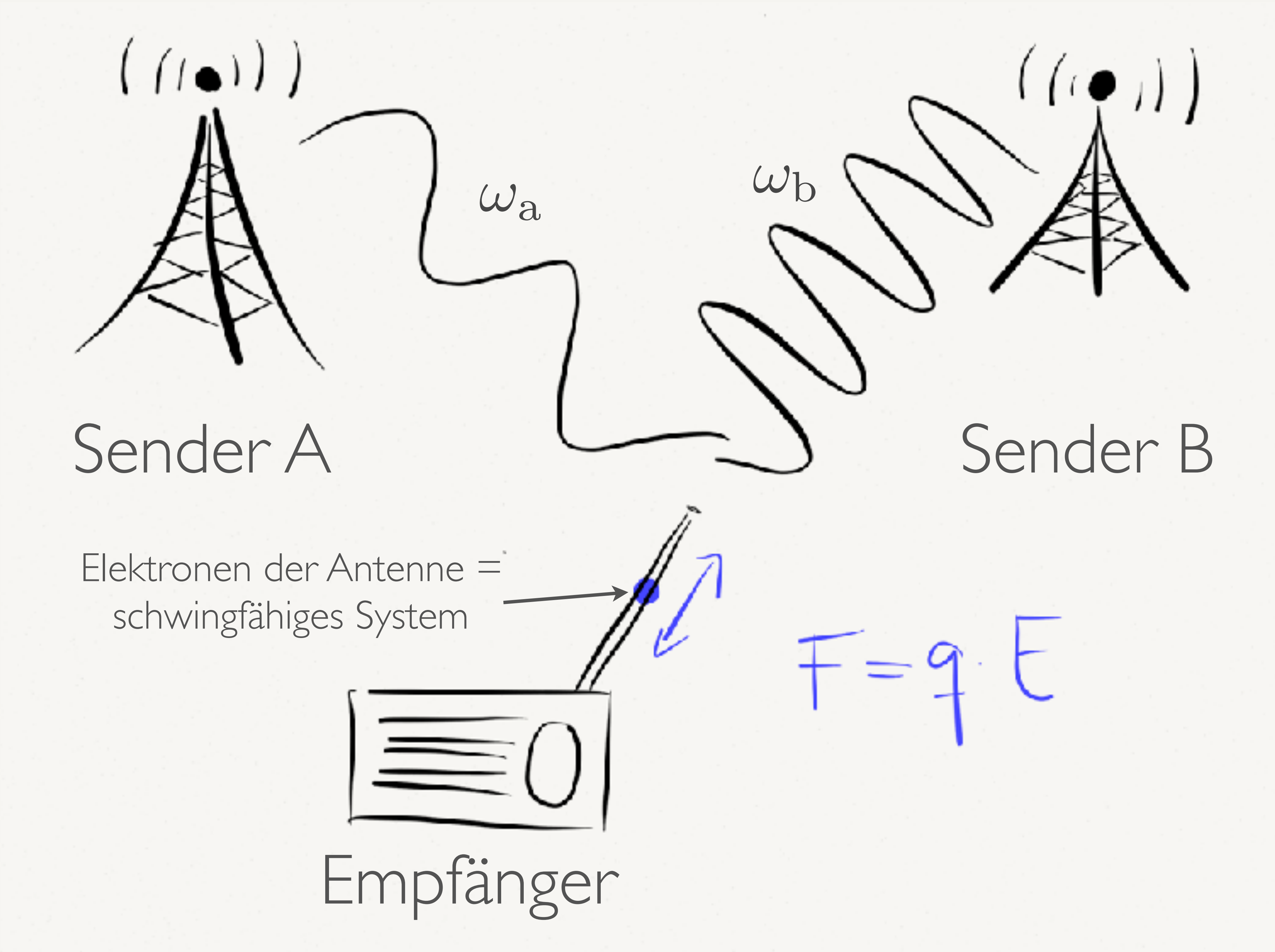
- Ein Beispiel für Superposition: Addition von zwei Sinus-Schwingungen.
- Jede Schwingung hat eine eigene Amplitude, Frequenz und Phase.
- Die Superposition ist die tatsächliche Bewegungskurve.

Zwei Sinus-Schwingungen in Superposition

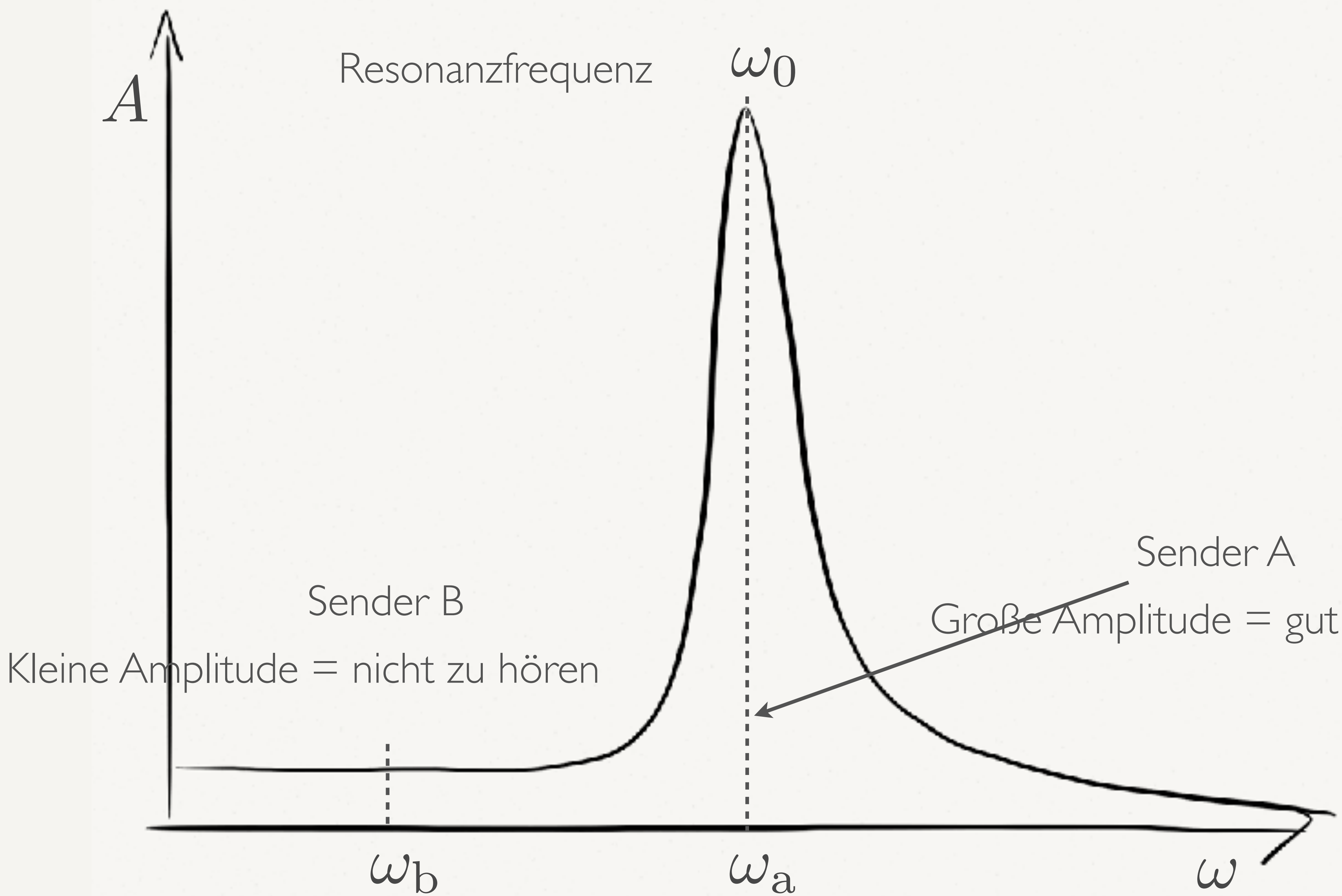




Radio


ω_a
ω_b
Sender A
Sender B
Elektronen der Antenne =
schwingfähiges System
$F = q \cdot E$
Empfänger

Radio


Resonanzfrequenz
ω_0
A
Sender A
Große Amplitude = gut zu hören
Sender B
Kleine Amplitude = nicht zu hören
ω_b
ω_a
ω

Radio

- Jeder Sender hat seine eigene Sende- bzw. „Antriebs“-Frequenz
- Die Elektronen in der Antenne werden gleichzeitig von allen eintreffenden Radiowellen in Schwingungen versetzt.
- Zwei Kräfte mit zwei Frequenzen ω_{a} und ω_{b}.
- Die Kraftamplituden sollen ungefähr gleich groß sein.
- Jede Kraft einzeln sorgt für unterschiedlich große Schwingungsamplituden (Sender einzeln angeschaltet).
- Aber auch in Summe kommt genau dieses Schwingungsverhalten heraus (beide Sender gleichzeitig an).
- Am Radio wird die Resonanzfrequenz eingestellt.